Ειδικά Θέματα Μηχανικής

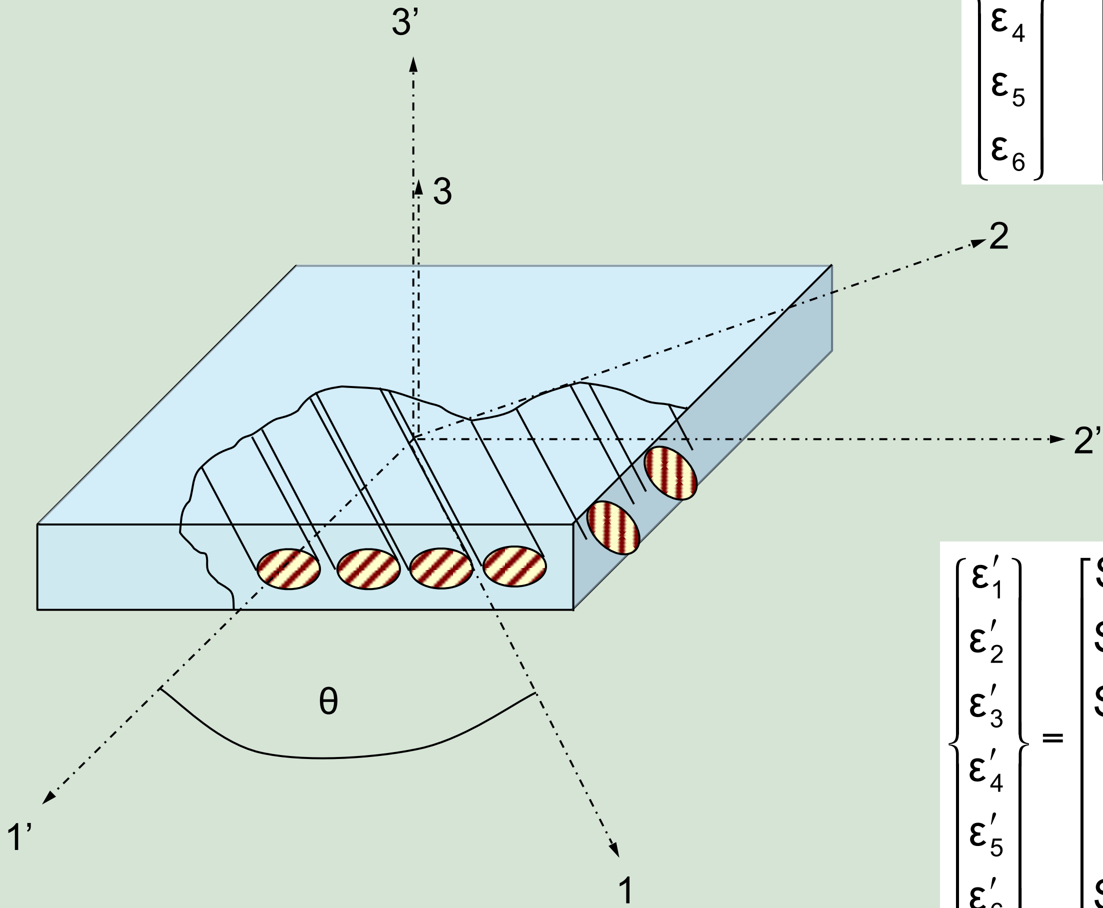
(Μηχανική Σύνθετων Υλικών)

Κεφάλαιο 2 (2.1)

Μηχανική συμπεριφορά ορθοτρόπου μέσου

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}$$

on-axis ορθότροπο

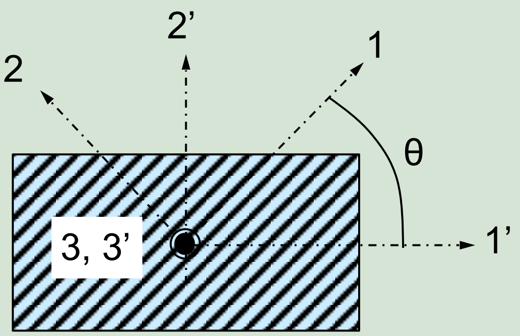


$$\begin{Bmatrix} \varepsilon'_1 \\ \varepsilon'_2 \\ \varepsilon'_3 \\ \varepsilon'_4 \\ \varepsilon'_5 \\ \varepsilon'_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S'_{11} & S'_{12} & S'_{13} & 0 & 0 & S'_{16} \\ S'_{12} & S'_{22} & S'_{23} & 0 & 0 & S'_{26} \\ S'_{13} & S'_{23} & S'_{33} & 0 & 0 & S'_{36} \\ 0 & 0 & 0 & S'_{44} & S'_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S'_{45} & S'_{55} & 0 \\ S'_{16} & S'_{26} & S'_{36} & 0 & 0 & S'_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \sigma'_3 \\ \sigma'_4 \\ \sigma'_5 \\ \sigma'_6 \end{Bmatrix}$$

off-axis ορθότροπο

Στο κύριο σύστημα, on-axis, του ορθοτρόπου μέσου οι συνιστώσες του ελαστικού μητρώου ενδόσεως είναι **9**, ενώ στο τυχαίο, off-axis, **13**...(δεν είναι όμως όλες ανεξάρτητες μεταξύ τους!)

Μέσω των σχέσεων τανυστικού μετασχηματισμού μπορεί να αποδειχθεί ότι γιά τον μετασχηματισμό του συστήματος συντεταγμένων:



$$C'_{11} = C_{11}m^4 + 2m^2n^2\left(C_{12} + 2C_{66}\right) + C_{22}n^4$$

$$C'_{12} = m^2n^2\left(C_{11} + C_{22} - 4C_{66}\right) + C_{12}\left(m^4 + n^4\right)$$

$$C'_{13} = C_{13}m^2 + C_{23}n^2$$

$$C'_{16} = mn\left[C_{11}m^2 - C_{22}n^2 - \left(C_{12} + 2C_{66}\right)\left(m^2 - n^2\right)\right]$$

$$C'_{22} = C_{11}n^4 + 2m^2n^2\left(C_{12} + 2C_{66}\right) + C_{22}m^4$$

$$C'_{23} = C_{13}n^2 + C_{23}m^2$$

$$C'_{26} = mn\left[C_{11}n^2 - C_{22}m^2 + \left(C_{12} + 2C_{66}\right)\left(m^2 - n^2\right)\right]$$

$$C'_{33} = C_{33}$$

$$C'_{36} = \left(C_{13} - C_{23}\right)mn$$

$$C'_{44} = C_{44}m^2 + C_{55}n^2$$

$$C'_{45} = \left(C_{55} - C_{44}\right)mn$$

$$C'_{55} = C_{44}n^2 + C_{55}m^2$$

$$C'_{66} = \left(C_{11} + C_{22} - 2C_{12}\right)m^2n^2 + C_{66}\left(m^2 - n^2\right)^2$$

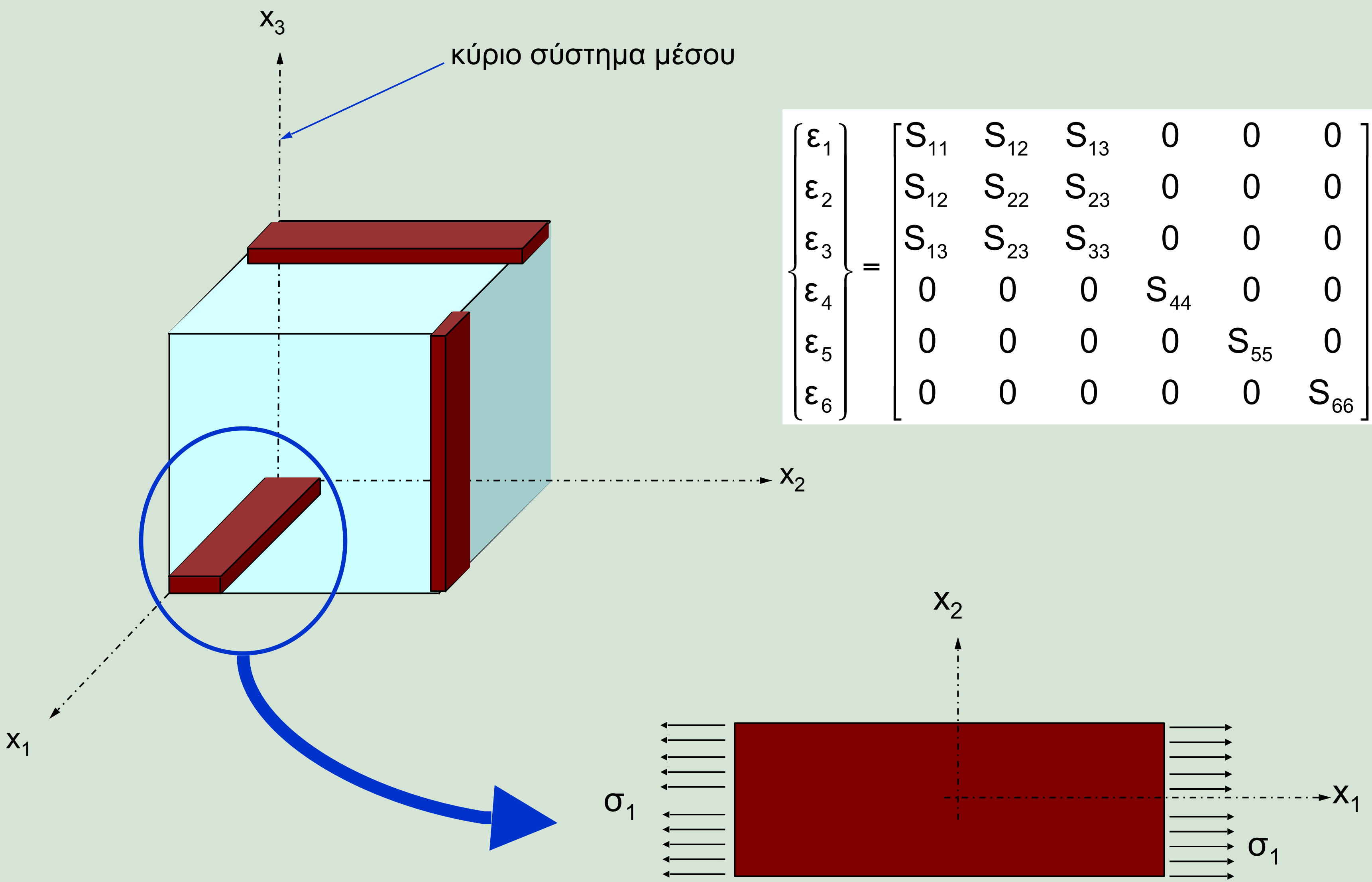
$$C'_{14} = C'_{15} = C'_{24} = C'_{25} = C'_{34} = C'_{35} = C'_{46} = C'_{56} = 0$$

