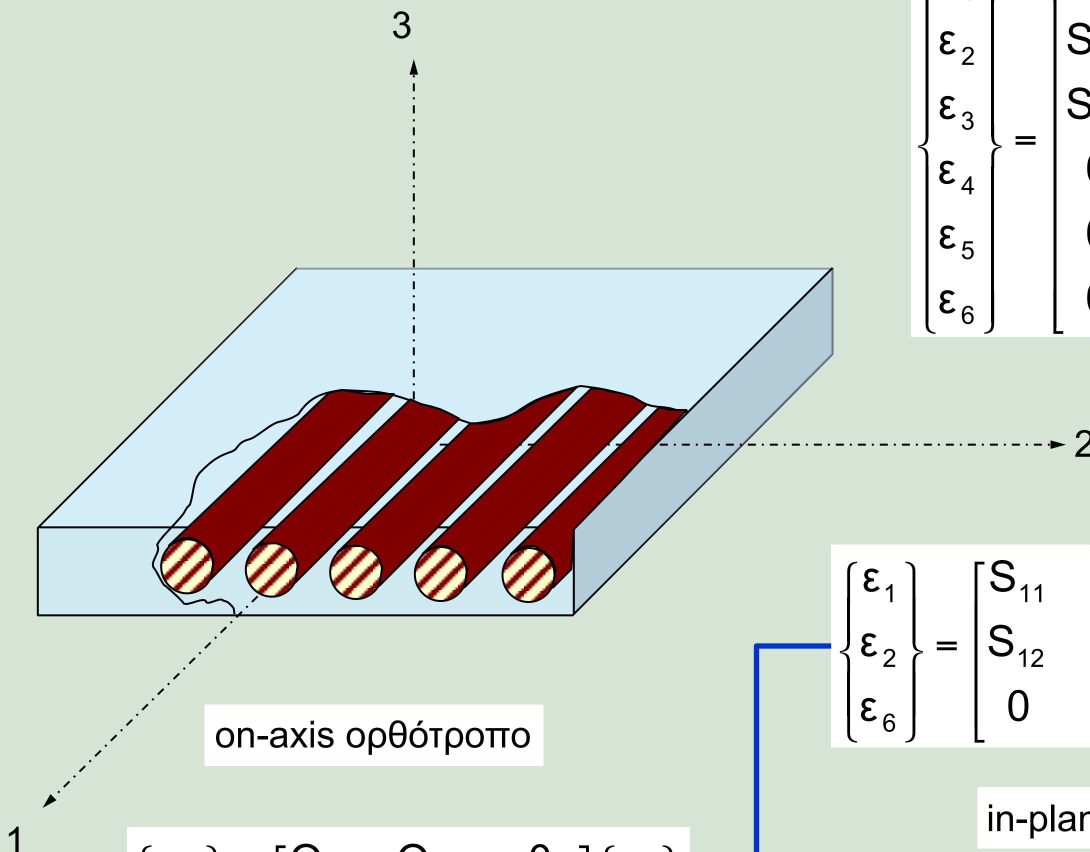
Ειδικά Θέματα Μηχανικής

(Μηχανική Σύνθετων Υλικών)

Κεφάλαιο 2 (2.2)

Λεπτή στρώση ορθοτρόπου υλικού: $\boxed{\text{επίπεδη ένταση}}$ $\quad \sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_5 = 0$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}$$



on-axis ορθότροπο

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}$$

in-plane

$$\varepsilon_3 = S_{31}\sigma_1 + S_{32}\sigma_2$$
$$\varepsilon_4 = \varepsilon_5 = 0$$

out-of-plane

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix}$$

$$Q_{11} = E_1 Q^{-1},\ Q_{22} = E_2 Q^{-1},\ Q_{12} = v_{12} E_2 Q^{-1} = v_{21} E_1 Q^{-1}$$
$$Q_{66} = G_{12},\ Q = 1 - v_{12} v_{21}$$

Q: Μητρώο ανηγμένης δυσκαμψίας (reduced stiffness)

$$Q_{11} = S_{22} D^{-1},\ Q_{22} = S_{11} D^{-1},\ Q_{12} = -S_{12} D^{-1}$$
$$Q_{66} = S_{66}^{-1},\ D = S_{11} S_{22} - S_{12}^2$$

Λεπτή στρώση ορθοτρόπου υλικού: επίπεδη ένταση

διαφορετική προσέγγιση...!

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ 0\\ 0\\ 0\\ \sigma_6\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0\\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0\\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\\ \varepsilon_4\\ \varepsilon_5\\ \varepsilon_6\end{Bmatrix}$$

$$\sigma_3=\sigma_4=\sigma_5=0$$

$$\sigma_1=C_{11}\varepsilon_1+C_{12}\varepsilon_2+C_{13}\varepsilon_3$$
$$\sigma_2=C_{12}\varepsilon_1+C_{22}\varepsilon_2+C_{23}\varepsilon_3$$
$$\sigma_6=C_{66}\varepsilon_6$$

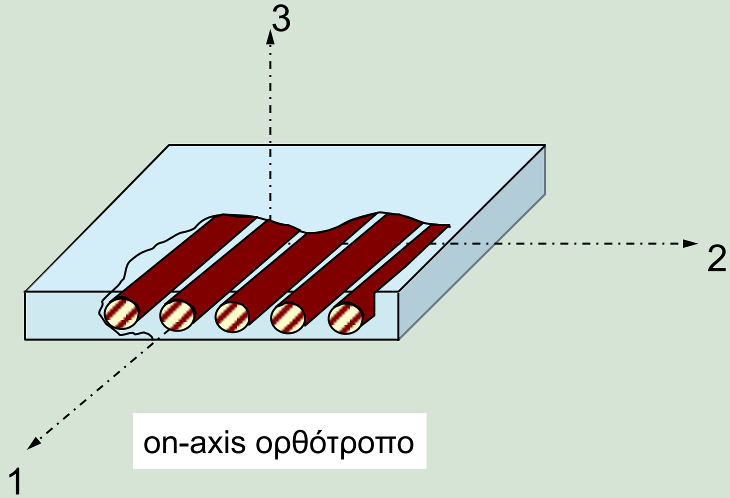
$$\varepsilon_3=-\frac{C_{13}}{C_{33}}\varepsilon_1-\frac{C_{23}}{C_{33}}\varepsilon_2$$

$$\sigma_1=\left(C_{11}-\frac{C_{13}^2}{C_{33}}\right)\varepsilon_1+\left(C_{12}-\frac{C_{13}C_{23}}{C_{33}}\right)\varepsilon_2$$
$$\sigma_2=\left(C_{12}-\frac{C_{13}C_{23}}{C_{33}}\right)\varepsilon_1+\left(C_{22}-\frac{C_{23}^2}{C_{33}}\right)\varepsilon_2$$
$$\sigma_6=C_{66}\varepsilon_6$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_6\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q_{11} & Q_{12} & 0\\ Q_{12} & Q_{22} & 0\\ 0 & 0 & Q_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_6\end{Bmatrix}$$

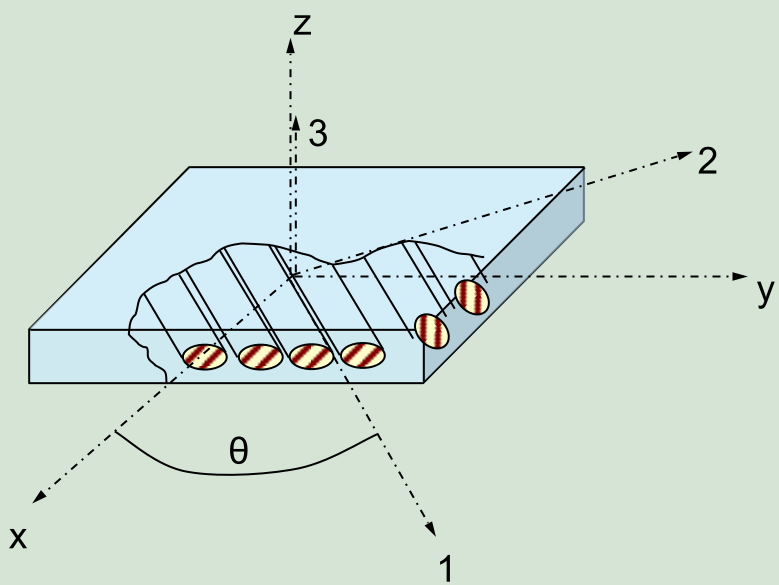
$$\boxed{\begin{aligned}Q_{11}&=\left(C_{11}-\frac{C_{13}^2}{C_{33}}\right) & Q_{12}&=\left(C_{12}-\frac{C_{13}C_{23}}{C_{33}}\right)\\ Q_{22}&=\left(C_{22}-\frac{C_{23}^2}{C_{33}}\right) & Q_{66}&=C_{66}\end{aligned}}$$

