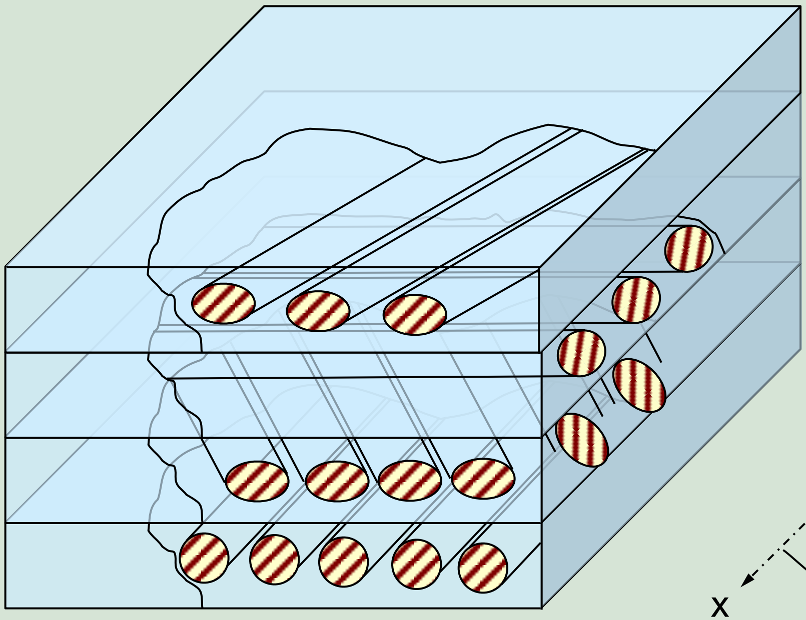
Ειδικά Θέματα Μηχανικής

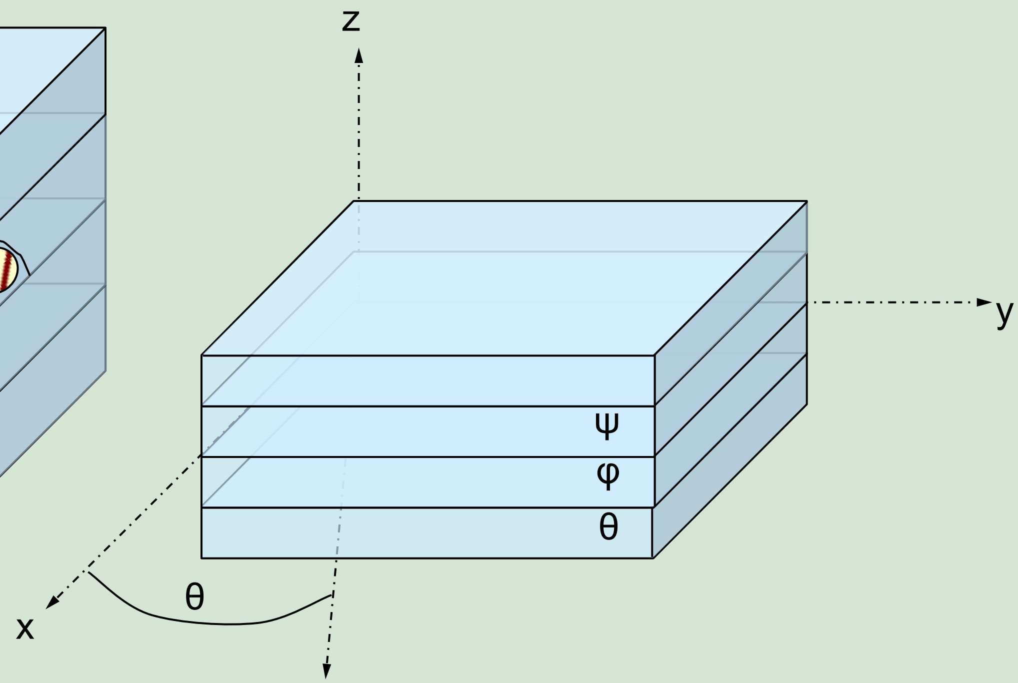
(Μηχανική Σύνθετων Υλικών)