Αντιστοίχως, για τις συνιστώσες του μητρώου ενδόσεως:

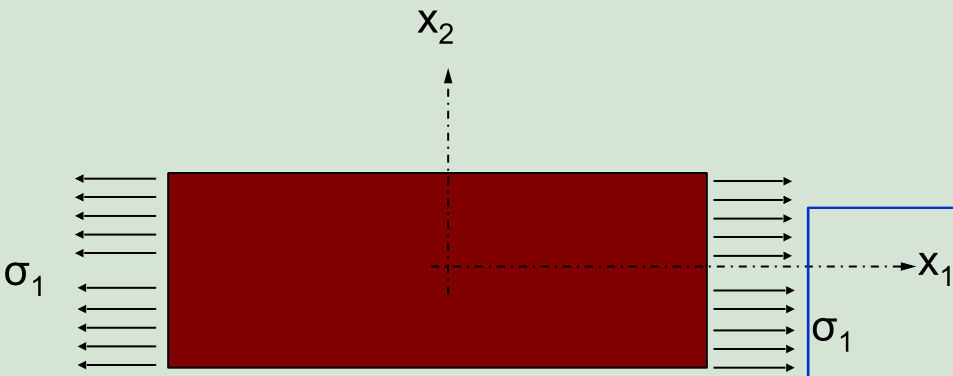
$$
\begin{aligned}
S'_{11} &= S_{11}m^4 + m^2n^2\left(2S_{12} + S_{66}\right) + S_{22}n^4 \\
S'_{12} &= m^2n^2\left(S_{11} + S_{22} - S_{66}\right) + S_{12}\left(m^4 + n^4\right) \\
S'_{13} &= S_{13}m^2 + S_{23}n^2 \\
S'_{16} &= mn\left[2S_{11}m^2 - 2S_{22}n^2 - \left(2S_{12} + S_{66}\right)\left(m^2 - n^2\right)\right] \\
S'_{22} &= S_{11}n^4 + m^2n^2\left(2S_{12} + S_{66}\right) + S_{22}m^4 \\
S'_{23} &= S_{13}n^2 + S_{23}m^2 \\
S'_{26} &= mn\left[2S_{11}n^2 - 2S_{22}m^2 + \left(2S_{12} + S_{66}\right)\left(m^2 - n^2\right)\right] \\
S'_{33} &= S_{33} \\
S'_{36} &= 2\left(S_{13} - S_{23}\right)mn \\
S'_{44} &= S_{44}m^2 + S_{55}n^2 \\
S'_{45} &= \left(S_{55} - S_{44}\right)mn \\
S'_{55} &= S_{44}n^2 + S_{55}m^2 \\
S'_{66} &= 2\left(2S_{11} + 2S_{22} - 4S_{12}\right)m^2n^2 + S_{66}\left(m^2 - n^2\right)^2 \\
S'_{14} &= S'_{15} = S'_{24} = S'_{25} = S'_{34} = S'_{35} = S'_{46} = S'_{56} = 0
\end{aligned}
$$

Επομένως, η μέτρηση των ελαστικών ιδιοτήτων θα πρέπει να γίνεται ως προς το κύριο σύστημα του μέσου εφ’όσον είναι λιγότερες οι προς προσδιορισμό σταθερές.

Τεχνικές ελαστικές σταθερές γιά ορθότροπα μέσα



$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



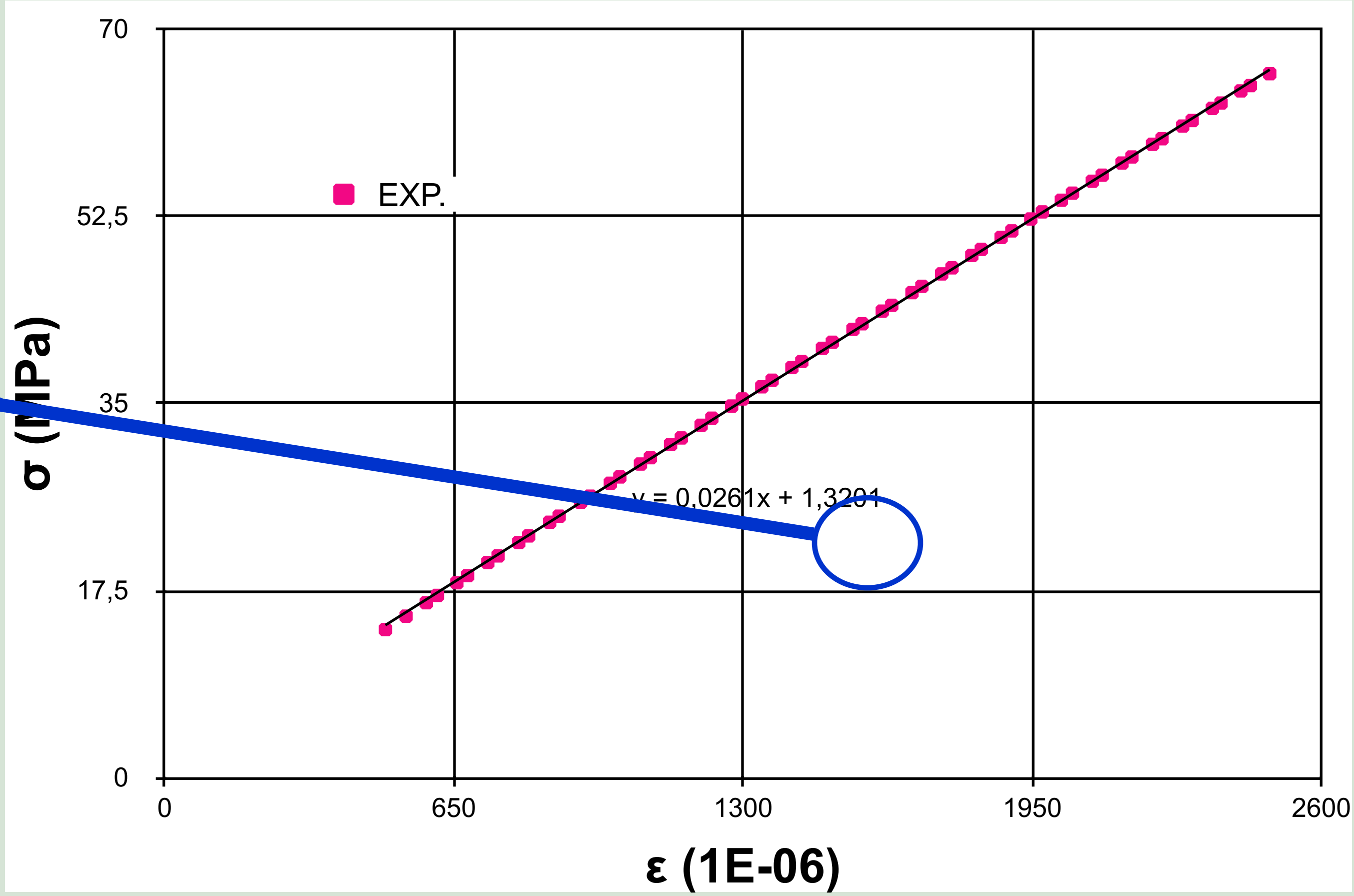
$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\varepsilon_1 = S_{11}\sigma_1$$