Λεπτή στρώση ορθοτρόπου υλικού: επίπεδη ένταση



$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}$$

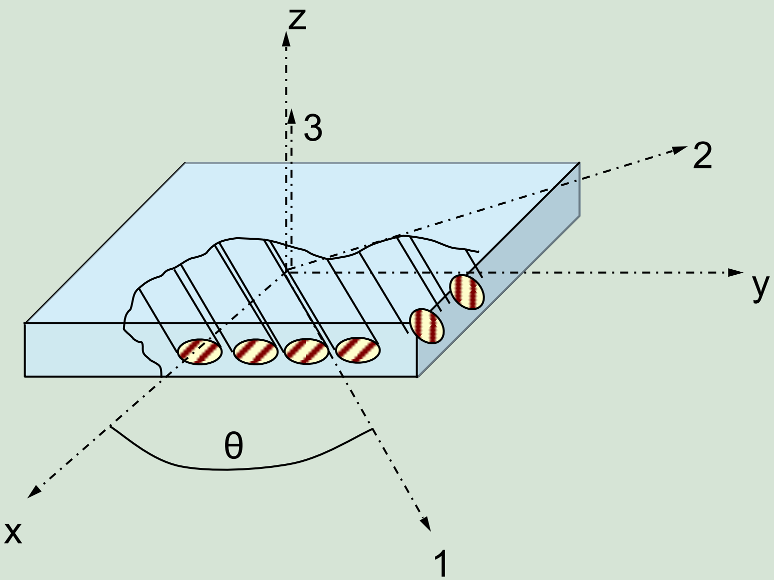
$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix}$$



$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xs} \\ S_{yx} & S_{yy} & S_{ys} \\ S_{sx} & S_{sy} & S_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_s \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_s \end{Bmatrix}$$

Γενικώς ορθότροπη στρώση

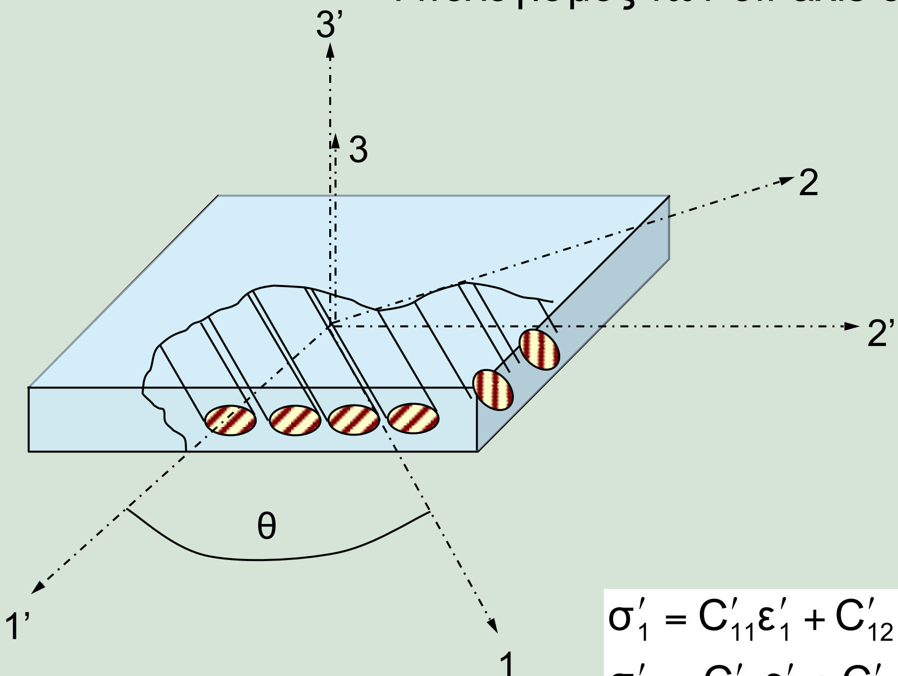


$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xs} \\ S_{yx} & S_{yy} & S_{ys} \\ S_{sx} & S_{sy} & S_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_s \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_s \end{Bmatrix}$$

$$S'_{11} = S_{11}m^4 + m^2n^2(2S_{12} + S_{66}) + S_{22}n^4$$
$$S'_{12} = m^2n^2(S_{11} + S_{22} - S_{66}) + S_{12}(m^4 + n^4)$$
$$S'_{13} = S_{13}m^2 + S_{23}n^2$$
$$S'_{16} = mn\left[2S_{11}m^2 - 2S_{22}n^2 - (2S_{12} + S_{66})(m^2 - n^2)\right]$$
$$S'_{22} = S_{11}n^4 + m^2n^2(2S_{12} + S_{66}) + S_{22}m^4$$
$$S'_{23} = S_{13}n^2 + S_{23}m^2$$
$$S'_{26} = mn\left[2S_{11}n^2 - 2S_{22}m^2 + (2S_{12} + S_{66})(m^2 - n^2)\right]$$
$$S'_{33} = S_{33}$$
$$S'_{36} = 2(S_{13} - S_{23})mn$$
$$S'_{44} = S_{44}m^2 + S_{55}n^2$$
$$S'_{45} = (S_{55} - S_{44})mn$$
$$S'_{55} = S_{44}n^2 + S_{55}m^2$$
$$S'_{66} = 2(2S_{11} + 2S_{22} - 4S_{12})m^2n^2 + S_{66}(m^2 - n^2)^2$$
$$S'_{14} = S'_{15} = S'_{24} = S'_{25} = S'_{34} = S'_{35} = S'_{46} = S'_{56} = 0$$

$$S_{xx} = S_{11}m^4 + m^2n^2(2S_{12} + S_{66}) + S_{22}n^4$$
$$S_{xy} = m^2n^2(S_{11} + S_{22} - S_{66}) + S_{12}(m^4 + n^4)$$
$$S_{xs} = mn\left[2S_{11}m^2 - 2S_{22}n^2 - (2S_{12} + S_{66})(m^2 - n^2)\right]$$
$$S_{yy} = S_{11}n^4 + m^2n^2(2S_{12} + S_{66}) + S_{22}m^4$$
$$S_{ys} = mn\left[2S_{11}n^2 - 2S_{22}m^2 + (2S_{12} + S_{66})(m^2 - n^2)\right]$$
$$S_{ss} = 2(2S_{11} + 2S_{22} - 4S_{12})m^2n^2 + S_{66}(m^2 - n^2)^2$$

Υπολογισμός των off-axis συνιστωσών του μητρώου **Q**



$$\begin{Bmatrix}\sigma'_1\\ \sigma'_2\\ \sigma'_3\\ \sigma'_4\\ \sigma'_5\\ \sigma'_6\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & 0 & 0 & C'_{16}\\ C'_{12} & C'_{22} & C'_{23} & 0 & 0 & C'_{26}\\ C'_{13} & C'_{23} & C'_{33} & 0 & 0 & C'_{36}\\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & C'_{45} & 0\\ 0 & 0 & 0 & C'_{45} & C'_{55} & 0\\ C'_{16} & C'_{26} & C'_{36} & 0 & 0 & C'_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon'_1\\ \varepsilon'_2\\ \varepsilon'_3\\ \varepsilon'_4\\ \varepsilon'_5\\ \varepsilon'_6\end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\sigma'_1 &= C'_{11}\varepsilon'_1 + C'_{12}\varepsilon'_2 + C'_{13}\varepsilon'_3 + C'_{16}\varepsilon'_6\\ \sigma'_2 &= C'_{21}\varepsilon'_1 + C'_{22}\varepsilon'_2 + C'_{23}\varepsilon'_3 + C'_{26}\varepsilon'_6\\ \sigma'_6 &= C'_{61}\varepsilon'_1 + C'_{62}\varepsilon'_2 + C'_{63}\varepsilon'_3 + C'_{66}\varepsilon'_6\end{aligned}$$

$$\varepsilon'_3 = -\frac{C'_{13}}{C'_{33}}\varepsilon'_1 - \frac{C'_{23}}{C'_{33}}\varepsilon'_2 - \frac{C'_{36}}{C'_{33}}\varepsilon'_6$$

π.χ.

$$\sigma'_1 = \underbrace{\left(C'_{11} - \frac{C'^2_{13}}{C'_{33}}\right)}_{Q_{xx}}\varepsilon'_1 + \underbrace{\left(C'_{12} - \frac{C'_{13}C'_{23}}{C'_{33}}\right)}_{Q_{xy}}\varepsilon'_2 + \underbrace{\left(C'_{16} - \frac{C'_{36}C'_{13}}{C'_{33}}\right)}_{Q_{xs}}\varepsilon'_6 \longleftrightarrow \begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_s\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs}\\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{ys}\\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_s\end{Bmatrix}$$