Κεφάλαιο 4 (4.1)

ΜΑΚΡΟΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΠΟΛΥΣΤΡΩΤΟΥ ΠΛΑΚΟΣ

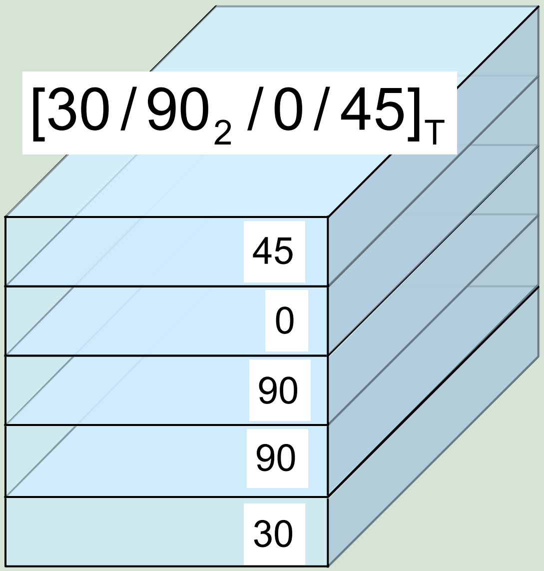
Τι είναι η πολύστρωτη δομή;