$$\varepsilon_1 = S_{11}\sigma_1$$

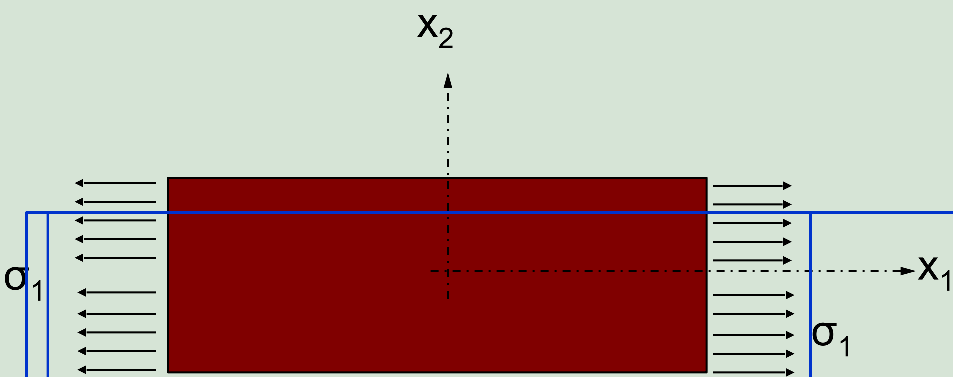
$$\frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} = \frac{1}{S_{11}} = E_1$$

$$E_1 = 26.1\,\mathrm{GPa}$$



Κατ' αντίστοιχο τρόπο ορίζονται και τα μέτρα ελαστικότητος στις άλλες δύο διευθύνσεις:

$$S_{22} = \frac{1}{E_2} \qquad S_{33} = \frac{1}{E_3}$$



$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_1\\\varepsilon_2\\\varepsilon_3\\\varepsilon_4\\\varepsilon_5\\\varepsilon_6\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}S_{11}&S_{12}&S_{13}&0&0&0\\S_{21}&S_{22}&S_{23}&0&0&0\\S_{31}&S_{32}&S_{33}&0&0&0\\0&0&0&S_{44}&0&0\\0&0&0&0&S_{55}&0\\0&0&0&0&0&S_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_1\\0\\0\\0\\0\\0\end{Bmatrix}$$

$$\varepsilon_1=S_{11}\sigma_1$$

$$\varepsilon_2=S_{21}\sigma_1$$

$$\varepsilon_3=S_{31}\sigma_1$$

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}=\frac{S_{21}}{S_{11}}$$

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}=\frac{S_{21}}{1/E_1}$$

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}=\frac{-\nu_{12}/E_1}{1/E_1}$$

$$\nu_{12}=\frac{-\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

$$\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1}=\frac{S_{31}}{S_{11}}$$

$$\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1}=\frac{S_{31}}{1/E_1}$$

$$\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1}=\frac{-\nu_{13}/E_1}{1/E_1}$$

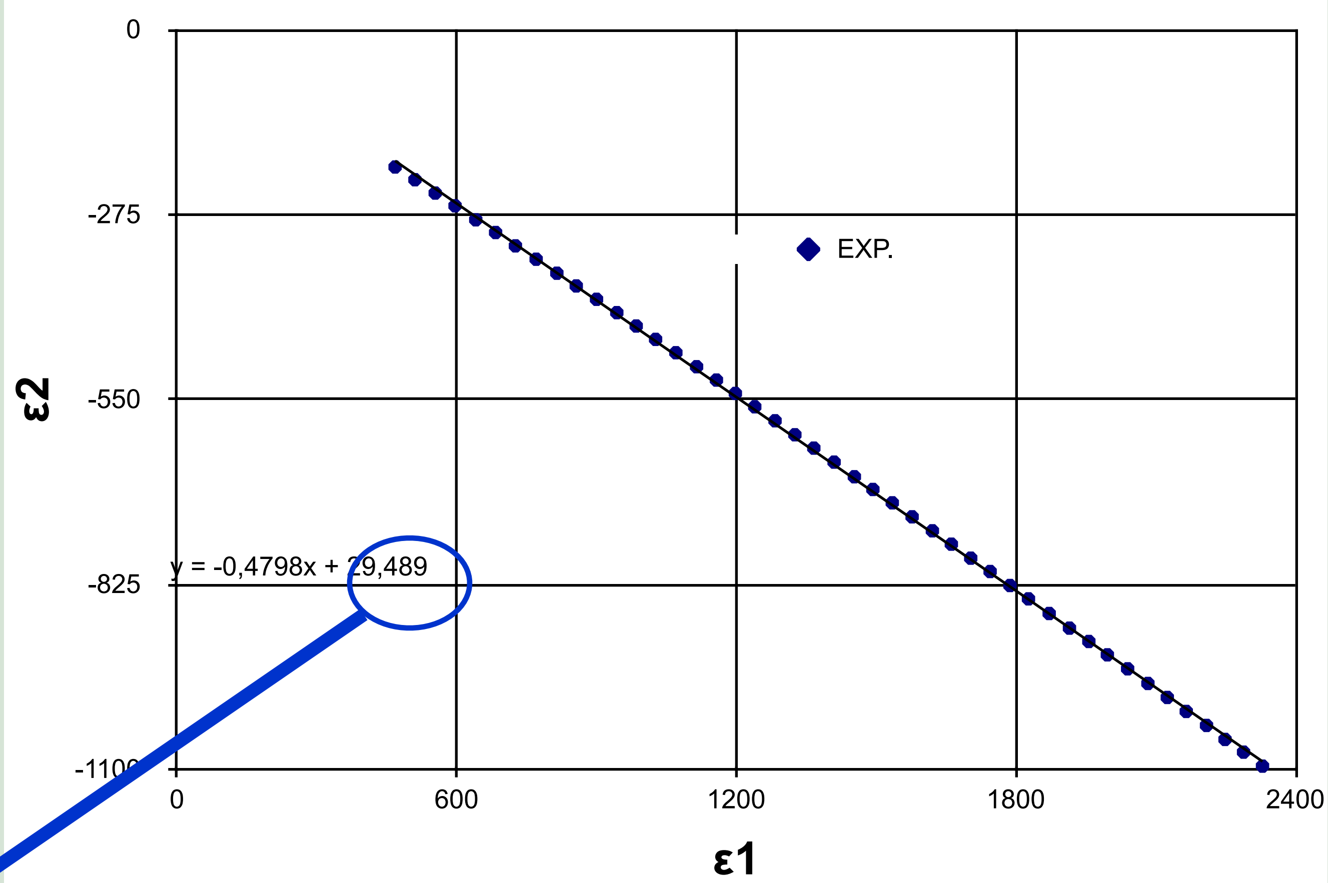
$$\nu_{13}=\frac{-\varepsilon_3}{\varepsilon_1}$$

Επομένως:

$$S_{21}=\frac{-\nu_{12}}{E_1}\qquad S_{31}=\frac{-\nu_{13}}{E_1}$$

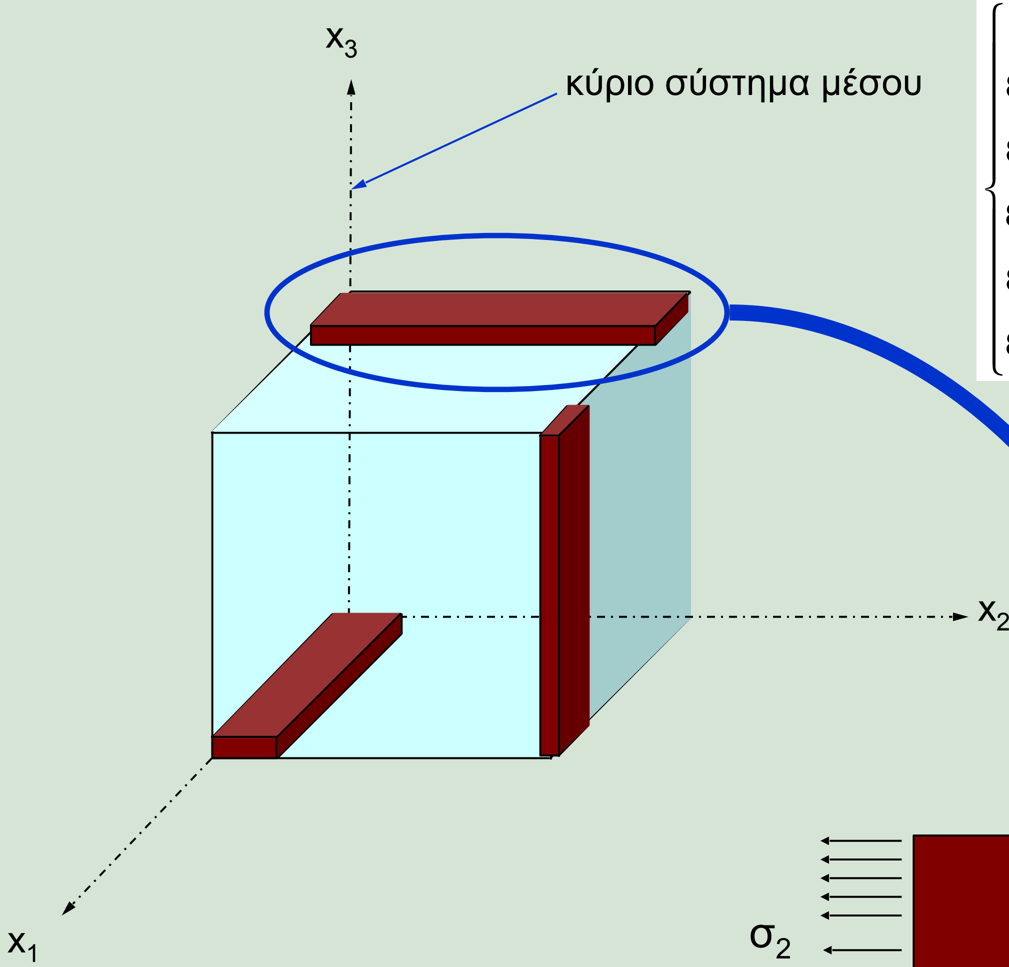
Πειραματικός προσδιορισμός του λόγου Poisson, v_{12}