Ετσι π.χ. γιά την συνιστώσα Q_{xs}:

$$Q_{xs}=\left(C'_{16}-\frac{C'_{36}C'_{13}}{C'_{33}}\right)$$

$$C'_{11}=C_{11}m^4+2m^2n^2\left(C_{12}+2C_{66}\right)+C_{22}n^4$$
$$C'_{12}=m^2n^2\left(C_{11}+C_{22}-4C_{66}\right)+C_{12}\left(m^4+n^4\right)$$
$$\boxed{\begin{aligned}C'_{13}&=C_{13}m^2+C_{23}n^2\\ C'_{16}&=mn\left[C_{11}m^2-C_{22}n^2-\left(C_{12}+2C_{66}\right)\left(m^2-n^2\right)\right]\end{aligned}}$$
$$C'_{22}=C_{11}n^4+2m^2n^2\left(C_{12}+2C_{66}\right)+C_{22}m^4$$
$$C'_{23}=C_{13}n^2+C_{23}m^2$$
$$C'_{26}=mn\left[C_{11}n^2-C_{22}m^2+\left(C_{12}+2C_{66}\right)\left(m^2-n^2\right)\right]$$
$$\boxed{\begin{aligned}C'_{33}&=C_{33}\\ C'_{36}&=\left(C_{13}-C_{23}\right)mn\end{aligned}}$$
$$C'_{44}=C_{44}m^2+C_{55}n^2$$
$$C'_{45}=\left(C_{55}-C_{44}\right)mn$$
$$C'_{55}=C_{44}n^2+C_{55}m^2$$
$$C'_{66}=\left(C_{11}+C_{22}-2C_{12}\right)m^2n^2+C_{66}\left(m^2-n^2\right)^2$$
$$C'_{14}=C'_{15}=C'_{24}=C'_{25}=C'_{34}=C'_{35}=C'_{46}=C'_{56}=0$$

$$Q_{11}=\left(C_{11}-\frac{C_{13}^2}{C_{33}}\right)\quad Q_{12}=\left(C_{12}-\frac{C_{13}C_{23}}{C_{33}}\right)$$
$$Q_{22}=\left(C_{22}-\frac{C_{23}^2}{C_{33}}\right)\quad Q_{66}=C_{66}$$

$$Q_{xx}=Q_{11}m^4+2\left(Q_{12}+2Q_{66}\right)m^2n^2+Q_{22}n^4$$
$$Q_{xy}=\left(Q_{11}+Q_{22}-4Q_{66}\right)m^2n^2+Q_{12}\left(m^4+n^4\right)$$
$$Q_{yy}=Q_{11}n^4+2\left(Q_{12}+2Q_{66}\right)m^2n^2+Q_{22}m^4$$
$$Q_{xs}=\left(Q_{11}-Q_{12}-2Q_{66}\right)nm^3+\left(Q_{12}-Q_{22}+2Q_{66}\right)n^3m$$
$$Q_{ys}=\left(Q_{11}-Q_{12}-2Q_{66}\right)mn^3+\left(Q_{12}-Q_{22}+2Q_{66}\right)m^3n$$
$$Q_{ss}=\left(Q_{11}+Q_{22}-2Q_{12}-2Q_{66}\right)n^2m^2+Q_{66}\left(n^4+m^4\right)$$

Τεχνικές ελαστικές σταθερές γενικώς ορθοτρόπου στρώσεως

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xs} \\ S_{yx} & S_{yy} & S_{ys} \\ S_{sx} & S_{sy} & S_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_s \end{Bmatrix} \longrightarrow [S_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & \frac{-\nu_{yx}}{E_y} & \frac{\eta_{sx}}{G_{xy}} \\ \frac{-\nu_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & \boxed{\frac{\eta_{sy}}{G_{xy}}} \\ \frac{\eta_{xs}}{E_x} & \boxed{\frac{\eta_{ys}}{E_y}} & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix}$$

η_{is}, η_{si}, i=x,y: συντελεστές διατμητικής αλληλεπιδράσεως (Chentsov coefficients)

$\eta_{si} = \dfrac{\varepsilon_i}{\varepsilon_s}$: εκφράζει τον λόγο της ορθής παραμορφώσεως στην i-διεύθυνση, που προκαλείται από διατμητική τάση σ_s, προς την αντίστοιχη διατμητική

$\eta_{is} = \dfrac{\varepsilon_s}{\varepsilon_i}$: είναι ο λόγος διατμητικής παραμορφώσεως προς ορθή παραμόρφωση λόγω ορθής τάσεως στην i-διεύθυνση

Σχέσεις μετασχηματισμού τεχνικών ελαστικών σταθερών συναρτήσει της off-axis γωνίας

$$\frac{1}{E_x} = \frac{m^4}{E_1} + \left(\frac{1}{G_{12}} - \frac{2v_{12}}{E_1}\right)m^2n^2 + \frac{n^4}{E_2}$$

$$v_{xy} = E_x\left[\frac{v_{12}}{E_1}\left(m^4 + n^4\right) - \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} - \frac{1}{G_{12}}\right)m^2n^2\right]$$

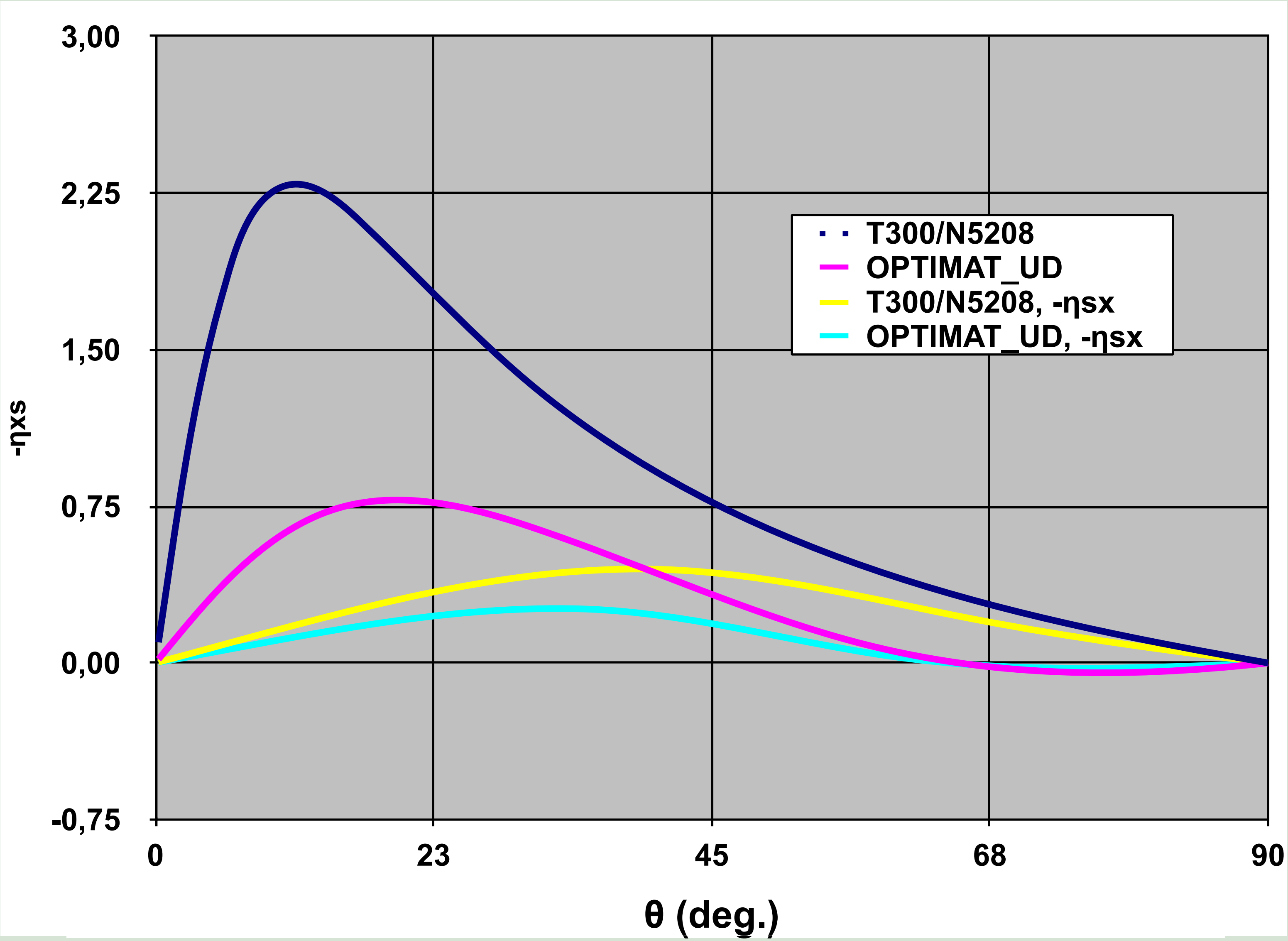
$$\frac{1}{E_y} = \frac{n^4}{E_1} + \left(\frac{1}{G_{12}} - \frac{2v_{12}}{E_1}\right)m^2n^2 + \frac{m^4}{E_2}$$

$$\frac{1}{G_{xy}} = 2\left(\frac{2}{E_1} + \frac{2}{E_2} + \frac{4v_{12}}{E_1} - \frac{1}{G_{12}}\right)m^2n^2 + \frac{1}{G_{12}}\left(m^4 + n^4\right)$$

$$\eta_{xs} = E_x\left[\left(\frac{2}{E_1} + \frac{2v_{12}}{E_1} - \frac{1}{G_{12}}\right)m^3n - \left(\frac{2}{E_2} + \frac{2v_{12}}{E_1} - \frac{1}{G_{12}}\right)n^3m\right]$$

$$\eta_{ys} = E_y\left[\left(\frac{2}{E_1} + \frac{2v_{12}}{E_1} - \frac{1}{G_{12}}\right)n^3m - \left(\frac{2}{E_2} + \frac{2v_{12}}{E_1} - \frac{1}{G_{12}}\right)m^3n\right]$$

