

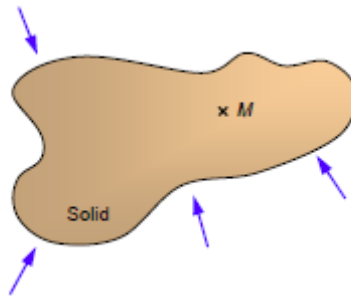
## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3**

- **ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΑΝΙΣΟΤΡΟΠΩΝ ΚΑΙ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ**
- **ΜΙΚΡΟΜΗΧΑΝΙΚΗ ΚΑΙ ΟΜΟΓΕΝΟΠΟΙΗΣΗ**

## 3.1 ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΤΡΟΠΕΣ

### 3.1.1 Η «Εντατική Κατάσταση» σώματος

Η εντατική κατάσταση σε ένα σημείο  $M$  ενός σώματος που υποβάλλεται σε μηχανικές φορτίσεις, μας επιτρέπει να προσδιορίζουμε τις μηχανικές δράσεις που αναπτύσσονται στο σημείο αυτό.



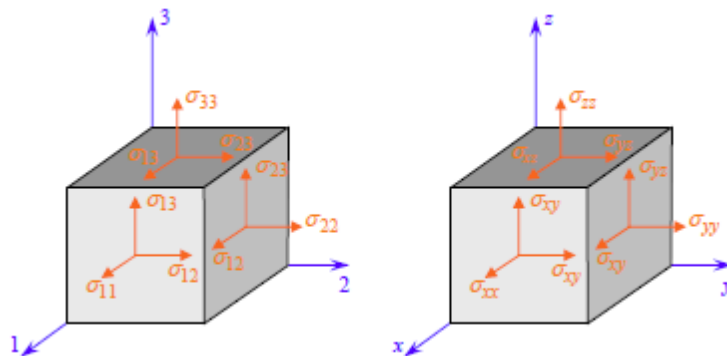
Σώμα που υποβάλλεται σε μηχανικές φορτίσεις

- **Ο Τανυστής των Τάσεων**

Η εντατική κατάσταση σε κάθε σημείο  $M$  ενός συνεχούς μέσου, προσδιορίζεται πλήρως με τη βοήθεια του τανυστή των τάσεων που συμβολίζεται με  $\sigma(M)$ . Ο τανυστής αυτός είναι ένας συμμετρικός καρτεσιανός τανυστής δεύτερης τάξης και μπορεί να παρασταθεί με τη βοήθεια ενός συμμετρικού  $3 \times 3$  πίνακα, στο καρτεσιανό σύστημα αναφοράς  $(1, 2, 3)$ :

$$\sigma(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

με  $\sigma_{21} = \sigma_{12}$ ,  $\sigma_{31} = \sigma_{13}$ ,  $\sigma_{32} = \sigma_{23}$



Συνιστώσες του διανύσματος τάσεων στο  $(1, 2, 3)$  και στο  $(x, y, z)$  σύστημα συντεταγμένων.

- **Συνεπτυγμένη Μορφή του Τανυστή των Τάσεων**

Η συμμετρία του τανυστή των τάσεων περιορίζει τον αριθμό των απαραίτητων συνιστωσών σε έξι. Για το λόγο αυτό, ο πίνακας με τις εννιά συνιστώσες του τανυστή συχνά αντικαθίσταται από ένα πίνακα στήλη με έξι συνιστώσες, χρησιμοποιώντας μία από τις παρακάτω μορφές:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}$$

### 3.1.2 Η «Παραμορφωτική Κατάσταση» σώματος

- **Ο Τανυστής των Τροπών**

Με ανάλογο τρόπο, η παραμορφωτική κατάσταση σε κάθε σημείο  $M$  του συνεχούς μέσου, προσδιορίζεται με τη βοήθεια του τανυστή των απειροστών τροπών που συμβολίζεται με  $\varepsilon(M)$ . Και αυτός ο τανυστής είναι ένας συμμετρικός καρτεσιανός τανυστής δεύτερης τάξης και μπορεί να παρασταθεί με τη βοήθεια ενός συμμετρικού  $3 \times 3$  πίνακα, στο καρτεσιανό σύστημα αναφοράς  $(1, 2, 3)$ :

$$\varepsilon(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

με

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad \forall i, j = 1, 2, 3$$

και

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \text{ (συμμετρικός τανυστής)}$$

για την περίπτωση της γραμμικής θεωρίας των απειροστών τροπών.

- **Συνεπτυγμένη Μορφή του Τανυστή των Τροπών**

Όπως και στη περίπτωση του τανυστή των τάσεων, η συμμετρία του τανυστή των τροπών περιορίζει τον αριθμό των απαραίτητων συνιστωσών σε έξι και έτσι ο πίνακας με τις εννιά συνιστώσες του τανυστή συχνά αντικαθίσταται από ένα πίνακα στήλη με έξι συνιστώσες, χρησιμοποιώντας μία από τις παρακάτω μορφές:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{bmatrix}$$

## 3.2 Η ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Τα πεδία των μηχανικών τάσεων και τροπών σε ένα υλικό σχετίζονται μεταξύ τους με νόμους που χαρακτηρίζουν την μηχανική συμπεριφορά του υλικού. Οι νόμοι αυτοί προκύπτουν από πειραματικές παρατηρήσεις και μας επιτρέπουν να περιγράψουμε ικανοποιητικά τα φαινόμενα που παρατηρούνται. Από πειραματικές μελέτες προκύπτει ότι τα περισσότερα υλικά, σε δοσμένη θερμοκρασία, παρουσιάζουν γραμμική ελαστική συμπεριφορά.

### 3.2.1 Ο Πίνακας Ακαμψίας

Ο νόμος της γραμμικής ελαστικής συμπεριφοράς ενός σώματος μπορεί να περιγραφεί με την ακόλουθη εξίσωση πινάκων

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}$$

ή σε συνεπτυγμένη μορφή

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}$$

Ο νόμος αυτός, που συχνά αναφέρεται και ως *γενικευμένος νόμος του Hooke*, εισάγει τον συμμετρικό πίνακα ακαμψίας (*stiffness matrix*)  $\mathbf{C}$ . Έτσι, η γραμμική συμπεριφορά ενός γενικά ανισότροπου υλικού περιγράφεται με τη χρήση 21 ανεξάρτητων ελαστικών σταθερών, που είναι τα στοιχεία  $C_{ij}$  του πίνακα ακαμψίας.

### 3.2.2 Ο Πίνακας Ευκαμψίας

Ο γενικευμένος νόμος του Hooke μπορεί να γραφεί και σε αντίστροφη μορφή,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S} \boldsymbol{\sigma}$$

με την χρήση του αντίστροφου του πίνακα ακαμψίας. Ο πίνακας  $\mathbf{S}$  ονομάζεται *πίνακας ευκαμψία*, και στη γενική περίπτωση έχει τη μορφή

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} & S_{56} \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & S_{46} & S_{56} & S_{66} \end{bmatrix}$$

με

$$\mathbf{S} = \mathbf{C}^{-1}$$

Τα στοιχεία  $S_{ij}$  του παραπάνω πίνακα ονομάζονται και ελαστικές σταθερές ευκαμψίας.