$$v_{12} = \frac{-\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

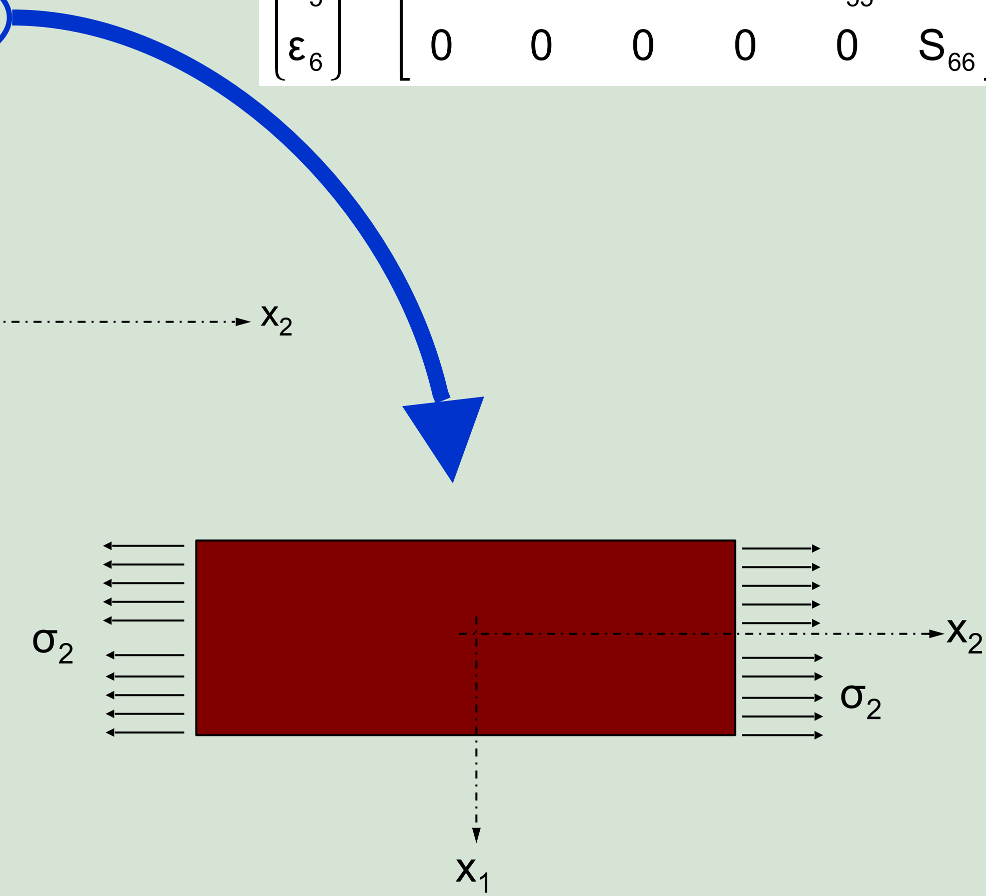


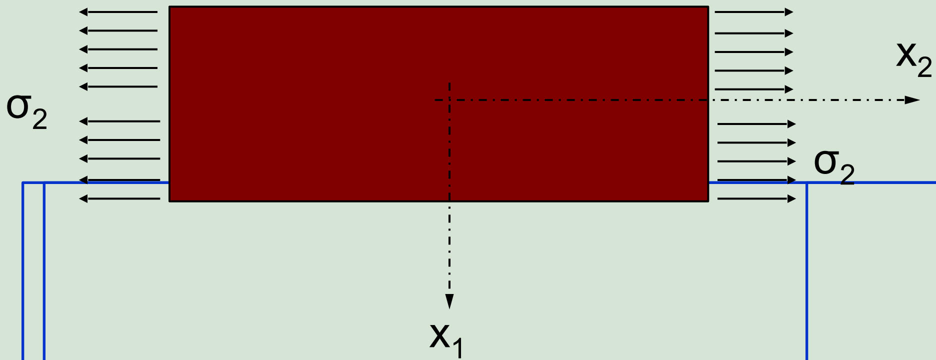
$$v_{12} = 0.4798$$

Κατ’ αντίστοιχο τρόπο ορίζονται και οι υπόλοιποι λόγοι Poisson:



$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \sigma_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$





$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\\ \varepsilon_4\\ \varepsilon_5\\ \varepsilon_6\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0\\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0\\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\ \sigma_2\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}$$

$$\varepsilon_1 = S_{12}\sigma_2$$

$$\varepsilon_2 = S_{22}\sigma_2$$

$$\varepsilon_3 = S_{32}\sigma_2$$

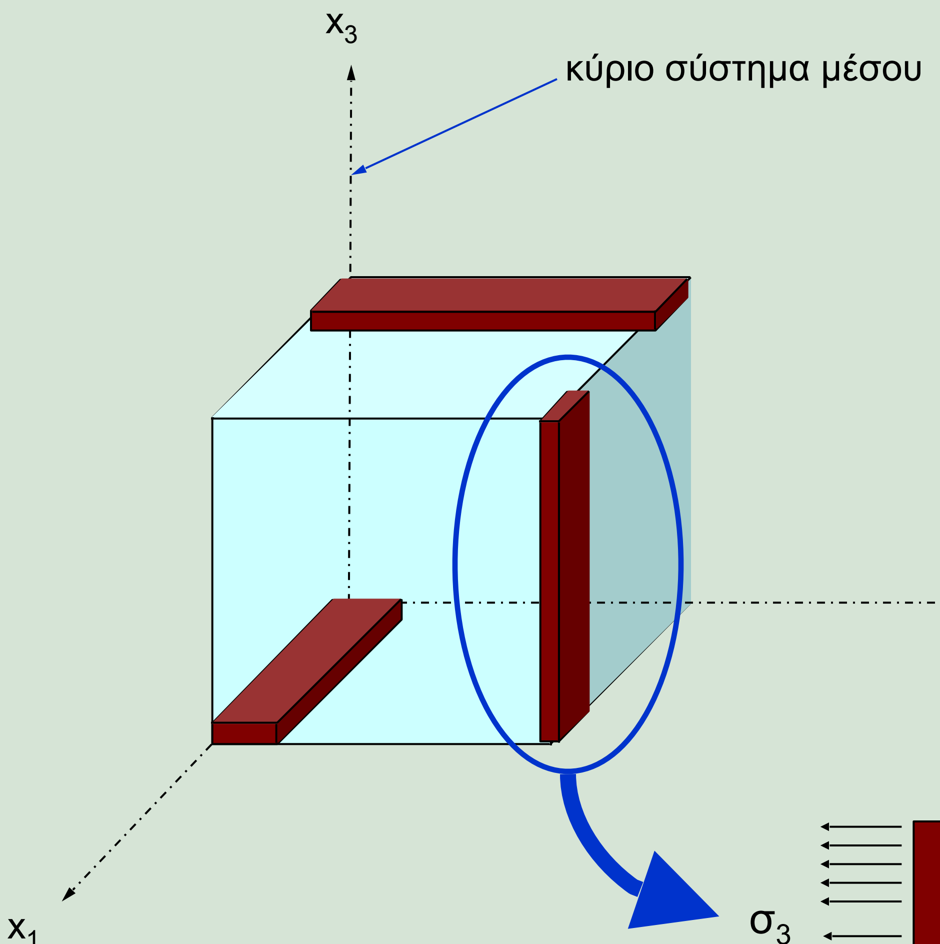
$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{S_{12}}{S_{22}} \quad \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{S_{12}}{1/E_2} \quad \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{-\nu_{21}/E_2}{1/E_2} \quad \nu_{21} = \frac{-\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