Μεταβολή τεχνικών ελαστικών σταθερών συναρτήσει της off-axis γωνίας



Αναλλοίωτες εκφράσεις συνιστωσών μητρώου ανηγμένης δυσκαμψίας

Τριγωνομετρικές ταυτότητες:

$$\cos^4\theta = \frac{1}{8}(3+4\cos 2\theta+\cos 4\theta)$$
$$\sin^4\theta = \frac{1}{8}(3-4\cos 2\theta+\cos 4\theta)$$
$$\cos\theta\sin^3\theta = \frac{1}{8}(2\sin 2\theta-\sin 4\theta)$$
$$\cos^3\theta\sin\theta = \frac{1}{8}(2\sin 2\theta+\sin 4\theta)$$
$$\cos^2\theta\sin^2\theta = \frac{1}{8}(1-\cos 4\theta)$$

$$\begin{aligned}
Q_{xx} &= Q_{11}m^4 + 2(Q_{12}+2Q_{66})m^2n^2 + Q_{22}n^4 \\
Q_{xy} &= (Q_{11}+Q_{22}-4Q_{66})m^2n^2 + Q_{12}(m^4+n^4) \\
Q_{yy} &= Q_{11}n^4 + 2(Q_{12}+2Q_{66})m^2n^2 + Q_{22}m^4 \\
Q_{xs} &= (Q_{11}-Q_{12}-2Q_{66})nm^3 + (Q_{12}-Q_{22}+2Q_{66})n^3m \\
Q_{ys} &= (Q_{11}-Q_{12}-2Q_{66})mn^3 + (Q_{12}-Q_{22}+2Q_{66})m^3n \\
Q_{ss} &= (Q_{11}+Q_{22}-2Q_{12}-2Q_{66})n^2m^2 + Q_{66}(n^4+m^4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{xx} &= U_1 + U_2\cos 2\theta + U_3\cos 4\theta \\
Q_{xy} &= U_4 - U_3\cos 4\theta \\
Q_{yy} &= U_1 - U_2\cos 2\theta + U_3\cos 4\theta \\
Q_{ss} &= U_5 - U_3\cos 4\theta \\
Q_{xs} &= \frac{1}{2}U_2\sin 2\theta + U_3\sin 4\theta \\
Q_{ys} &= \frac{1}{2}U_2\sin 2\theta - U_3\sin 4\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_1 &= \frac{1}{8}(3Q_{11}+3Q_{22}+2Q_{12}+4Q_{66}) \\
U_2 &= \frac{1}{2}(Q_{11}-Q_{22}) \\
U_3 &= \frac{1}{8}(Q_{11}+Q_{22}-2Q_{12}-4Q_{66}) \\
U_4 &= \frac{1}{8}(Q_{11}+Q_{22}+6Q_{12}-4Q_{66}) \\
U_5 &= \frac{1}{8}(Q_{11}+Q_{22}-2Q_{12}+4Q_{66})
\end{aligned}$$

$$U_5 = \frac{1}{2}(U_1-U_4)$$

U_1, U_4 και U_5 αναλλοίωτες εκφράσεις

$$
\begin{aligned}
Q_{xx} &= U_1 + U_2\cos 2\theta + U_3\cos 4\theta \\
Q_{xy} &= U_4 - U_3\cos 4\theta \\
Q_{yy} &= U_1 - U_2\cos 2\theta + U_3\cos 4\theta \\
Q_{ss} &= U_5 - U_3\cos 4\theta \\
Q_{xs} &= \frac{1}{2}U_2\sin 2\theta + U_3\sin 4\theta \\
Q_{ys} &= \frac{1}{2}U_2\sin 2\theta - U_3\sin 4\theta
\end{aligned}
$$

Εστω η ποσότητα: $U_1' = \frac{1}{8}\left(3Q_{xx} + 3Q_{yy} + 2Q_{xy} + 4Q_{ss}\right)$

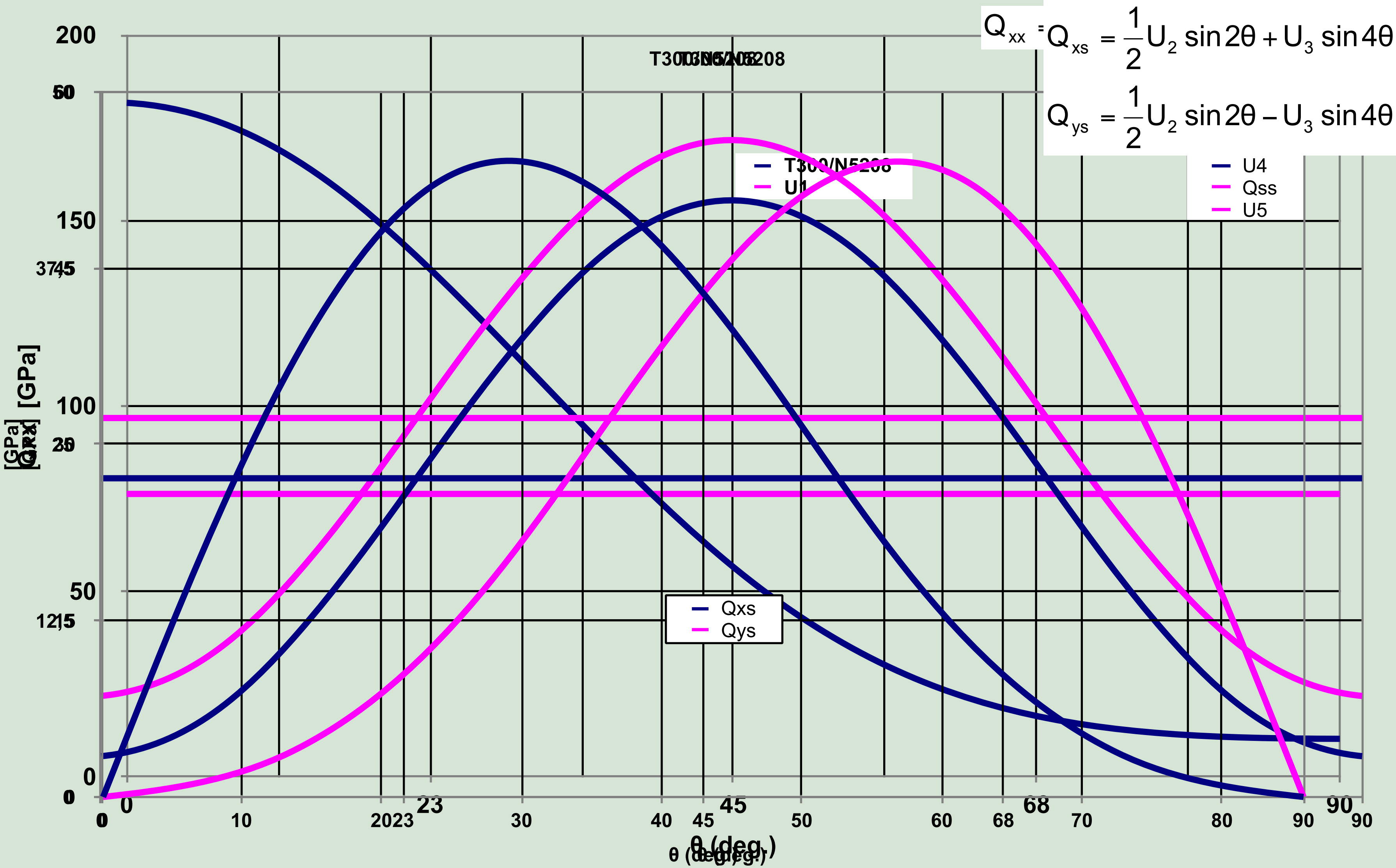
$$U_1' = \frac{1}{8}\left(3Q_{11} + 3Q_{22} + 2Q_{12} + 4Q_{66}\right) \equiv U_1$$

$$3Q_{11} + 3Q_{22} + 2Q_{12} + 4Q_{66} = 3Q_{xx} + 3Q_{yy} + 2Q_{xy} + 4Q_{ss}$$

Η U_1 μέση τιμή του Q_{xx}: $U_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} Q_{xx}\,d\theta = \frac{2}{\pi}\left\{U_1[\theta]_0^{\pi/2} + \frac{1}{2}U_2[\sin 2\theta]_0^{\pi/2} + \frac{1}{4}U_3[\sin 4\theta]_0^{\pi/2}\right\}$

Ομοίως και γιά τα U_4, U_5

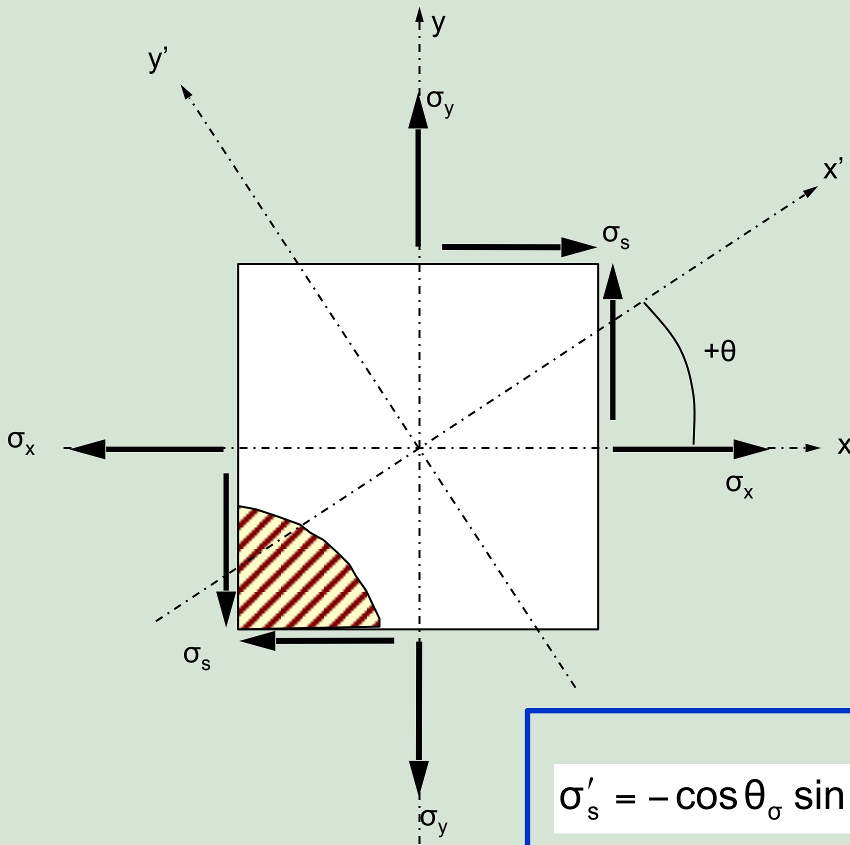
Μεταβολή αναλλοιώτων του μητρώου **Q** συναρτήσει της off-axis γωνίας