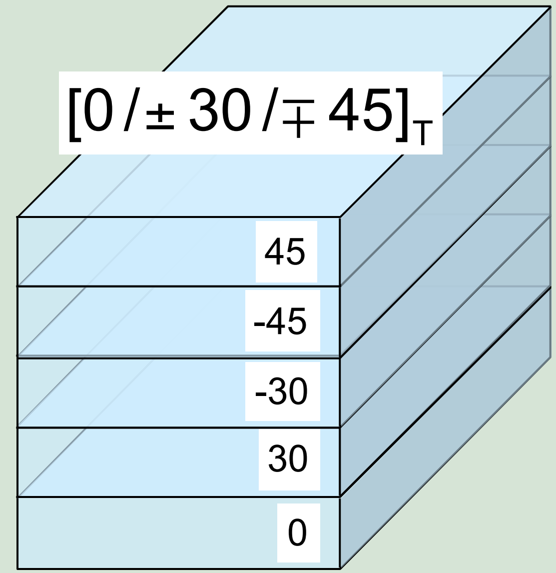


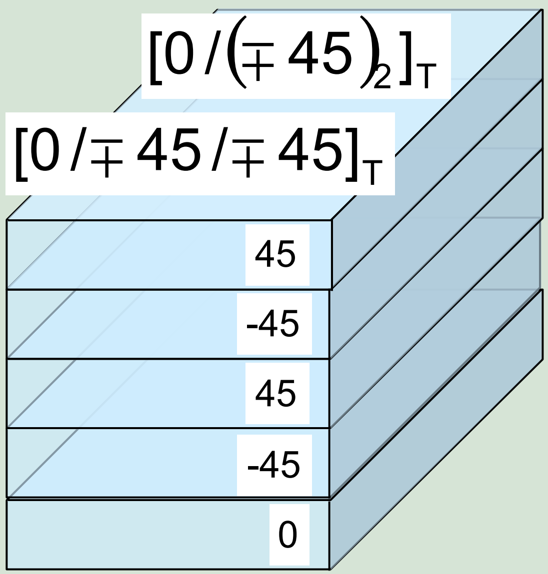


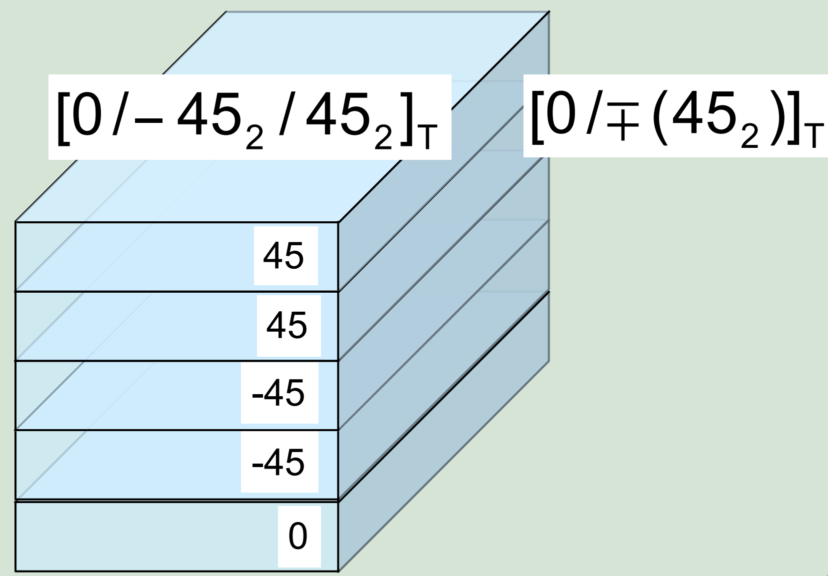
Κωδικός περιγραφής πολύστρωτης διάταξης: $[\theta\,/\,\varphi\,/\,\psi\,/\ldots]$