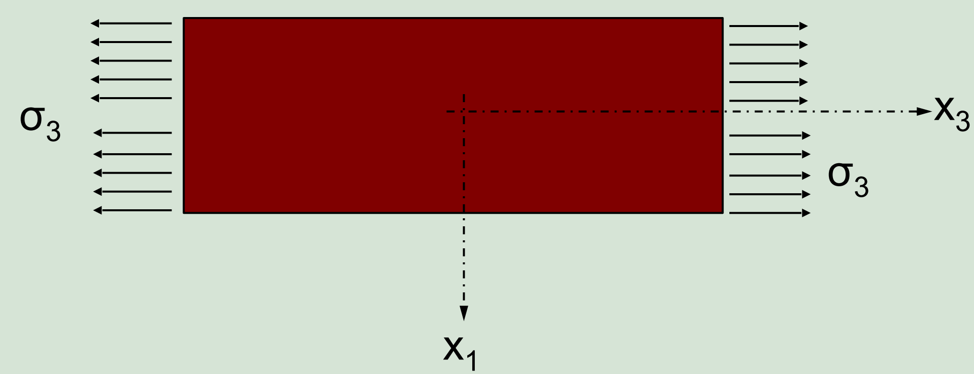
$$\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2} = \frac{S_{32}}{S_{22}} \quad \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2} = \frac{S_{32}}{1/E_2} \quad \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2} = \frac{-\nu_{23}/E_2}{1/E_2} \quad \nu_{23} = \frac{-\varepsilon_3}{\varepsilon_2}$$

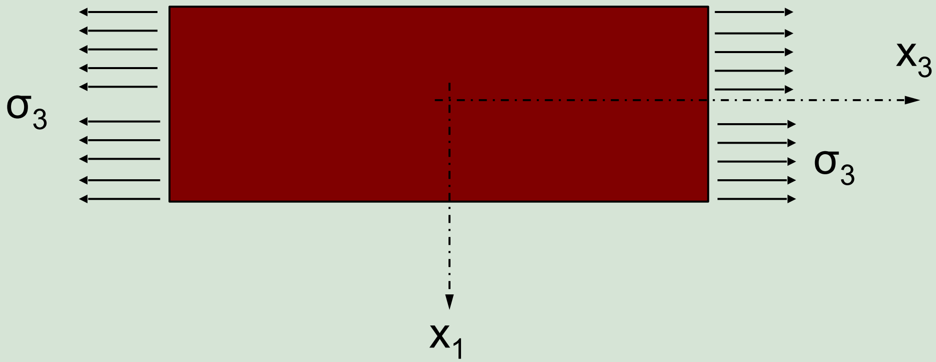
Επομένως: $S_{12} = \dfrac{-\nu_{21}}{E_2}$ $\quad S_{32} = \dfrac{-\nu_{23}}{E_2}$

Ομοίως:

$$
\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\
S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\
S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}
$$







$$
\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} =
\begin{bmatrix}
S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\
S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\
S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}
$$

$$\varepsilon_1 = S_{13}\sigma_3$$

$$\varepsilon_2 = S_{23}\sigma_3$$

$$\varepsilon_3 = S_{33}\sigma_3$$

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} = \frac{S_{13}}{S_{33}} \qquad \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} = \frac{S_{13}}{1/E_3} \qquad \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} = \frac{-\nu_{31}/E_3}{1/E_3} \qquad \nu_{31} = \frac{-\varepsilon_1}{\varepsilon_3}$$

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3} = \frac{S_{23}}{S_{33}} \qquad \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3} = \frac{S_{23}}{1/E_3} \qquad \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3} = \frac{-\nu_{32}/E_3}{1/E_3} \qquad \nu_{32} = \frac{-\varepsilon_2}{\varepsilon_3}$$

Επομένως:

$$S_{13} = \frac{-\nu_{31}}{E_3} \qquad S_{23} = \frac{-\nu_{32}}{E_3}$$

Συνοψίζοντας:

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-v_{21}}{E_2} & \frac{-v_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-v_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & \frac{-v_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-v_{13}}{E_1} & \frac{-v_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix}$$

E_i : μέτρο ελαστικότητος (Young modulus) κατά την i-διεύθυνση

v_{ij} : λόγος Poisson εγκάρσιας παραμόρφωσης στην j-διεύθυνση λόγω μονοαξονικής εφελκυστικής φορτίσεως στην i-διεύθυνση. Δηλαδή, $v_{ij} = -\varepsilon_j/\varepsilon_i$ με όλες τις συνιστώσες του τανυστού τάσεως μηδέν εκτός της σ_i.

Λόγω συμμετρίας του μητρώου **S**:

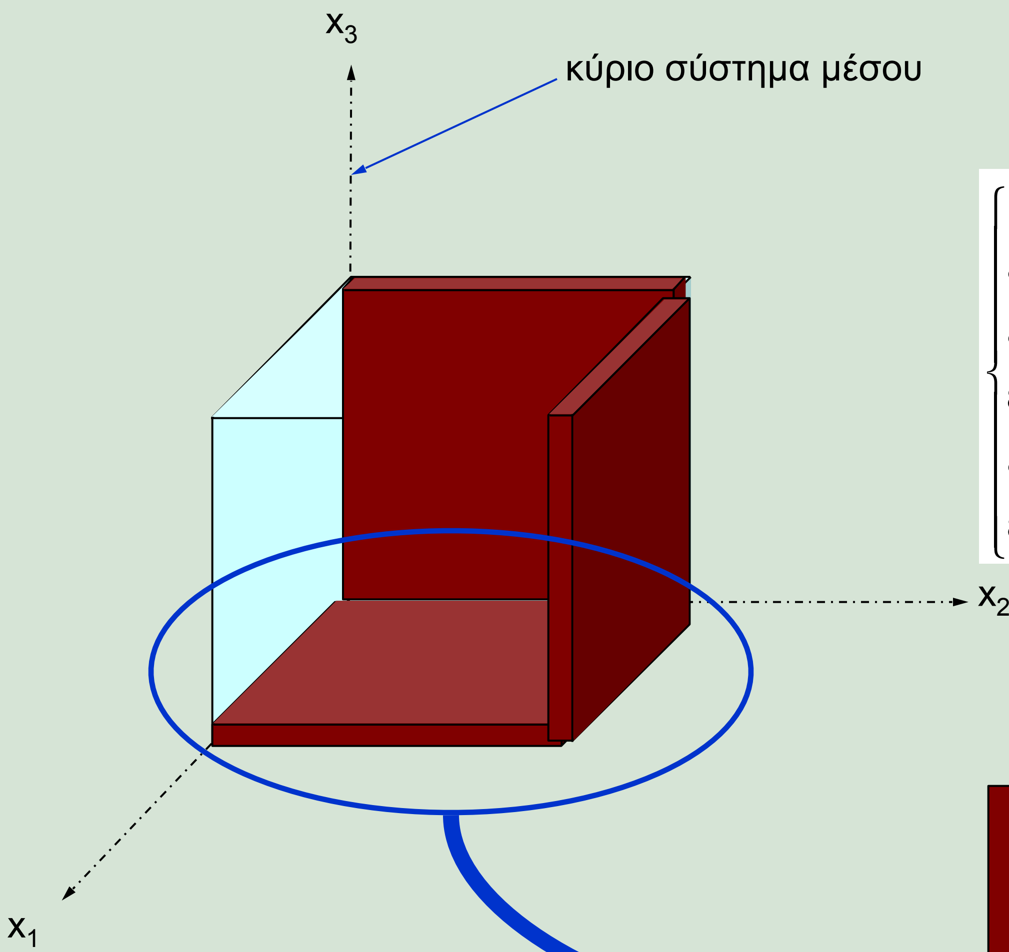
$$\frac{v_{ij}}{E_i} = \frac{v_{ji}}{E_j} , \qquad i, j = 1,\ldots,3$$

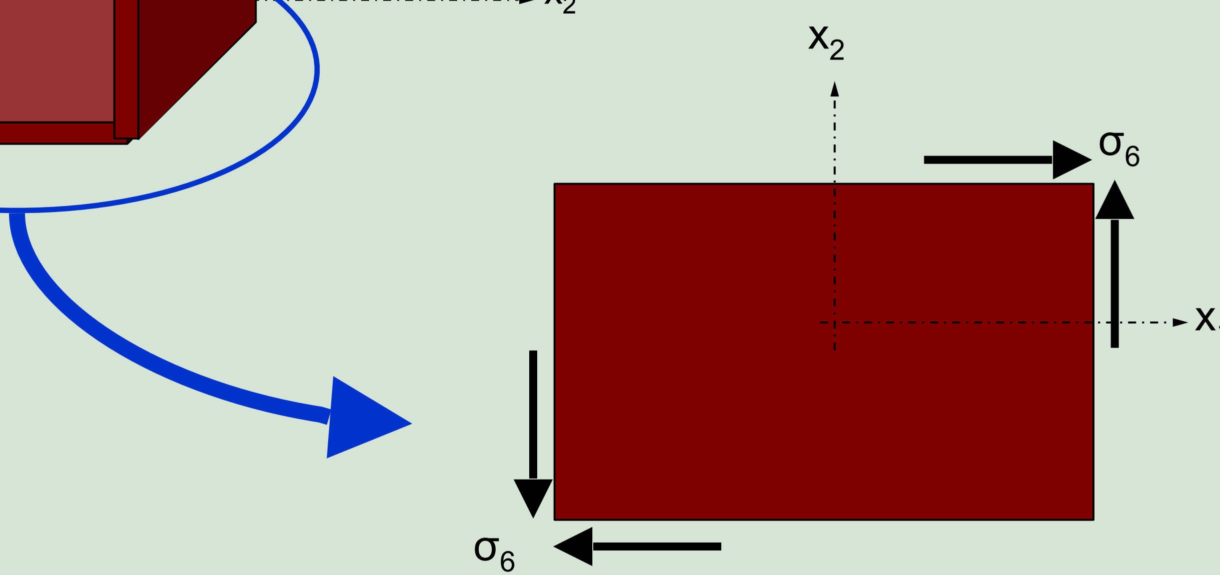
Για τις υπόλοιπες συνιστώσες του μητρώου ενδόσεως:

$$S_{66} = \frac{1}{G_{12}}$$

$$\varepsilon_6 = S_{66}\sigma_6$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}$$