$$Q_{xs} = \frac{1}{2}U_2 \sin 2\theta + U_3 \sin 4\theta$$

$$Q_{ys} = \frac{1}{2}U_2 \sin 2\theta - U_3 \sin 4\theta$$

Συστήματα κυρίων τάσεων και παραμορφώσεων σε γενικώς ορθότροπη στρώση



$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xs} \\ S_{yx} & S_{yy} & S_{ys} \\ S_{sx} & S_{sy} & S_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_s \end{Bmatrix}$$

Παρομοίως:

$$\tan 2\theta_\varepsilon = \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}$$

$$\tan 2\theta_\sigma = \frac{2\sigma_s}{\sigma_x - \sigma_y}$$

$$\sigma_s' = -\cos\theta_\sigma \sin\theta_\sigma \sigma_x + \cos\theta_\sigma \sin\theta_\sigma \sigma_y + \left(\cos^2\theta_\sigma - \sin^2\theta_\sigma\right)\sigma_s = 0$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x' \\ \sigma_y' \\ \sigma_s' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_s \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} \varepsilon_x' \\ \varepsilon_y' \\ \varepsilon_s' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & mn \\ n^2 & m^2 & -mn \\ -2mn & 2mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_s \end{Bmatrix}$$

m=cosθ, n=sinθ

Σε ποιά γωνία θα είναι το σύστημα κυρίων τάσεων;

Συστήματα κυρίων τάσεων και παραμορφώσεων σε γενικώς ορθότροπη στρώση

Ταυτίζονται τα δύο κύρια συστήματα συντεταγμένων;

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xs} \\ S_{yx} & S_{yy} & S_{ys} \\ S_{sx} & S_{sy} & S_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_s \end{Bmatrix}$$

$$\tan 2\theta_\varepsilon = \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}$$

$$\tan 2\theta_\varepsilon = \frac{S_{xs}\sigma_x + S_{ys}\sigma_y + S_{ss}\sigma_s}{(S_{xx} - S_{xy})\sigma_x - (S_{yy} - S_{xy})\sigma_y + (S_{xs} - S_{ys})\sigma_s}$$

$$\tan 2\theta_\sigma = \frac{2\sigma_s}{\sigma_x - \sigma_y}$$

Γιά ισότροπο υλικό: $S_{xs}=S_{ys}=0$, $S_{xx}=S_{yy}$ και $S_{ss}=2(S_{xx}-S_{xy})$

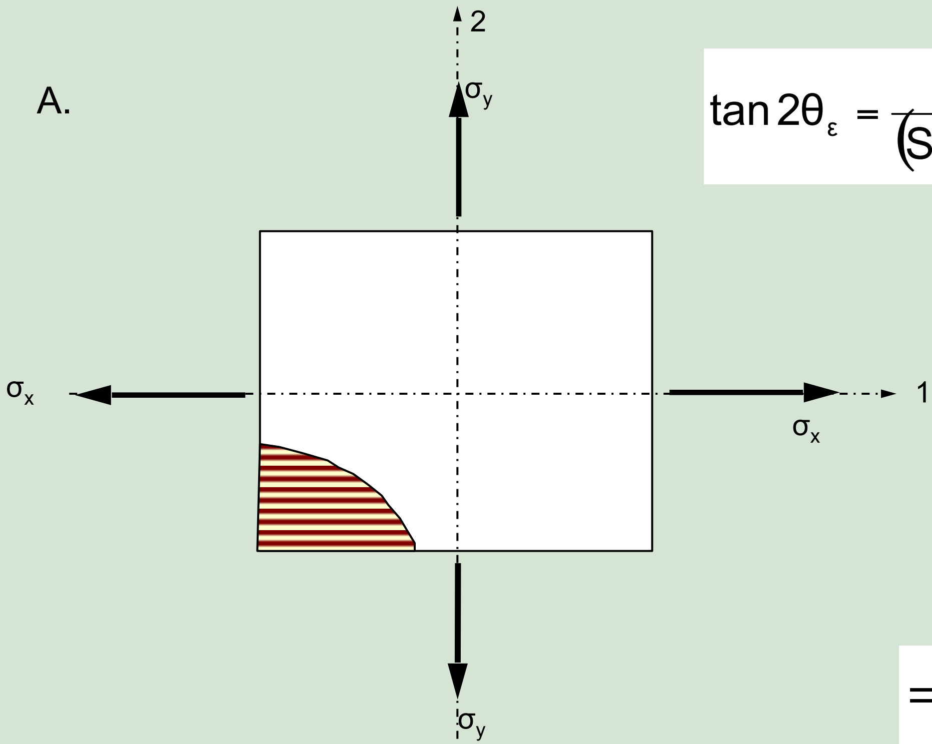
$\tan 2\theta_\varepsilon = \tan 2\theta_\sigma$

$$\sigma_{I,II} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \sigma_s^2}$$

$$\varepsilon_{I,II} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \varepsilon_s^2}$$

Γιά ορθότροπο μέσο τα δύο συστήματα δεν ταυτίζονται παρά μόνον όταν:

A.



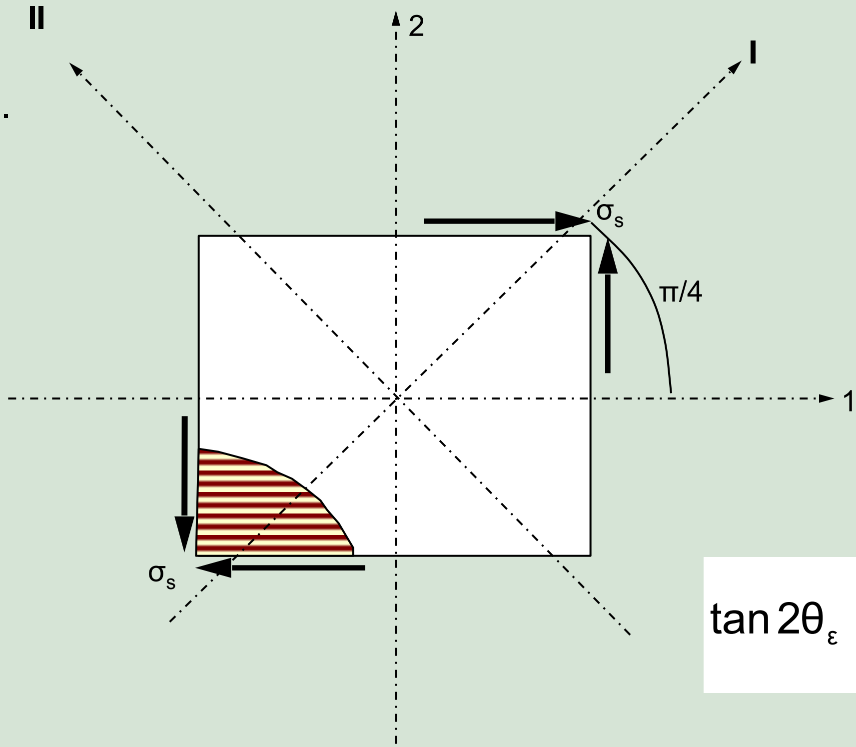
$$\tan 2\theta_{\varepsilon} = \frac{\cancelto{0}{S_{xs}}\sigma_x + \cancelto{0}{S_{ys}}\sigma_y + S_{ss}\cancelto{0}{\sigma_s}}{\left(S_{xx} - S_{xy}\right)\sigma_x - \left(S_{yy} - S_{xy}\right)\sigma_y + \left(S_{xs} - S_{ys}\right)\sigma_s}$$

$$\tan 2\theta_{\sigma} = \frac{2\cancelto{0}{\sigma_s}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

$$\Rightarrow \theta_{\varepsilon} = \theta_{\sigma} = 0$$

Γιά ορθότροπο μέσο τα δύο συστήματα δεν ταυτίζονται παρά μόνον όταν:

B.