Βασικά στοιχεία κωδικού

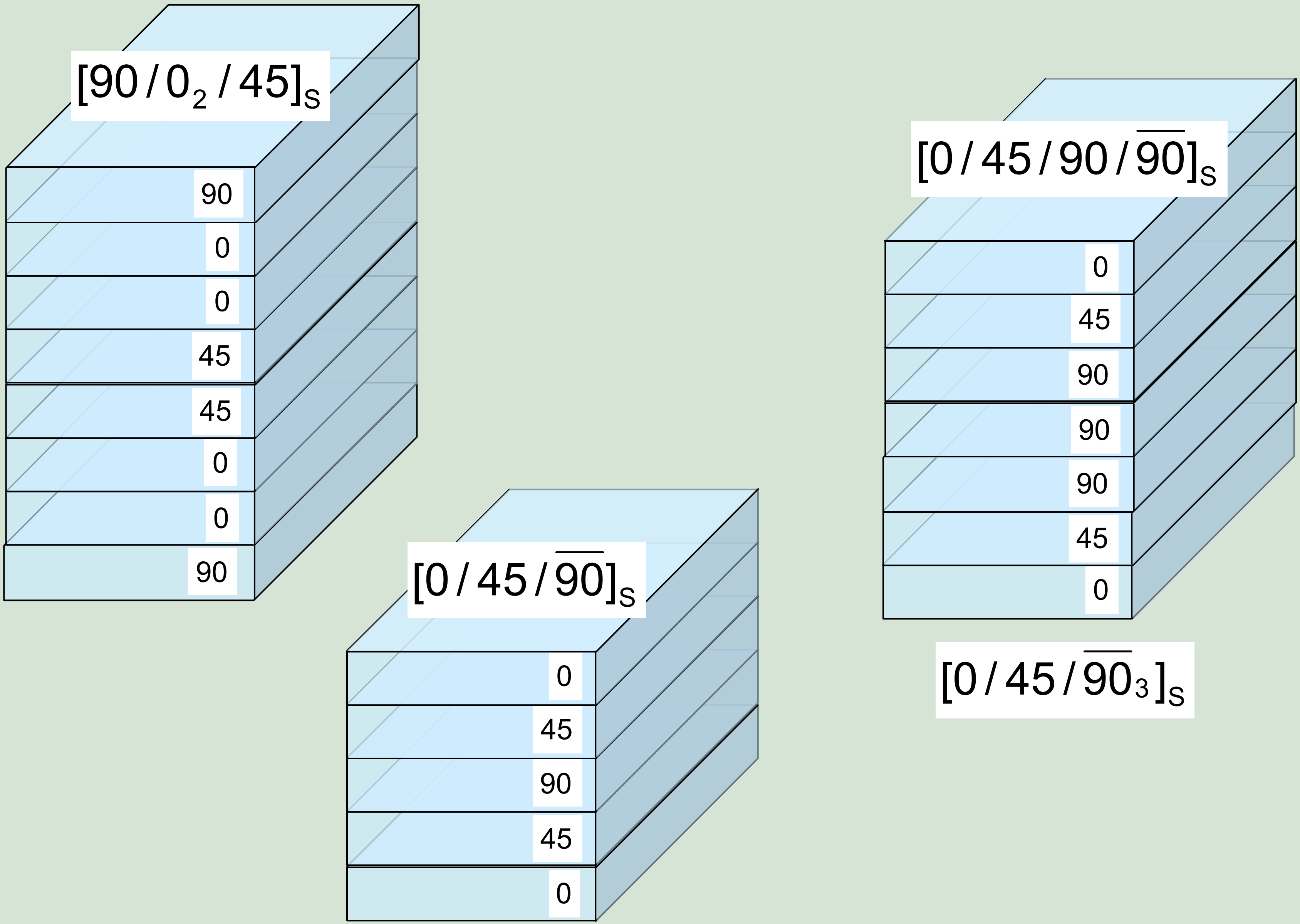




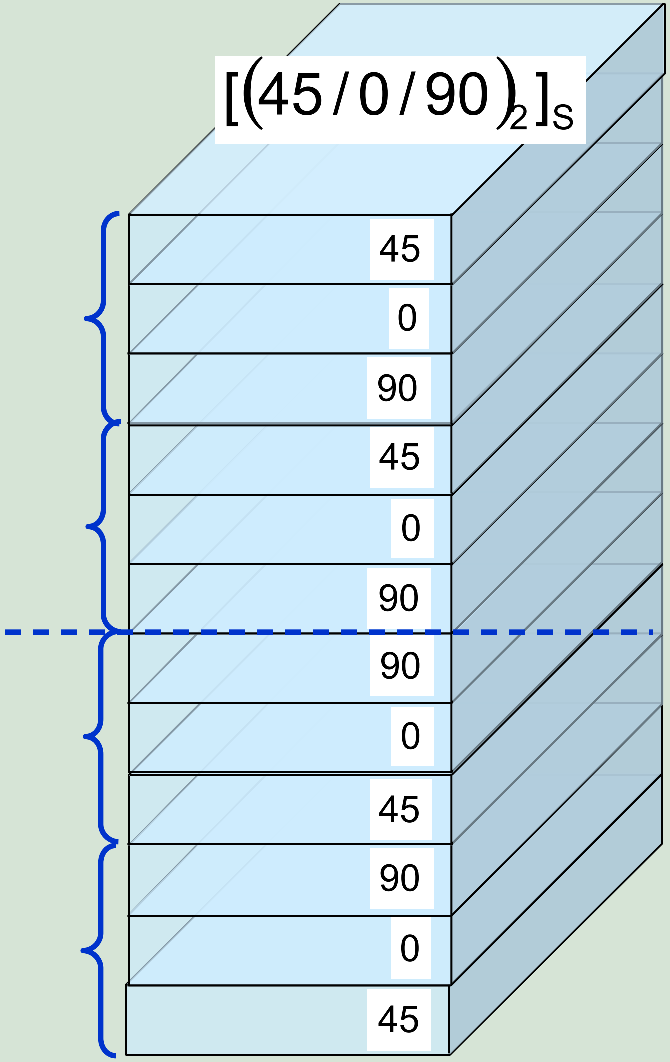


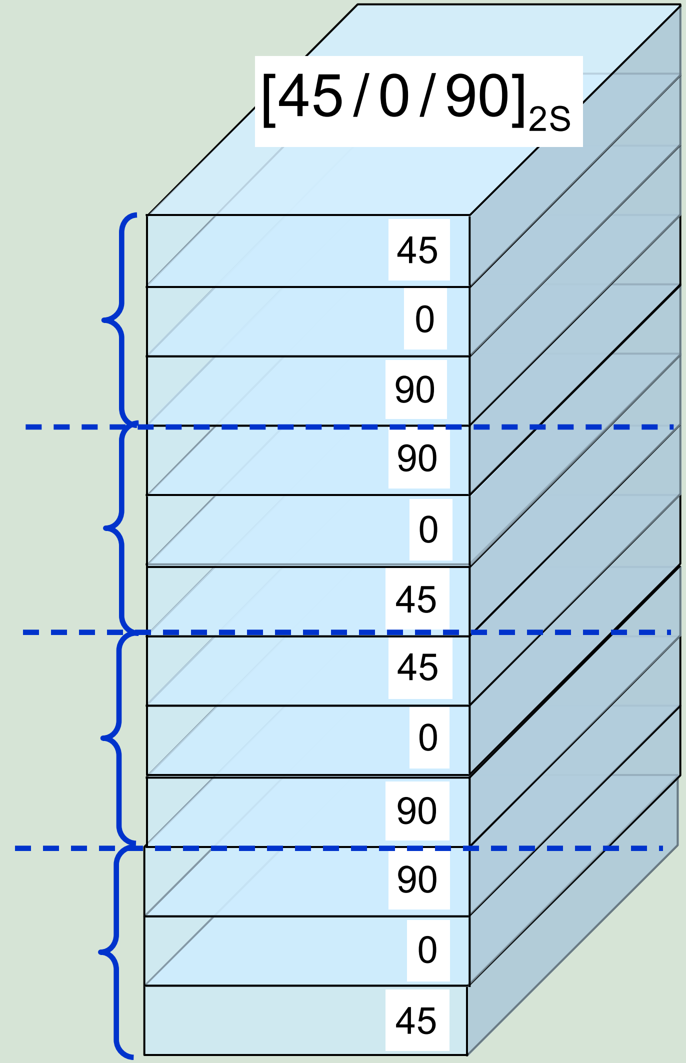


Συμμετρικές πολύστρωτες διατάξεις



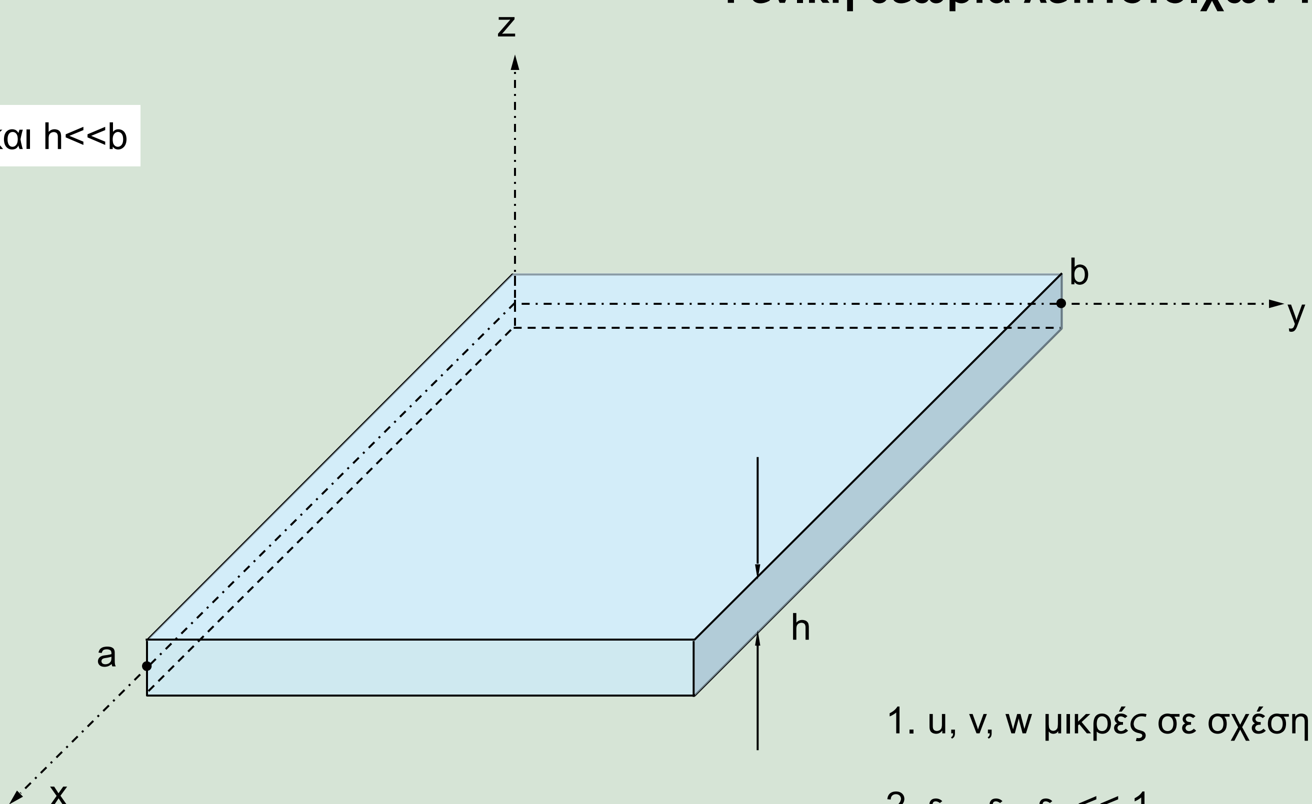
Επαναλαμβανόμενες ομάδες στρώσεων