Τελικά: Τεχνικές ελαστικές σταθερές ορθοτρόπου μέσου

$$
\left[S_{ij}\right]=\begin{bmatrix}
\frac{1}{E_1} & \frac{-v_{21}}{E_2} & \frac{-v_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\
\frac{-v_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & \frac{-v_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\
\frac{-v_{13}}{E_1} & \frac{-v_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}}
\end{bmatrix}
$$

- E_i: Μέτρο ελαστικότητος (Young modulus or tensile elastic modulus)
- G_{ij}: Ελαστικό μέτρο διάτμησης (Shear modulus)
- v_{ij}: Λόγος Poisson (Poisson ratio)

Σχέσεις μεταξύ των 3 διαφορετικών συνόλων ελαστικών σταθερών

$$C_{11} = \left(S_{22}S_{33} - S_{23}^2\right)S^{-1}$$
$$C_{22} = \left(S_{33}S_{11} - S_{13}^2\right)S^{-1}$$
$$C_{33} = \left(S_{22}S_{11} - S_{12}^2\right)S^{-1}$$
$$C_{44} = S_{44}^{-1}$$
$$C_{55} = S_{55}^{-1}$$
$$C_{66} = S_{66}^{-1}$$
$$C_{12} = \left(S_{13}S_{23} - S_{12}S_{33}\right)S^{-1}$$
$$C_{13} = \left(S_{12}S_{23} - S_{13}S_{22}\right)S^{-1}$$
$$C_{23} = \left(S_{12}S_{13} - S_{23}S_{11}\right)S^{-1}$$

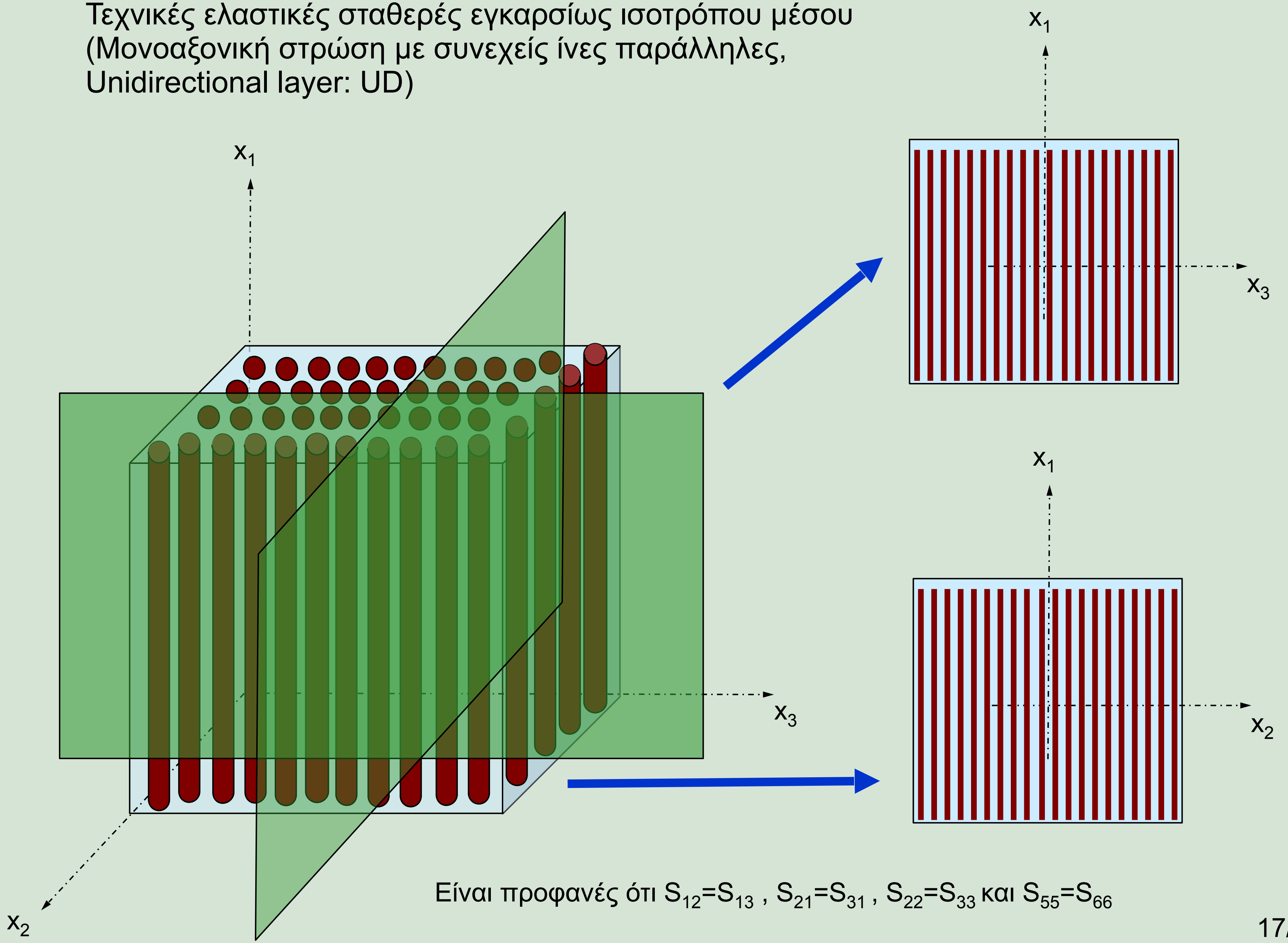
όπου:
$$S = S_{11}S_{22}S_{33} - S_{11}S_{23}^2 - S_{22}S_{13}^2 - S_{33}S_{12}^2 + 2S_{12}S_{23}S_{13}$$

S↔C π.χ. $S_{11} = \left(C_{22}C_{33} - C_{23}^2\right)C^{-1}$

$$C_{11} = \frac{1-\nu_{23}\nu_{32}}{E_2E_3\Delta}$$
$$C_{12} = \frac{\nu_{21}+\nu_{31}\nu_{23}}{E_2E_3\Delta} = \frac{\nu_{12}+\nu_{32}\nu_{13}}{E_1E_3\Delta}$$
$$C_{13} = \frac{\nu_{31}+\nu_{21}\nu_{32}}{E_2E_3\Delta} = \frac{\nu_{13}+\nu_{12}\nu_{23}}{E_1E_2\Delta}$$
$$C_{22} = \frac{1-\nu_{13}\nu_{31}}{E_1E_3\Delta}$$
$$C_{23} = \frac{\nu_{32}+\nu_{12}\nu_{31}}{E_1E_3\Delta} = \frac{\nu_{23}+\nu_{21}\nu_{13}}{E_1E_2\Delta}$$
$$C_{33} = \frac{1-\nu_{12}\nu_{21}}{E_1E_2\Delta}$$
$$C_{44} = G_{23}$$
$$C_{55} = G_{13}$$
$$C_{66} = G_{12}$$

όπου:
$$\Delta = \frac{1-\nu_{12}\nu_{21}-\nu_{23}\nu_{32}-\nu_{13}\nu_{31}-2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_1E_2E_3}$$

Τεχνικές ελαστικές σταθερές εγκαρσίως ισοτρόπου μέσου
(Μονοαξονική στρώση με συνεχείς ίνες παράλληλες,
Unidirectional layer: UD)



Είναι προφανές ότι $S_{12}=S_{13}$, $S_{21}=S_{31}$, $S_{22}=S_{33}$ και $S_{55}=S_{66}$

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{23} & S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(S_{22}-S_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-v_{21}}{E_2} & \frac{-v_{21}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-v_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & \frac{-v_{32}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-v_{12}}{E_1} & \frac{-v_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+v_{23})}{E_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}$$

Αρα, για μία UD στρώση χρειάζεται να προσδιορισθούν 5 τεχνικές ελαστικές σταθ.:

- E_1: Tensile modulus in the fiber direction
- E_2: Tensile modulus in the transverse dir.
- G_{12}: Shear modulus
- v_{12}: Major Poisson ratio (v_{21}: Minor Poisson ratio)
- v_{23}: Transverse Poisson ratio

ή

- G_{23}: Transverse shear modulus

Εναλλακτικοί συμβολισμοί: E_L, E_T, G_{LT}, v_{LT}, v_{TT}

$E_{\parallel}$, $E_{\perp}$, $G_{\parallel\perp}$, $v_{\parallel\perp}$, $v_{\perp\perp}$ και $G_{\perp\perp}$

Ορια των τιμών των τεχνικών ελαστικών σταθερών

Συνάρτηση ελαστικού δυναμικού ή πυκνότης ενεργείας παραμορφώσεων (strain energy density): πρέπει να είναι ΠΑΝΤΑ θετική $\forall \boldsymbol{\sigma} \neq 0$

$$W = \frac{1}{2} S_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}$$

$$S_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} > 0$$

Θα πρέπει ο συμμετρικός τανυστής 4ης τάξεως **S** να είναι *<u>θετικά ορισμένος</u>*, (το ίδιο και ο **C**), και άρα *<u>οι χαρακτηριστικές τιμές ή ιδιοτιμές των ανωτέρω τανυστών</u>* να είναι μεγαλύτερες του μηδενός.
Η αντίστοιχη συνθήκη για τα μητρώα ενδόσεως ή δυσκαμψίας είναι ότι αυτά πρέπει να έχουν *<u>θετικές κύριες τιμές (συνιστώσες) ή θετικές αναλλοιώτους</u>*.