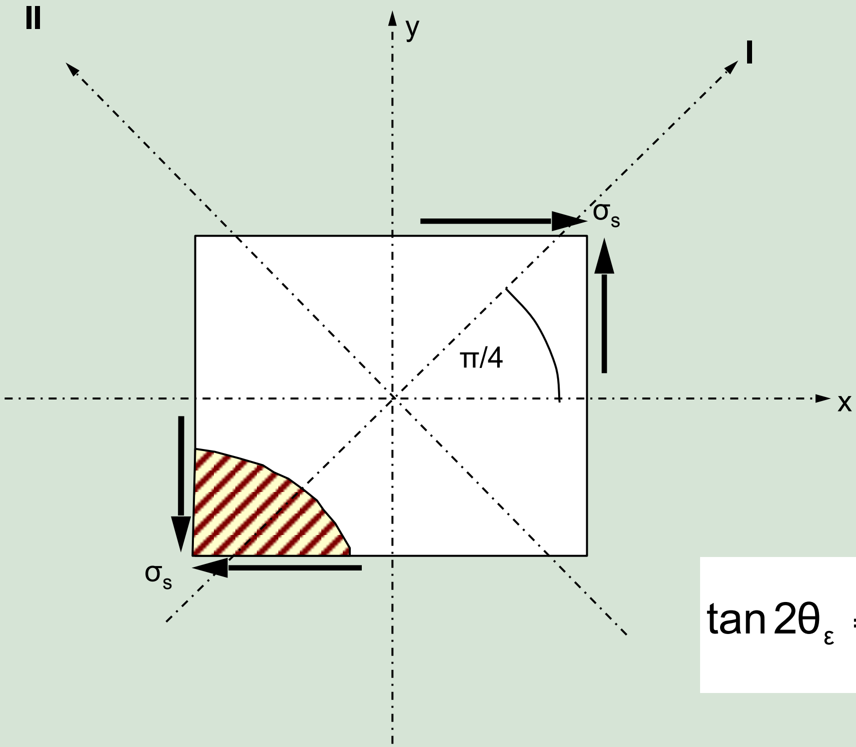


$$\tan 2\theta_\varepsilon = \frac{S_{xs}\cancelto{0}{\sigma_x} + S_{ys}\cancelto{0}{\sigma_y} + S_{ss}\sigma_s}{\cancelto{0}{(S_{xx} - S_{xy})}\sigma_x - \cancelto{0}{(S_{yy} - S_{xy})}\sigma_y + (\cancelto{0}{S_{xs}} - \cancelto{0}{S_{ys}})\sigma_s}$$

$$\tan 2\theta_\sigma = \frac{2\sigma_s}{\cancelto{0}{\sigma_x} - \cancelto{0}{\sigma_y}}$$

Γιά ορθότροπο μέσο τα δύο συστήματα δεν ταυτίζονται παρά μόνον όταν:

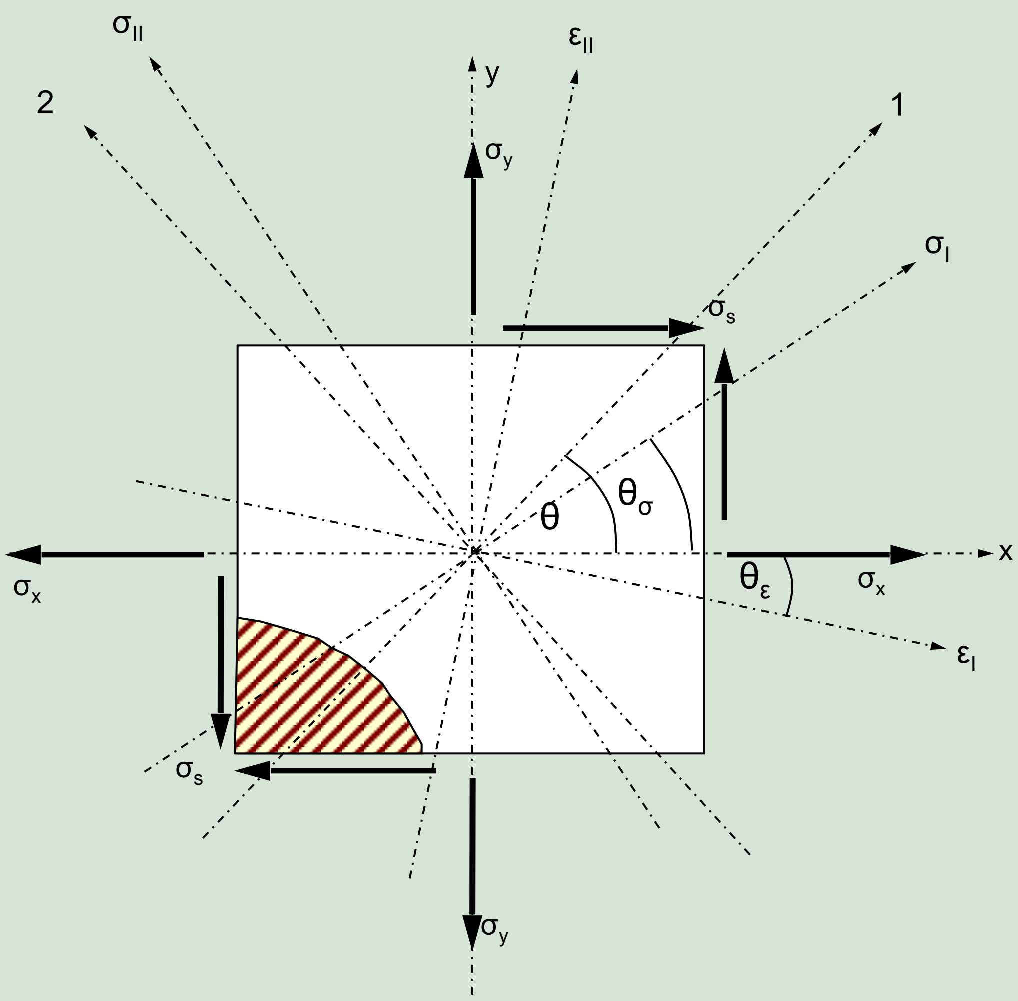
Γ.



$$\tan 2\theta_{\varepsilon} = \frac{S_{xs}\cancelto{0}{\sigma_x} + S_{ys}\cancelto{0}{\sigma_y} + S_{ss}\sigma_s}{(S_{xx}-S_{xy})\cancelto{0}{\sigma_x} - (S_{yy}-S_{xy})\cancelto{0}{\sigma_y} + \underbrace{(S_{xs}-S_{ys})}_{0}\sigma_s}$$

$$\tan 2\theta_{\sigma} = \frac{2\sigma_s}{\cancelto{0}{\sigma_x} - \cancelto{0}{\sigma_y}}$$

Επομένως, γιά γενικώς ορθότροπο μέσο συναντώνται τα εξής συστήματα συντεταγμένων:



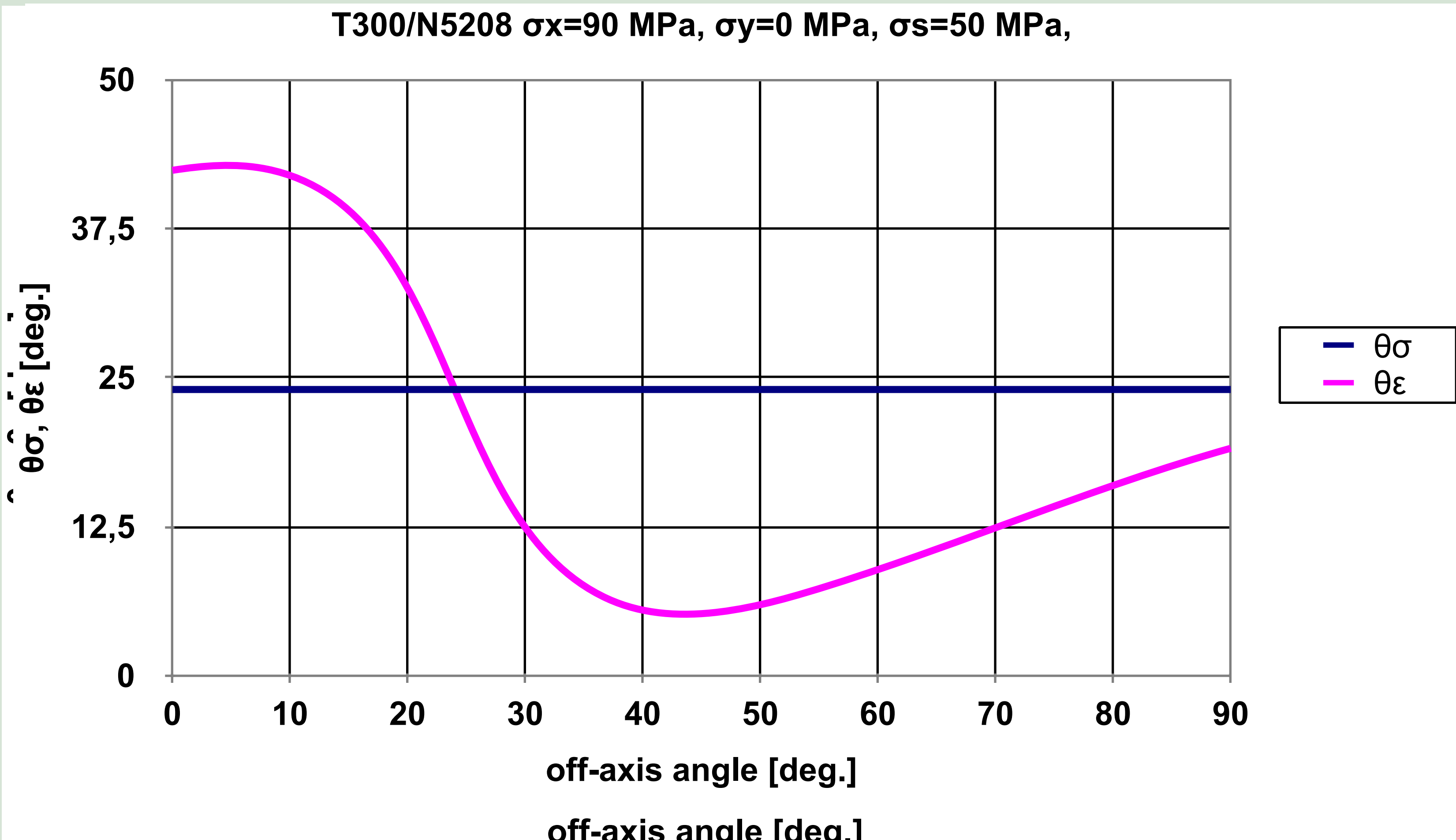
(x-y): φυσικό σύστημα συντεταγμένων

(1-2): κύριο σύστημα συντεταγμένων
ή κύριο σύστημα υλικού ή
σύστημα συμμετρίας του μέσου