### 3.2.3 Διάφοροι Τύποι Ανισότροπων Υλικών

- **Τρικλινικά Υλικά**

Στη πιο γενική περίπτωση, ο πίνακας ακαμψίας και ο πίνακας ευκαμψίας ενός υλικού προσδιορίζονται, ο καθένας, με τη χρήση 21 ανεξάρτητων ελαστικών σταθερών. Η περίπτωση αυτή αντιστοιχεί στα γενικά ανισότροπα υλικά τα οποία δεν παρουσιάζουν καμιά συμμετρία ως προς τις μηχανικές τους ιδιότητες. Τα υλικά αυτά λέγονται και *τρικλινικά υλικά* (triclinic materials).

Αρκετά όμως ανισότροπα υλικά παρουσιάζουν μία ή περισσότερες συμμετρίες στις μηχανικές τους ιδιότητες. Για παράδειγμα, οι μονοκρύσταλλοι, τα σύνθετα υλικά οπλισμένα με παράλληλες ίνες ενίσχυσης, κα. Οι ιδιότητες αυτές μειώνουν το πλήθος των ανεξάρτητων ελαστικών σταθερών που απαιτούνται για τη περιγραφή της ελαστικής συμπεριφοράς αυτών των υλικών. Η έκταση του περιορισμού των ανεξάρτητων ελαστικών σταθερών είναι συνάρτηση του πλήθους των συμμετριών που εμφανίζει κάθε υλικό.

- **Μονοκλινικά Υλικά**

Μονοκλινικό υλικό είναι ένα υλικό το οποίο παρουσιάζει ένα επίπεδο συμμετρίας στη μηχανική του συμπεριφορά. Η μορφή του πίνακα ακαμψίας (ευκαμψίας) θα πρέπει να είναι τέτοια ώστε αλλαγές στο σύστημα συντεταγμένων αναφοράς, που προκύπτουν από τη συγκεκριμένη συμμετρία, να μη μεταβάλλουν τον πίνακα. Στην περίπτωση που το επίπεδο συμμετρίας είναι το (1,2)-επίπεδο, ο πίνακας ακαμψίας έχει τη μορφή

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}$$

Την ίδια μορφή έχει και ο πίνακας ευκαμψίας. Έτσι, το πλήθος των ανεξάρτητων ελαστικών σταθερών στα μονοκλινικά υλικά περιορίζεται σε 13.

- **Ορθότροπα Υλικά**

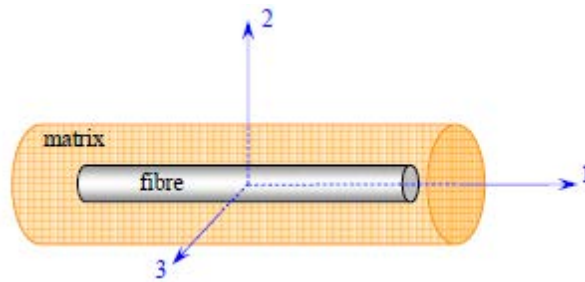
Ένα ορθότροπο υλικό εμφανίζει τρία επίπεδα συμμετρίας, ανά δύο ορθογώνια, στη μηχανική του συμπεριφορά. Στην πραγματικότητα, η παρουσία δύο επιπέδων συμμετρίας, ορθογώνιων μεταξύ τους, συνεπάγεται και την ύπαρξη ενός τρίτου. Η απαίτηση για το αναλλοίωτο του πίνακα ακαμψίας κάτω από αλλαγές στο σύστημα αναφοράς που προκύπτουν από την συμμετρία γύρω από το δεύτερο επίπεδο, δίνει στον πίνακα την μορφή

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}$$

Την ίδια μορφή έχει και ο πίνακας ευκαμψίας. Επομένως, στα ορθότροπα υλικά, το πλήθος των ανεξάρτητων ελαστικών σταθερών περιορίζεται σε 9.

- **Εγκαρσίως Ισότροπα Υλικά**

Ένας συνηθισμένος τρόπος κατασκευής σύνθετων υλικών είναι οι τοποθέτηση ινών (ίνες ενίσχυσης) κατά διάφορους τρόπους μέσα σε συνδετικό υλικό (μήτρα). Η πλέον ενδεδειγμένη διάταξη είναι αυτή των ινών με ενιαίο προσανατολισμό, όπου όλες οι ίνες είναι συνεχείς, με μεγάλο μήκος και παράλληλες μεταξύ τους. Αντιπροσωπευτικό στοιχείο όγκου ενός τέτοιου υλικού είναι ένα κυλινδρικό τμήμα του υλικού, που περιλαμβάνει μια ίνα ενίσχυσης παράλληλη με τον άξονα του κυλίνδρου (σχήμα).



Αντιπροσωπευτικό στοιχείο σύνθετου υλικού με ενιαίο προσανατολισμό των ινών ενίσχυσης

Ένα υλικό τέτοιου τύπου, διαθέτει τρία επίπεδα συμμετρίας και ένα άξονα συμμετρίας που ταυτίζεται με την κατεύθυνση των ινών και λέγεται *ορθότροπο εκ περιστροφής* ή *εγκαρσίως ισότροπο* υλικό. Η περιστροφή του συστήματος συντεταγμένων γύρω από τον άξονα συμμετρίας του υλικού (1-άξονας) θα πρέπει να αφήνει αναλλοίωτο τον πίνακα ακαμψίας (ή ευκαμψίας). Για το λόγο αυτό θα πρέπει να ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$C_{13} = C_{12}, \quad C_{33} = C_{22}$$

$$C_{55} = C_{66}, \quad C_{44} = \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23})$$

και

$$S_{13} = S_{12}, \quad S_{33} = S_{22}$$

$$S_{55} = S_{66}, \quad S_{44} = 2(S_{22} - S_{23})$$

Οπότε, ο πίνακας ακαμψίας θα έχει τη μορφή

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}$$

και ο πίνακας ευκαμψίας τη μορφή

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{23} & S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(S_{22} - S_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix}$$

Στα εγκάρσιως ισότροπα υλικά, το πλήθος των ανεξάρτητων ελαστικών σταθερών περιορίζεται σε 5.

