ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΘΕΩΡΙΑ ΠΕΔΙΟΥ (2015)

ΕΡΓΑΣΙΑ 2

Καταληκτική ημερομηνία υποβολής 25-11-2015

Θέμα 0. Αποδείξτε τις ταυτότητες

$$(u^{(a)}(k))^\dagger u^{(b)}(k) \,=\, 2E\delta_{ab}$$

$$(v^{(a)})^\dagger v^{(b)}(k) \,=\, 2E\delta_{ab}$$

$$(u^{(a)}(k))^\dagger v^{(b)}(k) \,\neq\, 0$$

$$(v^{(a)}(k))^\dagger u^{(b)}(k) \,\neq\, 0$$

$$(u^{(a)}(k))^\dagger v^{(b)}(\tilde{k}) \,=\, 0$$

$$(v^{(a)}(k))^\dagger u^{(b)}(\tilde{k}) \,=\, 0$$

όπου

$$\tilde{k}^\mu \,=\, (E,\, -\vec{k})\,.$$

Επιπλέον δείξτε τις *σχέσεις πληρότητας*

$$\textstyle\sum_s u_\alpha^{(s)}(k)\overline{u}_\beta^{(s)}(k) \,=\, (\gamma\cdot k\,+\,m)_{\alpha\beta}$$

$$\textstyle\sum_s v_\alpha^{(s)}(k)\overline{v}_\beta^{(s)}(k) \,=\, (\gamma\cdot k\,-m)_{\alpha\beta}$$

Θέμα 1. Αποδείξτε τις κάτωθι ταυτότητες (*ταυτότητες Gordon*)

$$\overline{u}(p_1)\gamma_\mu u(p_2) \,=\, \tfrac{1}{2m}\overline{u}(p_1)\,[\,(p_1+p_2)_\mu \,+\, i\sigma_{\mu\nu}(p_1-p_2)^\nu\,]\,u(p_2)$$

$$\overline{v}(p_1)\gamma_\mu v(p_2) \,=\, -\tfrac{1}{2m}\overline{v}(p_1)\,[\,(p_1+p_2)_\mu \,+\, i\sigma_{\mu\nu}(p_1-p_2)^\nu\,]\,v(p_2)$$

$$\overline{u}(p_1)\sigma_{\mu\nu}(p_1+p_2)^\nu u(p_2) \,=\, i\overline{u}(p_1)(p_1-p_2)_\mu u(p_2)$$

Θέμα 2. Θεωρήστε ένα μη-ερμιτιανό βσαθμωτό πεδίο $\phi(x)$ και ένα α-ριστερόστροφο σπινοριακό πεδίο Weyl $\psi(x)$. Υποθέστε ότι τα πεδία αυτά μετασχηματίζονται ως ακολούθως

$$\delta\phi \,=\, -i\epsilon^{\perp}\sigma_2\psi$$

$$\delta\psi \,=\, \epsilon\, F \,+\, \sigma^{\mu}\partial_{\mu}\phi\,\sigma_2\epsilon^{*}$$

$$\delta F \,=\, -i\epsilon^{\dagger}\overline{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\psi$$

όπου ϵ είναι ένα σταθερό αντιμετατιθέμενο παραμετρικό Weyl spinor[1] και F ένα βοηθητικό βαθμωτό πεδίο.

Δείξτε ότι η πυκνότητα Lagrange

$$\mathcal{L} \,=\, |\partial\phi|^2 \,+\, i\psi^{\dagger}\overline{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\psi \,+\, |F|^2 \,+\, \left(m\phi\, F \,+ i\frac{m}{2}\psi^{\perp}\sigma_2\psi \,+\, c.c.\right)$$

είναι αναλλοίωτη ως προς τους μετασχηματισμούς αυτούς. Απαλείψτε το βοηθητικό πεδίο F λύνοντας την εξίσωση κίνησής του και αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα στην $\mathcal{L}$.

Θεωρήστε το σύνθετο πεδίο

$$\Phi(x) \,\equiv\, \phi(x) \,+\, \sqrt{2}\, i\epsilon^{\perp}\sigma_2\, \psi(x) \,+\, \epsilon^2\, F(x)$$

και εξετάστε πως μετασχηματίζεται. Η θεωρία αυτή είναι ένα απλό παράδειγμα *υπερσυμμετρικής θεωρίας*.

Θέμα 3. Θεωρήστε ένα πεδίο Dirac $\psi(x)$ παρουσία ενός ηλεκτρομαγνητικού πεδίου $\mathcal{A}^{\mu}(x)$. Η εξίσωση κίνησης του $\psi(x)$ είναι

$$(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} \,-\, e\gamma^{\mu}\mathcal{A}_{\mu} \,-\, m)\; \psi(x) \,=\, 0\,,$$

όπου e το ηλεκτρικό φορτίο του $\psi(x)$. Δείξτε ότι το πεδίο Dirac

$$\psi^{c}(x) \,\equiv\, -i\gamma^2\, \psi^{*}(x)$$

ικανοποιεί την ίδια εξίσωση με $e \rightarrow -e$.