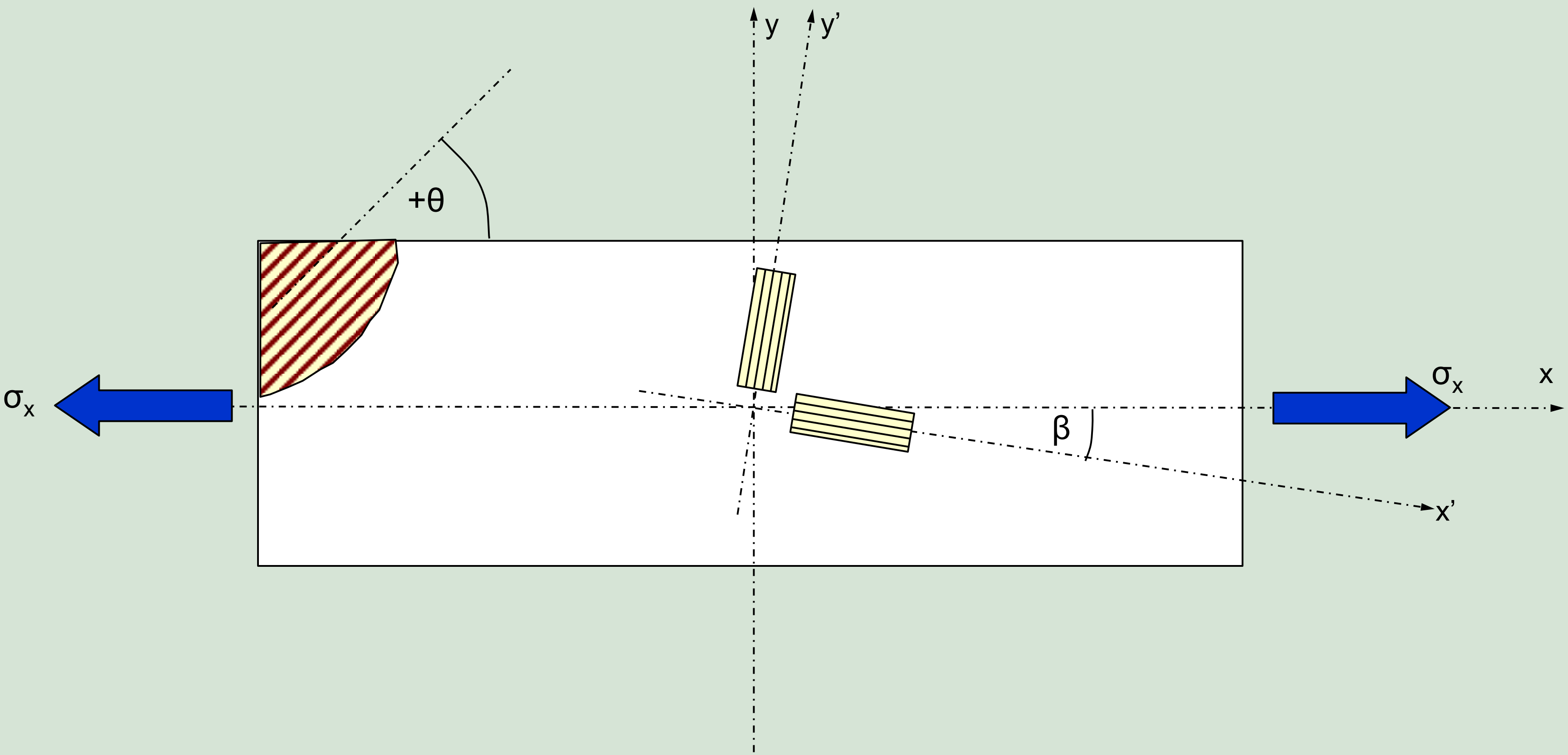
(σ_I-σ_{II}): σύστημα κυρίων τάσεων

(ε_I-ε_{II}): σύστημα κυρίων παραμορφώσεων

Διαφορά συστημάτων κυρίων τάσεων και παραμορφώσεων συναρτήσει φορτίου και γωνίας ινών

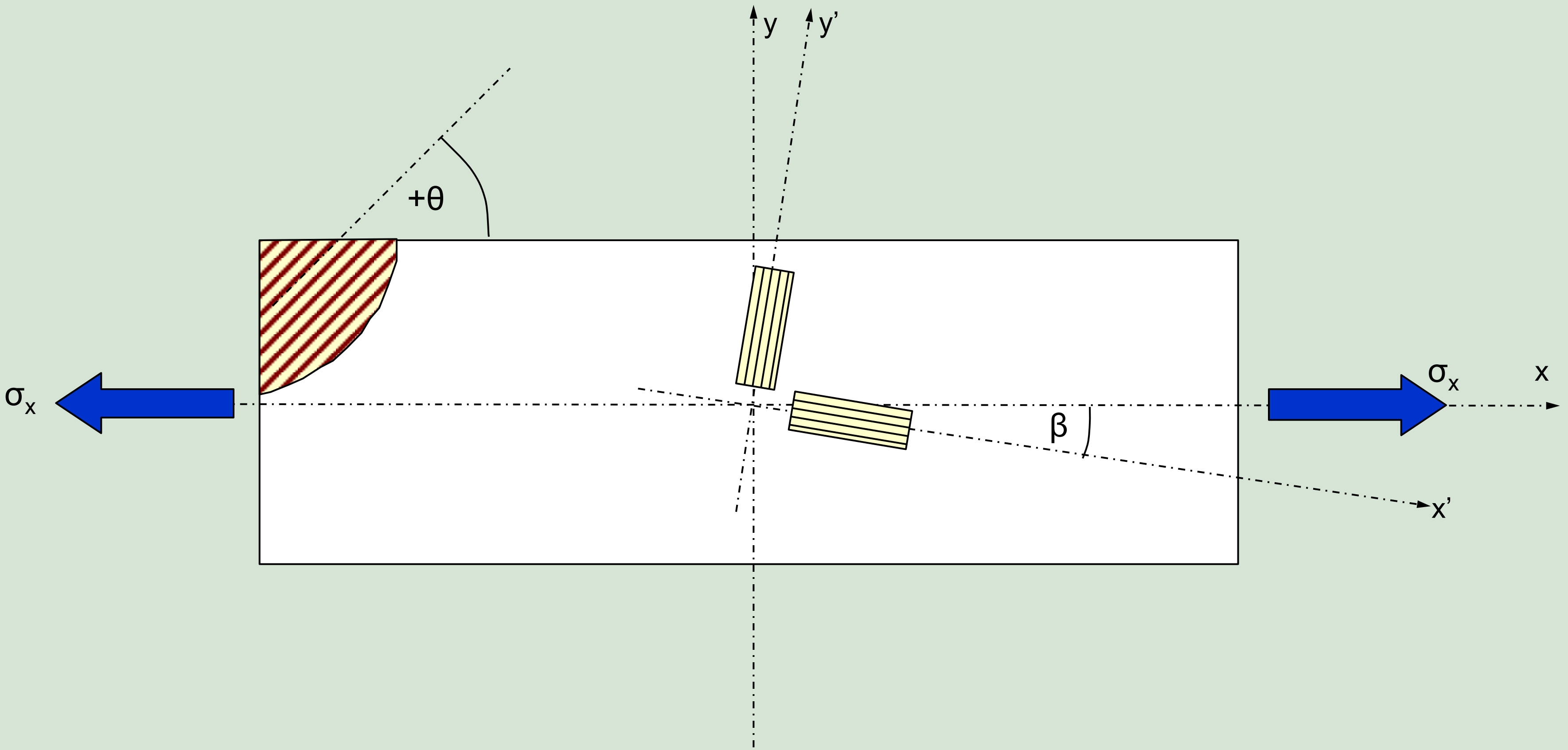


Δοκιμή εφελκυσμού σε off-axis ορθότροπο δοκίμιο γιά μέτρηση E_x και v_{xy}



Να υπολογισθεί το σφάλμα στις μετρήσεις όταν το υλικό του δοκιμίου είναι:

1. Graphite/Epoxy UD με E_1=170 GPa, E_2=8 GPa, G_{12}=6 GPa, v_{12}=0.32
2. Steel, v=0.28, E=200 GPa



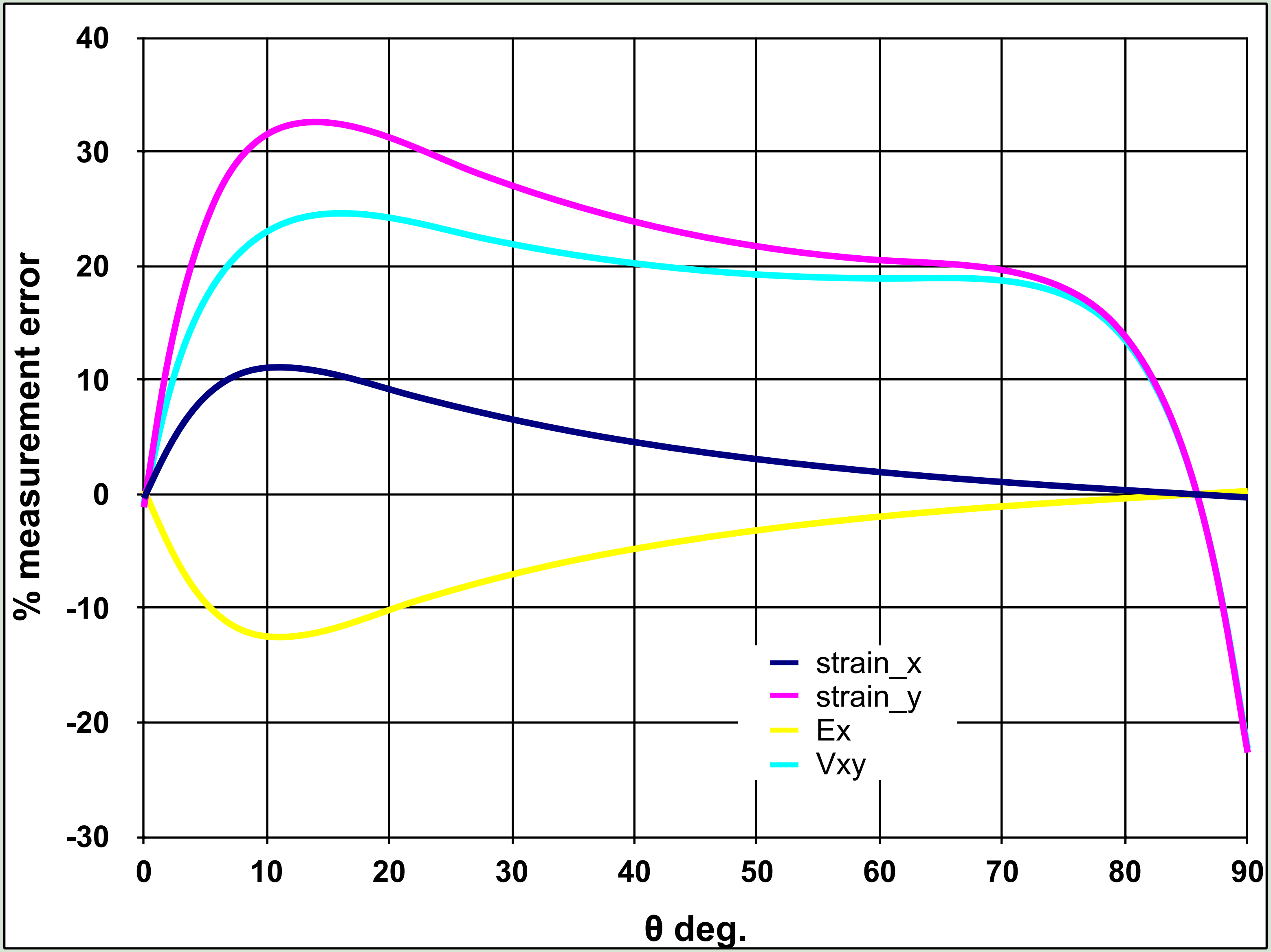
Γιά συγκεκριμμένη τιμή της εφαρμοζόμενης τάσης, σ_x, υπολογίζονται οι συνιστώσες του διανύσματος παραμόρφωσης στο φυσικό σύστημα συντεταγμένων:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E_x} \;,\; \varepsilon_y = \frac{-\nu_{xy}}{E_x}\sigma_x \;,\; \varepsilon_s = \frac{\eta_{xs}}{E_x}\sigma_x$$

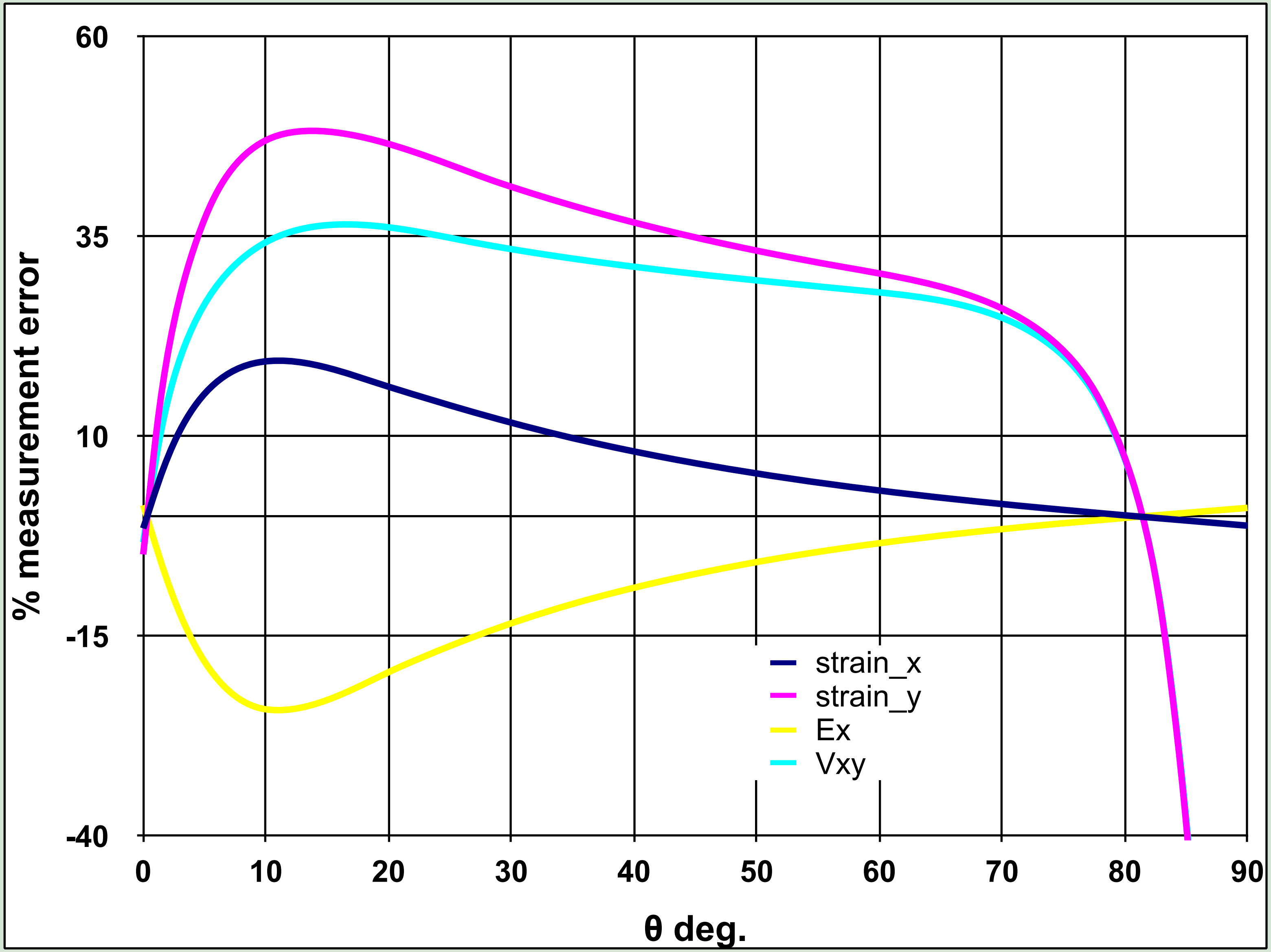
Οι μετρούμενες απο τα strain gauges παραμορφώσεις:

$$\varepsilon'_x = \varepsilon_x \cos^2\beta + \varepsilon_y \sin^2\beta - \varepsilon_s \cos\beta \sin\beta$$
$$\varepsilon'_y = \varepsilon_x \sin^2\beta + \varepsilon_y \cos^2\beta + \varepsilon_s \cos\beta \sin\beta$$

Ποσοστιαίο σφάλμα μέτρησης γιά β=-3°



Ποσοστιαίο σφάλμα μέτρησης γιά β=-6º



Γιά την περίπτωση του ισοτρόπου μέσου, το διάνυσμα παραμορφώσεως στο φυσικό σύστημα συντεταγμένων έχει συνιστώσες:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_s \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 0.350 \\ -0.098 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3}$$

οι τιμές των μετρουμένων από τα **strain gauges** παραμορφώσεων θα είναι ίσες με:

$$\varepsilon'_x = 0.348 \cdot 10^{-3}$$
$$\varepsilon'_y = -0.097 \cdot 10^{-3}$$

% Σφάλμα στην μέτρηση	
ε_x	1.42
ε_y	-5.26
E	1.40
v	-3.78