- **Ισότροπα Υλικά**

Ένα υλικό είναι ισότροπο αν οι μηχανικές του ιδιότητες είναι ανεξάρτητες από την επιλογή του συστήματος αναφοράς. Αν δηλαδή ο πίνακας ακαμψίας (ή ευκαμψίας) του υλικού παραμένει αναλλοίωτος σε στροφές γύρω από οποιοδήποτε άξονα (άπειροι στο πλήθος άξονες συμμετρίας). Έτσι, εφαρμόζοντας την ιδιότητα αυτή σε ένα εγκάρσιως ισότροπο υλικό (με άξονα συμμετρίας τον 1-άξονα) και απαιτώντας την ύπαρξη και δεύτερου άξονα συμμετρίας (3-άξονας) προκύπτουν οι σχέσεις

$$\begin{aligned} C_{11} &= C_{22}, & C_{13} &= C_{23} \\ C_{44} &= C_{55}, & C_{66} &= \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) \end{aligned}$$

Το πλήθος τότε των ανεξάρτητων ελαστικών σταθερών περιορίζεται σε 2 και ο πίνακας ακαμψίας του υλικού έχει τη μορφή

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) \end{bmatrix}$$

Συχνά, οι ελαστικές σταθερές ενός ισότροπου υλικού περιγράφονται με τη χρήση των λεγόμενων σταθερών του Lamé  $\lambda$  και  $\mu$

$$C_{12} = \lambda, \quad \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) = \mu$$

### 3.2.4 Μηχανικές Ελαστικές Σταθερές

Οι ελαστικές σταθερές των υλικών περιγράφονται πολλές φορές με τη χρήση των λεγόμενων μηχανικών ελαστικών σταθερών. Για ένα ισότροπο υλικό, οι σταθερές αυτές είναι το μέτρο ελαστικότητας του Young  $E$ , ο λόγος Poisson  $\nu$  και το μέτρο διάτμησης  $G$ .

Ανεξάρτητα από το είδος των ελαστικών σταθερών που χρησιμοποιούνται, ο πίνακας ακαμψίας και ο πίνακας ευκαμψίας ενός ισότροπου υλικού έχει τη γενική μορφή



$$\begin{bmatrix} a & b & b & 0 & 0 & 0 \\ b & a & b & 0 & 0 & 0 \\ b & b & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

Για τον πίνακα ακαμψίας **C** ισχύει

$$a = \lambda + 2\mu = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} = G \frac{4G-E}{3G-E}$$

$$b = \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = G \frac{E-2G}{3G-E}$$

$$c = \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = G$$

και για το πίνακα ευκαμψίας **S** ισχύει

$$a = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} = \frac{1}{E}$$

$$b = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} = -\frac{\nu}{E}$$

$$c = \frac{1}{\mu} = \frac{2(1+\nu)}{E} = \frac{1}{G}$$

### 3.3 Η ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΤΩΝ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

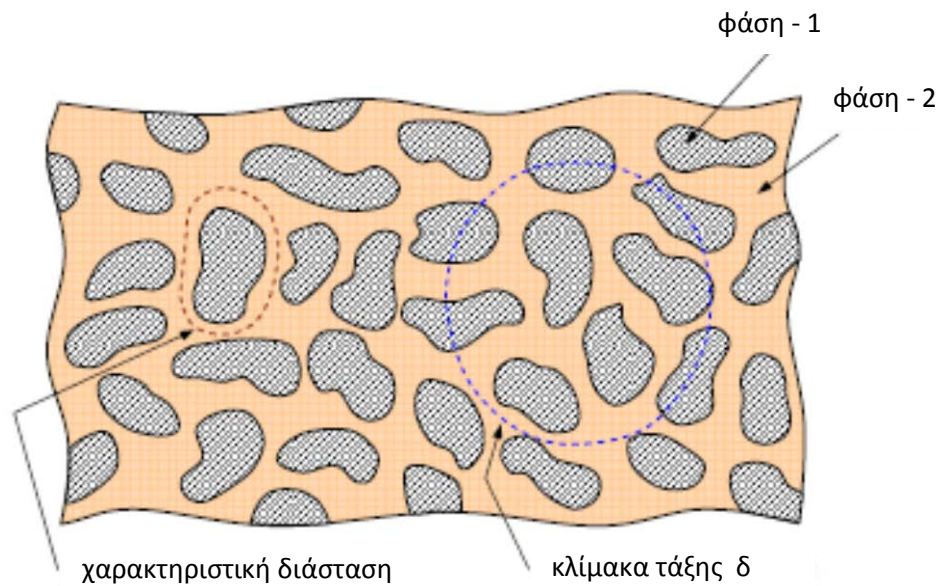
#### 3.3.1 Τα «Ενεργά» Μέτρα Ελαστικότητας

- **Η Έννοια της Ομογενοποίησης**

Σε μικροσκοπική κλίμακα, όλα τα υλικά είναι ετερογενή, ακόμη και τα υλικά που ονομάζουμε ομοιογενή. Σε αυτό το επίπεδο παρατήρησης, η περιγραφή της μηχανικής συμπεριφοράς συνηθισμένων υλικών δεν μπορεί να επιτευχθεί. Για να ξεπεραστεί η δυσκολία αυτή, εισάγεται η υπόθεση της συνέχειας ενός υλικού. Η υπόθεση αυτή βασίζεται στην έννοια των

στατιστικών μέσων όρων και αποτελεί μια εξιδανίκευση της πραγματικής σύστασης του υλικού που εξετάζεται. Συνέπεια της υπόθεσης της συνέχειας είναι η έννοια της ομοιογένειας. Ένα ομοιογενές υλικό χαρακτηρίζεται από ιδιότητες οι οποίες είναι ίδιες σε κάθε σημείο του υλικού.

Στο μακροσκοπικό επίπεδο, ο χαρακτήρας της ετερογένειας εμφανίζεται κάθε φορά που οι φυσικές ή μηχανικές ιδιότητες ενός υλικού είναι ασυνεχείς συναρτήσεις της θέσης μέσα στο υλικό. Στην περίπτωση των σύνθετων υλικών, οι ιδιότητες του υλικού μεταβάλλονται με ασυνεχή τρόπο στη διεπιφάνεια μεταξύ των διαφόρων φάσεων του υλικού, ενώ το υλικό της κάθε φάση θεωρείται ομοιογενές.



#### Ομογενοποίηση ενός ετερογενούς υλικού

Στην περίπτωση που μια φάση-1 διασκορπίζεται στη φάση-2 (βλέπε Σχήμα), υπάρχει γενικά μια χαρακτηριστική διάσταση ετερογένειας. Για παράδειγμα, στα σύνθετα υλικά που ενισχύονται με παράλληλες δέσμες ινών, η διάσταση αυτή είναι ο μέσος όρος της απόστασης μεταξύ των παράλληλων ινών. Επιπλέον, υπάρχει και μια κλίμακα τάξης  $\delta$  στην οποία οι ιδιότητες του υλικού μπορούν να προσεγγισθούν ικανοποιητικά, με την έννοια του μέσου όρου. Αυτό σημαίνει, ότι στην περίπτωση που οι ιδιότητες του υλικού μελετώνται σε τμήματα του υλικού μεγέθους  $\delta$ , οι μετρούμενες τιμές τους θα πρέπει να είναι ανεξάρτητες από την θέση του τμήματος μέσα στο υλικό. Με την έννοια αυτή το υλικό μπορεί να θεωρείται «φαινομενικά» ομοιογενές με ιδιότητες που θα έχουν προσδιορισθεί στο επίπεδο της κλίμακας  $\delta$ . Στην περίπτωση που μια τέτοια κλίμακα μπορεί να υπάρξει, (μια κλίμακα δηλαδή μεταξύ της κλίμακας των συστατικών και της κλίμακας του σύνθετου υλικού) λέμε ότι το υλικό μπορεί να *ομογενοποιηθεί*. Η ιδέα της μετατροπής ενός ετερογενούς υλικού σε ισοδύναμο (κατά κάποιο τρόπο) «φαινομενικά» ομοιογενές λέγεται *ομογενοποίηση*.