Εναλλακτικά:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$W = \frac{1}{2}\sigma_i\varepsilon_i = \frac{1}{2} S_{11}\sigma_1^2$$

$$S_{11} > 0$$

Επομένως: $S_{11}, S_{22}, S_{33}, S_{44}, S_{55}, S_{66} > 0$ ή: $E_1, E_2, E_3, G_{23}, G_{13}, G_{12} > 0$

Με το ίδιο σκεπτικό:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\\sigma_2\\\sigma_3\\\sigma_4\\\sigma_5\\\sigma_6\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0\\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0\\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_1\\0\\0\\0\\0\\0\end{Bmatrix}$$

$$W = \frac{1}{2}\sigma_i\varepsilon_i = \frac{1}{2}C_{11}\varepsilon_1^2$$

$$C_{11} > 0$$

Επομένως: $C_{11}, C_{22}, C_{33}, C_{44}, C_{55}, C_{66} > 0$ ή: $(1 - v_{23}v_{32}),\ (1 - v_{13}v_{31}),\ (1 - v_{12}v_{21}) > 0$

$$\Delta = 1 - v_{12}v_{21} - v_{32}v_{23} - v_{31}v_{13} - 2v_{12}v_{23}v_{31} > 0$$

Λόγω των σχέσεων συμμετρίας: $\dfrac{v_{ij}}{E_i} = \dfrac{v_{ji}}{E_j}, \qquad i, j = 1, \ldots, 3$

$$|v_{ij}| < \left(\frac{E_i}{E_j}\right)^{1/2}$$

$$v_{12}v_{23}v_{31} < \frac{1}{2}\left[1 - v_{12}^2\left(\frac{E_2}{E_1}\right) - v_{23}^2\left(\frac{E_3}{E_2}\right) - v_{31}^2\left(\frac{E_1}{E_3}\right)\right] < \frac{1}{2}$$

Γιά το εγκαρσίως ισότροπο μέσο οι προηγούμενες σχέσεις απλοποιούνται στις:

$$|v_{23}| < 1$$

$$|v_{12}| < \left(\frac{E_1(1 - v_{23})}{2E_2}\right)^{1/2}$$

Γιά το ισότροπο μέσο:

$$E > 0$$

$$G = \frac{E}{2(1 + v)} > 0$$

$$K = \frac{E}{3(1 - 2v)} > 0$$

$$\rightarrow -1 < v < 1/2$$

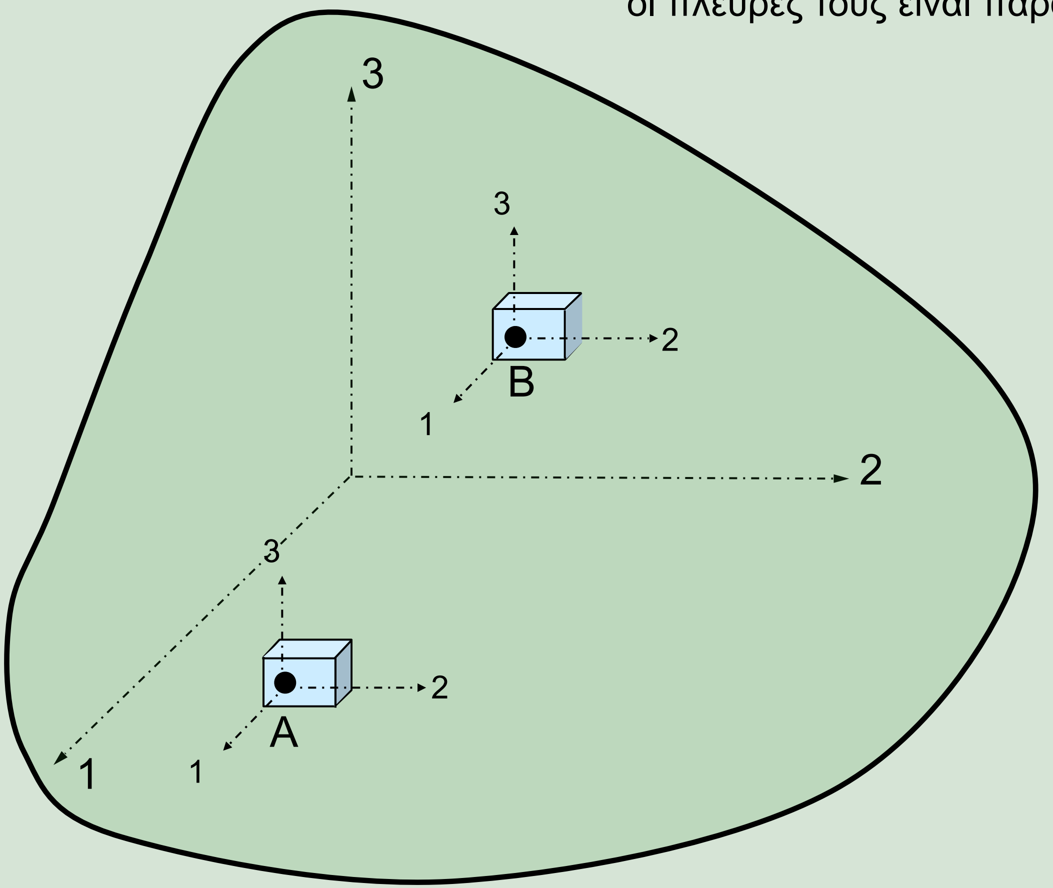
Υπάρχει διαφορά στην ελαστική συμπεριφορά μεταξύ του εγκάρσιου επιπέδου εγκαρσίως ισοτρόπου μέσου και ισοτρόπου υλικού αντιστοίχως

Τυπικές τιμές τεχνικών ελαστικών σταθερών ινωδών συνθέτων υλικών

Εμπορική ονομασία	Υλικό	E_1 [GPa]	E_2 [GPa]	G_{12} [GPa]	ν_{12}	v_f
T300/5208	Gr/Ep	181	10.3	7.17	0.28	0.70
B(4)/5505	B/Ep	204	18.5	5.59	0.23	0.50
AS/3501	Gr/Ep	138	8.96	7.1	0.30	0.66
Scotchply 1002 (3M)	Gl/Ep	38.6	8.27	4.14	0.26	0.45
Kevlar 49	Ar/Ep	76	5.5	2.3	0.34	0.60
OPTIMAT UD	Gl/Ep	39.01	15.15	5.83	0.29	0.52
SISTEMA ±45	Gr/Ep	5.542	5.542	12.887	0.810	0.55
GEO UD	GRP	25.12	8.576	2.284	0.215	0.40

Ευθύγραμμη & Καμπυλόγραμμη ανισοτροπία

Ομογενές ανισότροπο ελαστικό μέσο είναι αυτό γιά το οποίο απειροστά στοιχεία του μέσου, στην μορφή ορθογωνίων παραλληλεπιπέδων έχουν τις ίδιες ελαστικές ιδιότητες όταν οι πλευρές τους είναι παράλληλες.

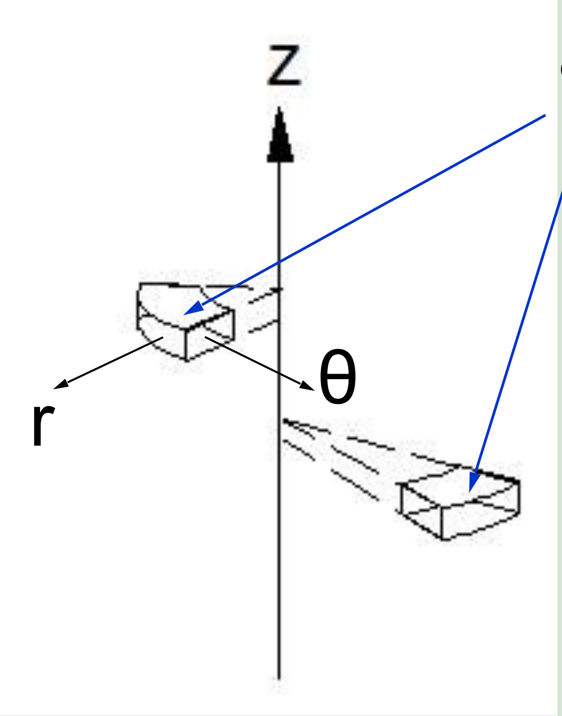


Αυτά τα ανισότροπα μέσα ονομάζονται **"<u>ευθυγράμμως ανισότροπα</u>"** (**rectilinearly anisotropic**).