[1] Ισχύει $\epsilon_{\alpha}\epsilon_{\beta} \,=\, -\epsilon_{\beta}\epsilon_{\alpha}$ και $\epsilon^2 \,=\, i\epsilon^{\perp}\sigma_2\epsilon$. Επίσης, μπορεί να δειχτεί ότι $\epsilon_{\alpha}\epsilon_{\beta} \,=\, \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta}\epsilon^2$.

Θέμα 4. Αποδείξτε τις κάτωθι ταυτότητες

$$Tr(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) = 4\,(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho})$$

$$Tr(\gamma^5) = 0$$

$$Tr(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5) = 0$$

$$Tr(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^5) = -4i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$$

$$\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\epsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} = -2(\delta^\mu_\rho\delta^\nu_\sigma - \delta^\mu_\sigma\delta^\nu_\rho)$$

Θέμα 5. Δείξτε ότι η Λαγκρανζιανή

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\overline{\psi}\gamma_5\gamma_\nu\partial_\mu\partial_\rho\partial_\sigma\psi$$

είναι αναλλοίωτη κατά Lorentz.

Θέμα 6. Θεωρήστε ένα κβαντικό μη-ερμιτιανό βαθμωτό πεδίο ϕ με πυκνότητα Lagrange

$$\mathcal{L} = |\partial\phi|^2 - \frac{\lambda^2}{4}\left(|\phi|^2 - v^2\right)^2 ,$$

όπου λ^2 και v^2 γνωστές παράμετροι.

α) Δείξτε ότι η συνάρτηση Lagrange είναι αναλλοίωτη στους συνεχείς μετασχηματισμούς

$$\phi \to \phi' = e^{i\alpha}\,\phi .$$

Εφαρμόστε την μέθοδο Noether και βρήτε το διατηρούμενο ρεύμα και το αντίστοιχο διατηρούμενο φορτίο.

β) Γράψτε την εξίσωση κίνησης και θεωρήστε την μέση τιμή της στην κατάσταση ελάχιστης ενέργειας $|0\rangle$ (κενό). Κάντε την προσέγγιση

$$\langle 0|\phi^n(x)|0\rangle \approx (\langle 0|\phi(x)|0\rangle)^n$$

(ημικλασική προσέγγιση). Δείξτε ότι το αναλλοίωτο κατά Poincare του κενού επιβάλλει ότι η μέση τιμή $\langle 0|\phi(x)|0\rangle$ θα είναι ανεξάρτητη του x. Προσδιορίστε την σταθερά $\eta \equiv \langle 0|\phi(x)|0\rangle$ (αναμενομένη τιμή κενού).

γ) Γράψτε την Λαγκρανζιανή συναρτήσει ενός νέου πεδίου

$$\phi'(x) \equiv \phi(x) - \eta$$

και από τους τετραγωνικούς όρους συμπεράνατε τις μάζες των δύο σωματιδίων που περιγράφει η θεωρία αυτή.

Θέμα 7. Ένα Dirac spinor $\Psi(x)$ που συντίθεται από ένα μόνο αριστερόστροφο Weyl spinor

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi(x) \\ \\ i\sigma_2\psi^*(x) \end{pmatrix}$$

ονομάζεται Majorana spinor και έχει τους μισούς βαθμούς ελευθερίας. Αποδείξτε ότι τα Majorana spinors Ψ και $\mathcal{X}$ ικανοποιούν τις ταυτότητες

$$\overline{\Psi}\mathcal{X} = \overline{\mathcal{X}}\Psi$$

$$\overline{\Psi}\gamma^\mu\mathcal{X} = -\overline{\mathcal{X}}\gamma^\mu\Psi$$

$$\overline{\Psi}\gamma_5\mathcal{X} = \overline{\mathcal{X}}\gamma_5\Psi$$

$$\overline{\Psi}\gamma^\mu\gamma_5\mathcal{X} = \overline{\mathcal{X}}\gamma^\mu\gamma_5\Psi$$

$$\overline{\Psi}\sigma_{\mu\nu}\mathcal{X} = -\overline{\mathcal{X}}\sigma_{\mu\nu}\Psi$$

Θέμα 8. Υπολογίστε την αναμενόμενη τιμή κενού

$$\langle 0|T(\overline{\Psi}(x)\Gamma\Psi(y))|0\rangle \quad (\Gamma = \gamma_5, \quad \gamma_5\gamma_\mu, \quad \gamma_\mu\gamma_\nu)$$