Ένας άλλος εναλλακτικός τρόπος μελέτης ετερογενών υλικών είναι η μελέτη των τμημάτων που το υλικό είναι ομοιογενές και η ανάλυση της συνέχειας των μηχανικών τάσεων και μετατοπίσεων σε κάθε διεπιφάνεια. Αν και ο τρόπος αυτός φαίνεται λογικός, είναι πρακτικά αδύνατος μέχρι σήμερα, αν πάρουμε υπόψη τον μεγάλο αριθμό των διεπιφανειών που πρέπει να μελετηθούν (μερικές χιλιάδες ή και εκατομμύρια). Παρόλα αυτά, η αύξηση της υπολογιστικής ικανότητας των μηχανών σήμερα κάνει δυνατή μια τέτοια προσέγγιση σε όλο και μικρότερη κλίμακα.

- **Οι Υλικές Σταθερές Ομογενοποιημένου Υλικού**

Με βάση την ιδέα της ομογενοποίησης, είναι δυνατό να περιγραφούν οι ομογενοποιημένες μηχανικές ιδιότητες ενός ετερογενούς υλικού. Οι ιδιότητες αυτές προσδιορίζονται πρώτα για ένα στοιχείο όγκου  $V$  του υλικού με μέγεθος  $\delta$ , που ονομάζεται *αντιπροσωπευτικό στοιχείο όγκου* (*Representative Volume Element*). Οι μέσες τιμές των μηχανικών τάσεων και τροπών που αναπτύσσονται σ' αυτό το αντιπροσωπευτικό στοιχείο όγκου (RVE), υπολογίζονται από τις σχέσεις

$$\bar{\sigma}_i = \frac{1}{V} \int_V \sigma_i(x_k) dV, \quad i = 1, 2, \dots, 6$$

$$\bar{\varepsilon}_i = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_i(x_k) dV, \quad i = 1, 2, \dots, 6$$

όπου  $\sigma_i$  και  $\varepsilon_i$  είναι τα στοιχεία του τανυστή των τάσεων και των τροπών στο σημείο  $x_k$ .

Τα στοιχεία του «ενεργού» πίνακα ακαμψίας  $\mathbf{C}$  και του «ενεργού» πίνακα ευκαμψίας  $\mathbf{S}$  υπολογίζονται από τις σχέσεις

$$\bar{\sigma}_i = C_{ij} \bar{\varepsilon}_j, \quad i, j = 1, 2, \dots, 6,$$

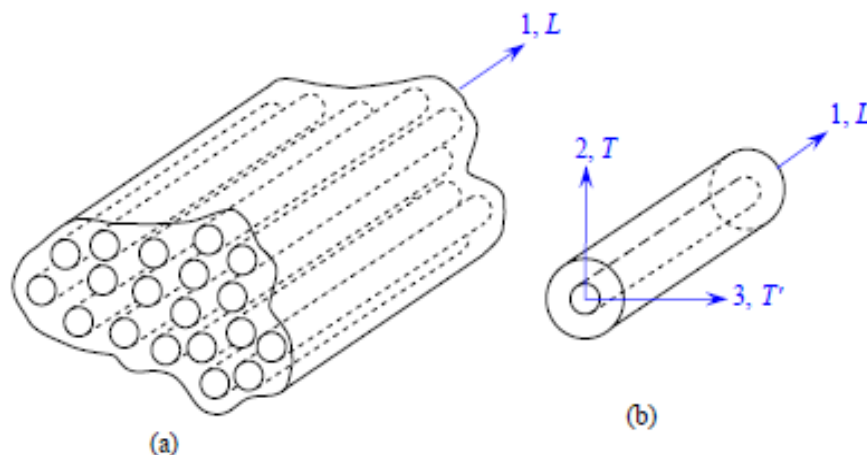
και

$$\bar{\varepsilon}_i = S_{ij} \bar{\sigma}_j, \quad i, j = 1, 2, \dots, 6.$$

Επομένως, για τον προσδιορισμό των υλικών σταθερών ενός ομογενοποιημένου ετερογενούς υλικού, είναι αναγκαίος πρώτα ο υπολογισμός των μέσων τάσεων και τροπών σε ένα αντιπροσωπευτικό στοιχείο όγκου του υλικού (με τη βοήθεια και των επιβαλλόμενων συνοριακών συνθηκών για τις μηχανικές τάσεις και τροπές στο σύνορο του αντιπροσωπευτικού όγκου) και στη συνέχεια ο υπολογισμός των στοιχείων του «ενεργού» πίνακα ακαμψίας και του «ενεργού» πίνακα ευκαμψίας. Αν και η διαδικασία αυτή φαίνεται απλή, στη πράξη το πρόβλημα είναι αρκετά σύνθετο αφού απαιτείται πρώτα ο ακριβής προσδιορισμός του πεδίου των τάσεων  $\sigma_i(x_k)$  και των τροπών  $\varepsilon_i(x_k)$  σε κάθε σημείο του ετερογενούς υλικού. Ακριβής λύση στο πρόβλημα αυτό μπορεί να προκύψει μόνο στην περίπτωση απλών και ιδανικών γεωμετρικών μοντέλων για τη δομή του ετερογενούς υλικού, τα οποία όμως τις περισσότερες φορές δεν περιγράφουν ικανοποιητικά την πραγματικότητα.

### 3.3.2 Ο νόμος του Hooke για σύνθετα υλικά με ίνες ενιαίας κατεύθυνσης

Ένα σύνθετο υλικό με ίνες ενιαίας κατεύθυνσης αποτελείται από μια δέσμη παράλληλων ινών ενίσχυσης τοποθετημένων σε μήτρα συνδετικού υλικού (σχήμα-(a)). Αυτή η βασική δομή περιγράφει τη μορφή των περισσότερων ισοπλισμένων σύνθετων υλικών. Σε μια πρώτη προσέγγιση, ως αντιπροσωπευτικό στοιχείο όγκου ενός τέτοιου υλικού θα μπορούσε να θεωρηθεί ένας κύλινδρος κυκλικής ή εξαγωνικής βάσης με συνδετικό υλικό και μια ίνα ενίσχυσης παράλληλη με το άξονα του κυλίνδρου (σχήμα-(b)).



Σύνθετο υλικό με ίνες ενιαίας κατεύθυνσης

Ο άξονας του κυλίνδρου ταυτίζεται με τον άξονα-1. Η διεύθυνση των ινών λέγεται *διαμήκης διεύθυνση* (Longitudinal direction). Επειδή η διεύθυνση των ινών ταυτίζεται με τον άξονα του κυλίνδρου, ο άξονας-1 λέγεται και άξονας-L. Κάθε διεύθυνση κάθετη στη διεύθυνση των ινών λέγεται *εγκάρσια διεύθυνση* (Transverse direction). Το σύνθετο υλικό θεωρείται υλικό εγκαρσίως ισότροπο, με επίπεδο ιστροπίας κάθετο στον άξονα-1. Το επίπεδο αυτό συμβολίζεται ως (1-2)-επίπεδο ή (T-T')- επίπεδο.