Κατ' αντιστοιχίαν, όταν οι ισοδύναμες ελαστικές διευθύνσεις δεν προσδιορίζονται γραμμικά αλλά ακολουθούν κάποιο άλλο νόμο, όπως τυχόν σύστημα καμπυλογράμμων συντεταγμένων, ορίζουμε τα ανισότροπα ομογενή σώματα με **"καμπυλόγραμμη ανισοτροπία"** (**curvilinearly anisotropic)**

Ο περισσότερο συναντώμενος τύπος τέτοιου είδους είναι η **κυλινδρική ανισοτροπία** κατά την οποία ορίζεται ευθεία (άξων ανισοτροπίας), με τις εξής ιδιότητες:

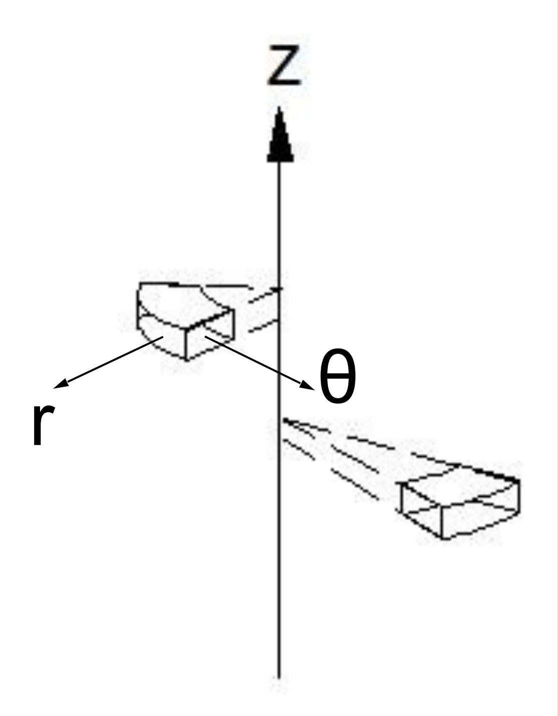
•όλες οι διευθύνσεις που τέμνουν κάθετα τον άξονα z είναι ελαστικά ισοδύναμες
•όλες οι διευθύνσεις παράλληλες στον z είναι ελαστικά ισοδύναμες
•όλες οι διευθύνσεις κάθετες σε επίπεδα που περιέχουν τον άξονα z είναι ελαστικά ισοδύναμες



Ισοδύναμα ελαστικά διαφορικά στοιχεία σε κυλινδρικώς ανισότροπο μέσο

Οταν σε κάθε σημείο του μέσου ορίζονται τρία, κάθετα μεταξύ τους, επίπεδα συμμετρίας εκ των οποίων ένα περνά από τον άξονα ανισοτροπίας z, το δεύτερο είναι κάθετο σε αυτόν ενώ το τρίτο είναι προφανώς ορθογώνιο προς τα δύο προηγούμενα, τότε το μέσο καλείται **κυλινδρικώς ορθότροπο**.

Γενικευμένος νόμος του Hooke γιά **κυλινδρικώς ορθότροπο** μέσο



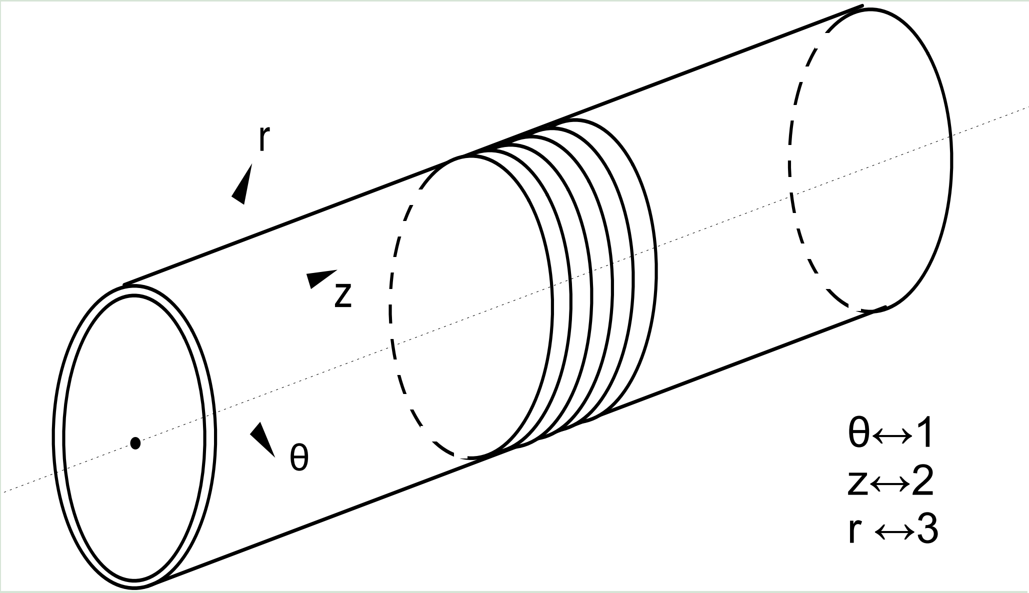
$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{\theta z} \\ \gamma_{rz} \\ \gamma_{r\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{rr} & S_{r\theta} & S_{rz} & 0 & 0 & 0 \\ S_{\theta r} & S_{\theta\theta} & S_{\theta z} & 0 & 0 & 0 \\ S_{zr} & S_{z\theta} & S_{zz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{\theta - z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{r-z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{r-\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{\theta z} \\ \tau_{rz} \\ \tau_{r\theta} \end{Bmatrix}$$

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E_r}\sigma_r - \frac{v_{\theta r}}{E_\theta}\sigma_\theta - \frac{v_{zr}}{E_z}\sigma_z \qquad \gamma_{\theta z} = \frac{1}{G_{\theta z}}\tau_{\theta z}$$

$$\varepsilon_\theta = -\frac{v_{r\theta}}{E_r}\sigma_r + \frac{1}{E_\theta}\sigma_\theta - \frac{v_{z\theta}}{E_z}\sigma_z \qquad \gamma_{rz} = \frac{1}{G_{rz}}\tau_{rz}$$

$$\varepsilon_z = -\frac{v_{rz}}{E_r}\sigma_r - \frac{v_{\theta z}}{E_\theta}\sigma_\theta + \frac{1}{E_z}\sigma_z \qquad \gamma_{r\theta} = \frac{1}{G_{r\theta}}\tau_{r\theta}$$

Τυπικό παράδειγμα κυλινδρικώς ορθοτρόπου (εγκαρσίως ισοτρόπου) μέσου:
Λεπτότοιχος κύλινδρος παραγόμενος με τεχνική περιελίξεως ινών



θ↔1
z↔2
r ↔3

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E_r}\sigma_r - \frac{\nu_{\theta r}}{E_\theta}\sigma_\theta - \frac{\nu_{zr}}{E_z}\sigma_z \qquad \gamma_{\theta z} = \frac{1}{G_{\theta z}}\tau_{\theta z}$$

$$\varepsilon_\theta = -\frac{\nu_{r\theta}}{E_r}\sigma_r + \frac{1}{E_\theta}\sigma_\theta - \frac{\nu_{z\theta}}{E_z}\sigma_z \qquad \gamma_{rz} = \frac{1}{G_{rz}}\tau_{rz}$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu_{rz}}{E_r}\sigma_r - \frac{\nu_{\theta z}}{E_\theta}\sigma_\theta + \frac{1}{E_z}\sigma_z \qquad \gamma_{r\theta} = \frac{1}{G_{r\theta}}\tau_{r\theta}$$

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E_2}\sigma_r - \frac{\nu_{12}}{E_1}\sigma_\theta - \frac{\nu_{23}}{E_2}\sigma_z \qquad \gamma_{\theta z} = \frac{1}{G_{12}}\tau_{\theta z}$$

$$\varepsilon_\theta = -\frac{\nu_{21}}{E_2}\sigma_r + \frac{1}{E_1}\sigma_\theta - \frac{\nu_{21}}{E_2}\sigma_z \qquad \gamma_{rz} = \frac{1}{G_{23}}\tau_{rz}$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu_{23}}{E_2}\sigma_r - \frac{\nu_{12}}{E_1}\sigma_\theta + \frac{1}{E_2}\sigma_z \qquad \gamma_{r\theta} = \frac{1}{G_{12}}\tau_{r\theta}$$

$$G_{23} = \frac{E_2}{2(1+\nu_{23})}$$