Συνεπώς, ο νόμος του Hooke για τα υλικά αυτά θα πρέπει να έχει τη (ευθεία) μορφή

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}$$

με 5 ανεξάρτητες ελαστικές σταθερές

$$C_{11}, C_{12}, C_{22}, C_{23}, C_{66}$$

ή την αντίστροφη μορφή

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{23} & S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(S_{22} - S_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix}$$

με 5 ανεξάρτητες ελαστικές σταθερές

$$S_{11}, S_{12}, S_{22}, S_{23}, S_{66}$$

### 3.3.3 Οι Μηχανικές Ελαστικές Σταθερές για σύνθετα υλικά με ίνες ενιαίας κατεύθυνσης

Οι μηχανικές ελαστικές σταθερές είναι το μέτρο ελαστικότητας του Young  $E$ , ο λόγος Poisson  $\nu$  και το μέτρο διάτμησης  $G$ . Οι σταθερές αυτές προσδιορίζονται με τη βοήθεια απλών δοκιμών, όπως ο μονοαξονικός εφελκυσμός ή η απλή διάτμηση και έχουν περισσότερο πρακτικό χαρακτήρα από τις υλικές σταθερές του πίνακα ακαμψίας ή ευκαμψίας. Κατά τη διαδικασία αυτών των δοκιμών, ένα πεδίο μηχανικών τάσεων επιβάλλεται σε κατάλληλο δοκίμιο του υλικού και στη συνέχεια υπολογίζεται το πεδίο των τροπών που έχει προκληθεί. Από τη διαδικασία αυτή γίνεται φανερό ότι οι υλικές σταθερές του πίνακα ευκαμψίας θα πρέπει να σχετίζονται με τις μηχανικές σταθερές με σχέσεις απλούστερες από τις αντίστοιχες σχέσεις των υλικών σταθερών του πίνακα ακαμψίας.

Με τη διαδικασία αυτή, προσδιορίζουμε στη συνέχεια τις μηχανικές ελαστικές σταθερές για σύνθετα υλικά με ίνες ενιαίας κατεύθυνσης (εγκαρσίως ισότροπα υλικά), εφαρμόζοντας κάθε φορά κατάλληλες απλές δοκιμές.

- **Διαμήκης Μονοαξονικός Εφελκυσμός**

Κατά τη διαδικασία αυτή, όλες οι μηχανικές τάσεις είναι μηδενικές εκτός της ορθής τάσης  $\sigma_1$ :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &\neq 0, \\ \sigma_i &= 0, \quad i = 2, 3, \dots, 6. \end{aligned}$$

Από την ευθεία μορφή του νόμου του Hooke, προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + C_{12}\varepsilon_3, \\ 0 &= C_{12}\varepsilon_1 + C_{22}\varepsilon_2 + C_{23}\varepsilon_3, \\ 0 &= C_{12}\varepsilon_1 + C_{23}\varepsilon_2 + C_{22}\varepsilon_3, \\ \varepsilon_4 &= \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = 0.\end{aligned}$$

και από τις εξισώσεις αυτές, οι παρακάτω σχέσεις:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\frac{C_{12}}{C_{22} + C_{23}}\varepsilon_1,$$

και

$$\sigma_1 = \left( C_{11} - 2\frac{C_{12}^2}{C_{22} + C_{23}} \right) \varepsilon_1.$$

Από τις σχέσεις αυτές και τους βασικούς ορισμούς των αντίστοιχων μεγεθών, προκύπτουν το *διάμηκες μέτρο ελαστικότητας του Young*  $E_L$  και ο *λόγος Poisson*  $\nu_{LT}$ , ως συνάρτηση των υλικών σταθερών του πίνακα ακαμψίας

$$E_L = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} = C_{11} - \frac{2C_{12}^2}{C_{22} + C_{23}}, \quad \nu_{LT} = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = -\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} = \frac{C_{12}}{C_{22} + C_{23}}.$$

Από την αντίστροφη μορφή του νόμου του Hooke, προκύπτουν:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= S_{11}\sigma_1, \\ \varepsilon_2 = \varepsilon_3 &= S_{12}\sigma_1, \\ \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon_6 &= 0.\end{aligned}$$

και από τις σχέσεις αυτές προκύπτουν το *διάμηκες μέτρο ελαστικότητας του Young*  $E_L$  και ο *λόγος Poisson*  $\nu_{LT}$ , ως συνάρτηση των υλικών σταθερών του πίνακα ευκαμψίας

$$E_L = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} = \frac{1}{S_{11}}, \quad \nu_{LT} = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = -\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} = -\frac{S_{12}}{S_{11}}.$$

- **Εγκάρσιος Μονοαξονικός Εφελκυσμός**

Κατά τη διαδικασία αυτή, όλες οι μηχανικές τάσεις είναι μηδενικές εκτός της ορθής τάσης  $\sigma_2$ :

$$\begin{aligned}\sigma_2 &\neq 0, \\ \sigma_i &= 0, \quad i \neq 2.\end{aligned}$$

Από την ευθεία μορφή του νόμου του Hooke, προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις:

$$\begin{aligned}
0 &= C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + C_{12}\varepsilon_3, \\
\sigma_2 &= C_{12}\varepsilon_1 + C_{22}\varepsilon_2 + C_{23}\varepsilon_3, \\
0 &= C_{12}\varepsilon_1 + C_{23}\varepsilon_2 + C_{22}\varepsilon_3, \\
\varepsilon_4 &= \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = 0.
\end{aligned}$$

και από τις εξισώσεις αυτές, οι ακόλουθες σχέσεις:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= -\frac{C_{12}(C_{23} - C_{22})}{C_{12}^2 - C_{11}C_{22}}\varepsilon_2, \\
\varepsilon_3 &= -\frac{C_{12}^2 - C_{11}C_{23}}{C_{12}^2 - C_{11}C_{22}}\varepsilon_2 \\
\sigma_2 &= \left[ C_{22} + \frac{C_{12}^2(C_{22} - 2C_{23}) + C_{11}C_{23}^2}{C_{12}^2 - C_{11}C_{22}} \right] \varepsilon_2.
\end{aligned}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις, προκύπτουν το εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας του Young  $E_T$  και οι λόγοι Poisson  $\nu_{TL}$  και  $\nu_{TT'}$ , ως συνάρτηση των υλικών σταθερών του πίνακα ακαμψίας

$$\begin{aligned}
E_T &= \frac{\sigma_2}{\varepsilon_2} = C_{22} + \frac{C_{12}^2(C_{22} - 2C_{23}) + C_{11}C_{23}^2}{C_{12}^2 - C_{11}C_{22}}, \\
\nu_{TL} &= -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{C_{12}(C_{23} - C_{22})}{C_{12}^2 - C_{11}C_{22}}, \\
\nu_{TT'} &= -\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2} = \frac{C_{12}^2 - C_{11}C_{23}}{C_{12}^2 - C_{11}C_{22}}.
\end{aligned}$$

Από την αντίστροφη μορφή του νόμου του Hooke, προκύπτουν οι σχέσεις:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= S_{12}\sigma_1, \\
\varepsilon_2 &= S_{22}\sigma_2, \\
\varepsilon_3 &= S_{23}\sigma_2, \\
\varepsilon_4 &= \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = 0.
\end{aligned}$$

και από αυτές, προκύπτουν το εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας του Young  $E_T$  και οι λόγοι Poisson  $\nu_{TL}$  και  $\nu_{TT'}$ , ως συνάρτηση των υλικών σταθερών του πίνακα ευκαμψίας

$$E_T = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_2} = \frac{1}{S_{22}}, \quad \nu_{TL} = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = -\frac{S_{12}}{S_{22}}, \quad \nu_{TT'} = -\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2} = -\frac{S_{23}}{S_{22}}.$$

Από όλες τις παραπάνω σχέσεις, προκύπτει εύκολα ότι οι μηχανικές ελαστικές σταθερές  $E_L$ ,  $E_T$ ,  $\nu_{LT}$  και  $\nu_{TL}$  συνδέονται μεταξύ τους με τη σχέση

$$\frac{E_L}{\nu_{LT}} = \frac{E_T}{\nu_{TL}}$$

- **Διαμήκης Απλή Διάτμηση**

Στη διαδικασία αυτή αντιστοιχούν οι ακόλουθες εντατικές καταστάσεις

$$\begin{cases} \sigma_5 \neq 0, \\ \sigma_i = 0, \quad i \neq 5 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} \sigma_6 \neq 0, \\ \sigma_i = 0, \quad i \neq 6 \end{cases}$$

Στην δεύτερη περίπτωση, από το νόμο του Hooke προκύπτουν οι εξισώσεις

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \varepsilon_5 &= 0, \\ \sigma_6 &= C_{66}\varepsilon_6. \end{aligned}$$

και από αυτές προκύπτει το *διάμηκες μέτρο διάτμησης*  $G_{LT}$ :

$$G_{LT} = \frac{\sigma_6}{\varepsilon_6} = C_{66} \quad \text{ή} \quad G_{LT} = \frac{\sigma_6}{\varepsilon_6} = \frac{1}{S_{66}}$$

Επειδή οι διευθύνσεις  $T$  και  $T'$  είναι ισοδύναμες, θα ισχύει:

$$G_{LT} = G_{LT'} = C_{66}.$$

- **Εγκάρσια Απλή Διάτμηση**

Στη διαδικασία αυτή αντιστοιχεί η ακόλουθη εντατική κατάσταση

$$\begin{cases} \sigma_4 \neq 0, \\ \sigma_i = 0, \quad i \neq 4 \end{cases}$$

και από το νόμο του Hooke, προκύπτουν οι σχέσεις:

$$\begin{aligned} \sigma_4 &= \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23})\varepsilon_4, \\ \varepsilon_i &= 0, \quad i \neq 4. \end{aligned}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει το *εγκάρσιο μέτρο διάτμησης*  $G_{TT'}$ :

$$G_{TT'} = \frac{\sigma_4}{\varepsilon_4} = \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23}) \quad \text{ή} \quad G_{TT'} = \frac{\sigma_4}{\varepsilon_4} = \frac{1}{2(S_{22} - S_{23})}$$



Το εγκάρσιο μέτρο διάτμησης  $G_{TT'}$ , το εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας  $E_T$  και ο λόγος Poisson  $\nu_{TT'}$  συνδέονται με τη σχέση

$$G_{TT'} = \frac{E_T}{2(1+\nu_{TT'})}$$

Συγκεντρώνοντας τις σχέσεις που έχουν παραχθεί, μπορεί να διατυπωθεί, ως παράδειγμα, η αντίστροφη μορφή του νόμου Hooke για τα υλικά αυτά, με όρους μηχανικών ελαστικών σταθερών.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{-\nu_{12}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & \frac{-\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{-\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix}$$

ή αλλιώς

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{LL} \\ \varepsilon_{TT} \\ \varepsilon_{TT'} \\ 2\varepsilon_{TT'} \\ 2\varepsilon_{TL} \\ 2\varepsilon_{LT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_L} & \frac{-\nu_{LT}}{E_L} & \frac{-\nu_{LT}}{E_L} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{LT}}{E_L} & \frac{1}{E_T} & \frac{-\nu_{TT'}}{E_T} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{LT}}{E_L} & \frac{-\nu_{TT'}}{E_T} & \frac{1}{E_T} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{TT'}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{LT}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{LT}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{LL} \\ \sigma_{TT} \\ \sigma_{TT'} \\ \sigma_{TT'} \\ \sigma_{TL} \\ \sigma_{LT} \end{bmatrix}$$

### 3.3.4 Προσδιορισμός των Μηχανικών Ελαστικών Σταθερών

Όπως έχει εξηγηθεί και προηγουμένως, με τον όρο μηχανικές ελαστικές σταθερές εννοούμε τις ιδιότητες του σύνθετου υλικού θεωρούμενου ως ομοιογενές υλικό. Για τον προσδιορισμό τους χρησιμοποιούνται οι παρακάτω μέθοδοι

- Εμπειρικές και ημι-αναλυτικές μέθοδοι, που στηρίζονται σε απλές αρχές και πειραματική επαλήθευση
- Ενεργειακές μέθοδοι με σκοπό τη λεπτομερή ανάλυση με χρήση υπολογιστικών τεχνικών, πχ περασμένα στοιχεία.

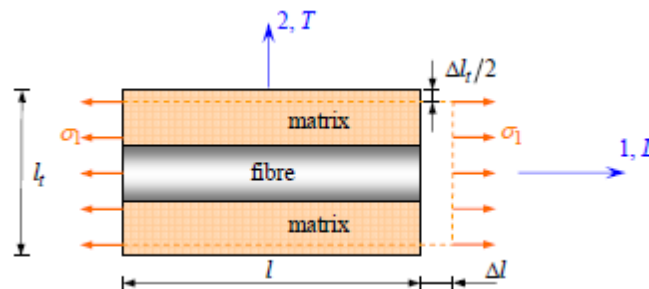
- **Μηχανική προσέγγιση**

Η μηχανική προσέγγιση ανήκει στη κατηγορία των ημι-αναλυτικών μεθόδων και βασίζεται στις παραδοχές:

- Μήτρα συνδετικού υλικού (φάση-1): Υλικό ομοιογενές, γραμμικά ελαστικό και ισότροπο με μέτρο ελαστικότητας  $E_m$ , λόγο Poisson  $\nu_m$  και μέτρο διάτμησης  $G_m$ .
- Ίνες ενίσχυσης (φάση-2): Υλικό ομοιογενές, ισότροπο και γραμμικά ελαστικό, με ενιαία κατεύθυνση προσανατολισμού, με μέτρο ελαστικότητας  $E_f$ , λόγο Poisson  $\nu_f$  και μέτρο διάτμησης  $G_f$ .

- **Διάμηκες Μέτρο Ελαστικότητας  $E_L$**

Το διάμηκες μέτρο ελαστικότητας προσδιορίζεται με την εφαρμογή διαμήκη μονοαξονικού εφελκυσμού σε ένα αντιπροσωπευτικό στοιχείου όγκου (σχήμα)



#### Διαμήκης μονοαξονικός εφελκυσμός

Υποθέτουμε για χάρη ευκολίας, την ομοιόμορφη και ίση επιμήκυνση της μήτρας και της ίνας. Αν  $\Delta l$  είναι η διαμήκης επιμήκυνση του δοκιμίου, τότε προκύπτει η διαμήκης τροπή του δοκιμίου

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta l}{l}$$

Η ίδια τροπή εμφανίζεται στην μήτρα και στην ίνα. Οπότε

$$\varepsilon_m = \varepsilon_f = \varepsilon_1$$

Επειδή υποθέτουμε ότι η μήτρα και η ίνα του δοκιμίου έχουν γραμμικά ελαστική συμπεριφορά, οι μηχανικές τάσεις που εμφανίζονται στην μήτρα και στην ίνα θα πρέπει να ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\begin{aligned}\sigma_m &= E_m \varepsilon_1 \\ \sigma_f &= E_f \varepsilon_1\end{aligned}$$

Η συνισταμένη φόρτιση που εφαρμόζεται στο δοκίμιο είναι

$$F_1 = \sigma_m S_m + \sigma_f S_f,$$

όπου  $S_f$  και  $S_m$  είναι το εμβαδόν της εγκάρσιας διατομής της ίνας και της μήτρας, αντίστοιχα.

Αν  $S$  είναι το συνολικό εμβαδόν της εγκάρσιας διατομής του δοκιμίου, η διαμήκης τάση που αναπτύσσεται στο δοκίμιο θα δίνεται από τη σχέση  $\sigma_1 = F_1/S$ , οπότε

$$\sigma_1 = \sigma_m V_m + \sigma_f V_f,$$

όπου  $V_f$  και  $V_m$  είναι το κλάσμα όγκου των ινών και της μήτρας, αντίστοιχα.

Επειδή, εξ' ορισμού, για το διάμηκες μέτρο ελαστικότητας ισχύει

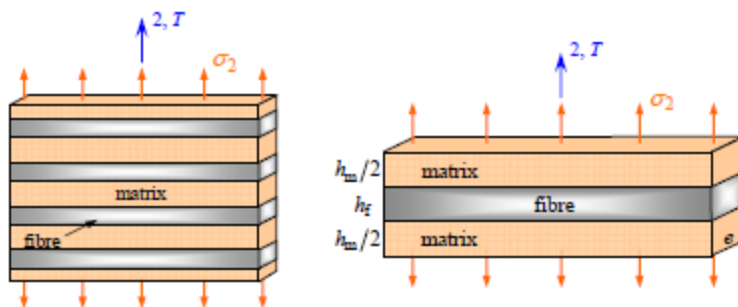
$$\sigma_1 = E_L \varepsilon_1,$$

προκύπτει τελικά η σχέση για το διάμηκες μέτρο ελαστικότητας του σύνθετου υλικού

$$E_L = E_m V_m + E_f V_f.$$

- **Εγκάρσιο Μέτρο Ελαστικότητας  $E_T$**

Το εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας προσδιορίζεται με την εφαρμογή εγκάρσιου μονοαξονικού εφελκυσμού σε ένα αντιπροσωπευτικό στοιχείου όγκου (σχήμα)



**Εγκάρσιος μονοαξονικός εφελκυσμός**

Η συνολική εγκάρσια επιμήκυνση του δοκιμίου προκύπτει από το άθροισμα των επιμέρους επιμηκύνσεων της μήτρας και της ίνας. Έτσι έχουμε:

$$\Delta l_2 = \varepsilon_m h_m + \varepsilon_f h_f$$

και η εγκάρσια τροπή που εμφανίζεται θα έχει τη μορφή

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta l_2}{h_m + h_f} = \varepsilon_m \frac{h_m}{h_m + h_f} + \varepsilon_f \frac{h_f}{h_m + h_f} = \varepsilon_m V_m + \varepsilon_f V_f.$$

Επειδή εξ' ορισμού ισχύει

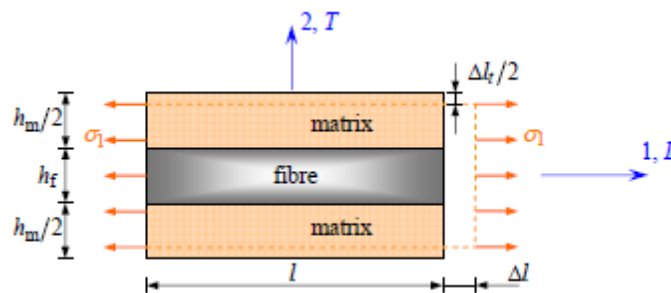
$$\sigma_2 = E_T \varepsilon_2,$$

προκύπτει τελικά η σχέση για το εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας του σύνθετου υλικού

$$\boxed{\frac{1}{E_T} = \frac{1}{E_m} V_m + \frac{1}{E_f} V_f.}$$

- **Διαμήκης λόγος Poisson**  $\nu_{LT}$

Ο διαμήκης λόγος Poisson προσδιορίζεται με την εφαρμογή διαμήκη μονοαξονικού εφελκυσμού σε ένα αντιπροσωπευτικό στοιχείου όγκου (σχήμα)



### Διαμήκης εφελκυσμός

Όπως ισχύει και προηγούμενα, κατά τη διαδικασία του διαμήκη εφελκυσμού, η μήτρα και ίνα εμφανίζουν την ίδια διαμήκη τροπή. Επομένως, οι εγκάρσια τροπή για τη μήτρα και την ίνα μπορεί να γραφεί ως:

$$\varepsilon_{2m} = -\nu_m \varepsilon_1$$

$$\varepsilon_{2f} = -\nu_f \varepsilon_1$$

Η εγκάρσια επιμήκυνση του δοκιμίου είναι:

$$\Delta l_2 = -\nu_m \varepsilon_1 h_m - \nu_f \varepsilon_1 h_f$$

και η εγκάρσια τροπή θα δίνεται από τη σχέση:

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta l_2}{h_m + h_f} = -(v_m V_m + v_f V_f) \varepsilon_1.$$

Επειδή εξ' ορισμού

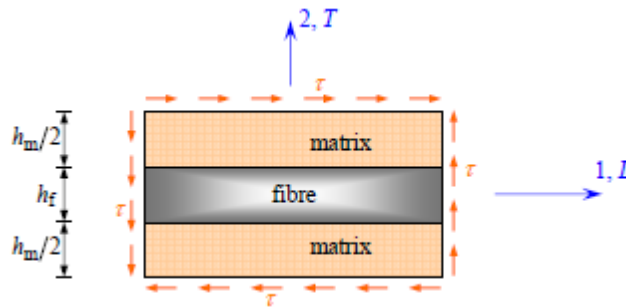
$$v_{LT} = v_{12} = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1},$$

προκύπτει τελικά η σχέση για τον διαμήκη λόγο Poisson του σύνθετου υλικού

$$v_{LT} = v_m V_m + v_f V_f.$$

- **Διάμηκες Μέτρο Διάτμησης  $G_{LT}$**

Το διάμηκες μέτρο διάτμησης προσδιορίζεται με την εφαρμογή απλής διάτμησης στο (L-T)-επίπεδο, σε ένα αντιπροσωπευτικό στοιχείου όγκου του σύνθετου υλικού (σχήμα)

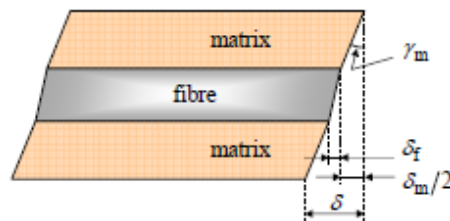


### Απλή διάτμηση στο (L-T)-επίπεδο του δοκιμίου

Η ίδια διατμητική τάση που εφαρμόζεται στο δοκίμιο, εφαρμόζεται τόσο στη μήτρα όσο και στην ίνα. Επομένως, οι διατμητικές τροπές που αναπτύσσονται στη μήτρα και στην ίνα θα δίνονται από τις σχέσεις:

$$\gamma_f = \frac{\tau}{G_f} \quad \text{και} \quad \gamma_m = \frac{\tau}{G_m}$$

Οι αντίστοιχες μετατοπίσεις που προκαλούνται στη μήτρα και την ίνα δίνονται από τις σχέσεις (σχήμα):



### Διατμητικές τροπές στη μήτρα και την ίνα του δοκιμίου

$$\delta_f = \frac{h_f}{\gamma_f} \quad \text{και} \quad \delta_m = \frac{h_m}{\gamma_m},$$

και η ολική διατμητική μετατόπιση του δοκιμίου θα δίνεται από τη σχέση (σχήμα)

$$\delta = \delta_m + \delta_f = h_m \gamma_m + h_f \gamma_f.$$

Τότε, η διατμητική τροπή του δοκιμίου θα δίνεται από τη σχέση,

$$\gamma = \frac{\delta}{h_m + h_f} = \gamma_m V_m + \gamma_f V_f$$

Επειδή εξ' ορισμού ισχύει

$$\gamma = \frac{\tau}{G_{LT}},$$

προκύπτει τελικά η σχέση για το διαμήκες μέτρο διάτμησης του σύνθετου υλικού

$$\boxed{\frac{1}{G_{LT}} = \frac{1}{G_m} V_m + \frac{1}{G_f} V_f.}$$

Οι παραπάνω ημι-αναλυτικές σχέσεις για τα μέτρα ελαστικότητας, το λόγο Poisson και το μέτρο διάτμησης που προσδιορίστηκαν με βάση τις παραδοχές της μηχανικής προσέγγισης, αποτελούν μια πρώτη εκτίμηση των ιδιοτήτων του σύνθετου υλικού και η ακρίβειά τους θα πρέπει να επιβεβαιώνεται και πειραματικά. Σειρά πειραμάτων έχει δείξει ότι η μέθοδος αυτή είναι αρκετά ακριβής για τον προσδιορισμό της τιμής του  $E_L$  και του  $\nu_{LT}$  όχι όμως και για τον προσδιορισμό της τιμής των  $E_T$  και  $G_{LT}$ .

### 3.3.5 Ο Νόμος της Σύνθεσης

Ο «νόμος τη σύνθεσης» (rule of mixtures) εκφράζει τα ποσοστά συμμετοχής του συνδετικού υλικού (μήτρα) και των ινών ενίσχυσης στη δημιουργία του σύνθετου υλικού και είναι χρήσιμος στον προσδιορισμό των μηχανικών ιδιοτήτων του υλικού.

- **Λόγοι όγκου**

Σε ένα αντιπροσωπευτικό στοιχείο όγκου του σύνθετου υλικού, ορίζονται:

$v_c$ : Ο συνολικός όγκος του δοκιμίου

$v_m$ : Ο όγκος της μήτρας στο δοκίμιο

$v_f$  : Ο όγκος των ινών στο δοκίμιο

$v_v$  : Ο όγκος των φυσαλίδων αέρα στο δοκίμιο

Προφανώς, ισχύει:

$$v_c = v_m + v_f + v_v$$

Ορίζονται ακόμα οι αδιάστατες ποσότητες:

$$V_f = \frac{v_f}{v_c} : \text{λόγος όγκου των ινών (fiber volume fraction)}$$

$$V_m = \frac{v_m}{v_c} : \text{λόγος όγκου της μήτρας (matrix volume fraction)}$$

$$V_v = \frac{v_v}{v_c} : \text{λόγος όγκου των φυσαλίδων (void volume fraction)}$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι για τα μεγέθη αυτά ισχύει:

$$V_m + V_f + V_v = 1$$

Η παραπάνω σχέση εκφράζει το νόμο της σύνθεσης ενός σύνθετου υλικού, με όρους όγκων των συστατικών του.

- **Λόγοι μάζας**

Αν στο αντιπροσωπευτικό στοιχείο όγκου του σύνθετου υλικού, ορίζονται:

$w_c$  : Η συνολική μάζα του δοκιμίου

$w_m$  : Η συνολική μάζα της μήτρας στο δοκίμιο

$w_f$  : Η συνολική μάζα των ινών στο δοκίμιο.

Τότε, προφανώς ισχύει:

$$W_c = w_m + w_f$$

και ορίζονται οι ακόλουθοι λόγοι μάζας:

$$W_f = \frac{w_f}{w} : \text{λόγος μάζας των ινών (fiber mass fraction)}$$

$W_m = \frac{w_m}{w}$  : λόγος μάζας της μήτρας (matrix mass fraction)

Για τα μεγέθη αυτά ισχύει:

$$W_m + W_f = 1$$

Η παραπάνω σχέση εκφράζει το νόμο της σύνθεσης ενός σύνθετου υλικού, με όρους μάζας των συστατικών του.

- **Πυκνότητες**

Αν

$\rho_c$  : Η πυκνότητα μάζας του δοκιμίου

$\rho_m$  : Η πυκνότητα μάζα της μήτρας στο δοκίμιο

$\rho_f$  : Η πυκνότητα μάζα των ινών στο δοκίμιο,

τότε αποδεικνύεται εύκολα ότι ισχύουν οι σχέσεις:

$$W_f = \frac{\rho_f}{\rho_c} V_f, \quad W_m = \frac{\rho_m}{\rho_c} V_m$$

και

$$\rho_c = \rho_m V_m + \rho_f V_f, \quad \frac{1}{\rho_c} = \frac{1}{\rho_m} W_m + \frac{1}{\rho_f} W_f$$

—xxx—