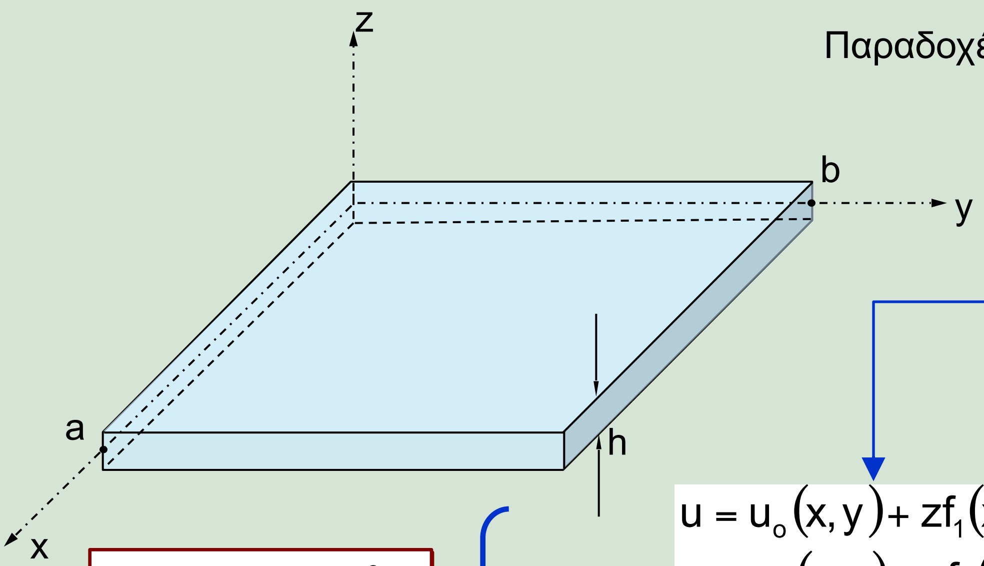
Γενική θεωρία λεπτότοιχων πλακών

h<<a και h<<b



Παραδοχές σχετικά με τις μετατοπίσεις και παραμορφώσεις:

1. u, v, w μικρές σε σχέση με το πάχος h
2. ε_x, ε_y, ε_s << 1
3. ε_{xz}, ε_{yz} αμελητέες
4. u, v γραμμικές συναρτήσεις της κατά το πάχος μεταβλητής z
5. ε_z αμελητέα
6. Η πλάκα αντιδρά σε πλευρικά (lateral) και συνεπίπεδα (in-plane) φορτία αναπτύσσοντας εγκάρσιες διατμητικές τάσεις καθώς και τάσεις στο επίπεδο (x, y) αλλά όχι θλιβόμενη ή εφελκυόμενη κατά το πάχος



Παραδοχές:

1. u, v, w < h
2. ε_x, ε_y, ε_s << 1
3. ε_{xz}, ε_{yz} αμελητέες
4. u, v γραμμικές συναρτήσεις της κατά το πάχος μεταβλητής z
5. ε_z αμελητέα
6. σ_z αμελητέα

$$u = u_o(x,y) + z f_1(x,y)$$
$$v = v_o(x,y) + z f_2(x,y)$$

$$2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$
$$2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

$$2\varepsilon_{xz} = f_1(x,y) + \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$
$$2\varepsilon_{yz} = f_2(x,y) + \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \Rightarrow w = w(x,y) = w_o(x,y)$$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= u_o(x,y) - z\frac{\partial w}{\partial x} \\ v &= v_o(x,y) - z\frac{\partial w}{\partial y} \\ w &= w_o(x,y) \end{aligned}}$$

Αρα, το πεδίο μετατοπίσεων της πλακός μπορεί να εκφρασθεί συνάρτησει των μετατοπίσεων του μέσου επιπέδου της: **Θεωρία Love-Kirchhoff:**

2D γενίκευση του πεδίου μετατοπίσεων Bernoulli στην τεχνική θεωρία κάμψης δοκού

Τελικά, οι μόνες μη μηδενικές συνιστώσες του τανυστή παραμόρφωσης:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \cancel{\varepsilon_{xz}} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \cancel{\varepsilon_{yz}} \\ \cancel{\varepsilon_{xz}} & \cancel{\varepsilon_{yz}} & \cancel{\varepsilon_{zz}} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_s \end{Bmatrix} \rightarrow$$

$$u = u_o(x,y) - z\frac{\partial w}{\partial x}$$

$$v = v_o(x,y) - z\frac{\partial w}{\partial y}$$

$$w = w_o(x,y)$$

$$\underbrace{\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_s = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}}$$

$$\underbrace{\varepsilon_x^o = \frac{\partial u_o(x,y)}{\partial x}, \quad \varepsilon_y^o = \frac{\partial v_o(x,y)}{\partial y}, \quad \varepsilon_s^o = \frac{\partial u_o(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v_o(x,y)}{\partial x} \qquad k_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad k_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad k_s = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \varepsilon_s^o \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_s \end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^o + z\mathbf{k}$$

k_x: καμπυλότητα στην x διεύθυνση$=1/\rho_x$

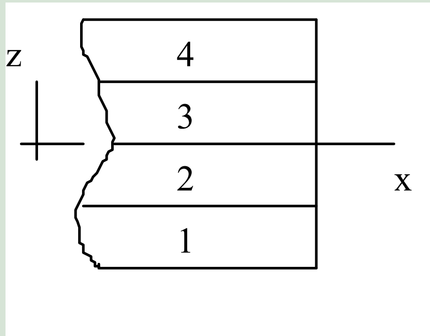
k_y: καμπυλότητα στην y διεύθυνση$=1/\rho_y$

k_s: συστροφή της επιφάνειας

Η κατανομή του διανύσματος παραμόρφωσης επομένως κατά το πάχος της πλακός είναι πάντα γραμμική, ενώ το πεδίο τάσεων, από τον νόμο Hooke, γιά πολύστρωτη πλάκα θα δίδεται ως:

$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{o} + z\mathbf{k}$

$\sigma^{(k)} = \mathbf{Q}^{(k)}\varepsilon$



$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_s \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss} \end{bmatrix}^k \left[\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \varepsilon_s^o \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_s \end{Bmatrix} \right]$$

Ανακεφαλαιώνοντας, όταν είναι γνωστές οι συνιστώσες του διανύσματος μετατόπισης του μέσου επιπέδου της πλακός:

$$\begin{Bmatrix} u_o(x,y) \\ v_o(x,y) \\ w_o(x,y) \end{Bmatrix}$$

$$\varepsilon_x^o = \frac{\partial u_o(x,y)}{\partial x},\ \varepsilon_y^o = \frac{\partial v_o(x,y)}{\partial y},\ \varepsilon_s^o = \frac{\partial u_o(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v_o(x,y)}{\partial x}$$

$$k_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ k_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},\ k_s = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

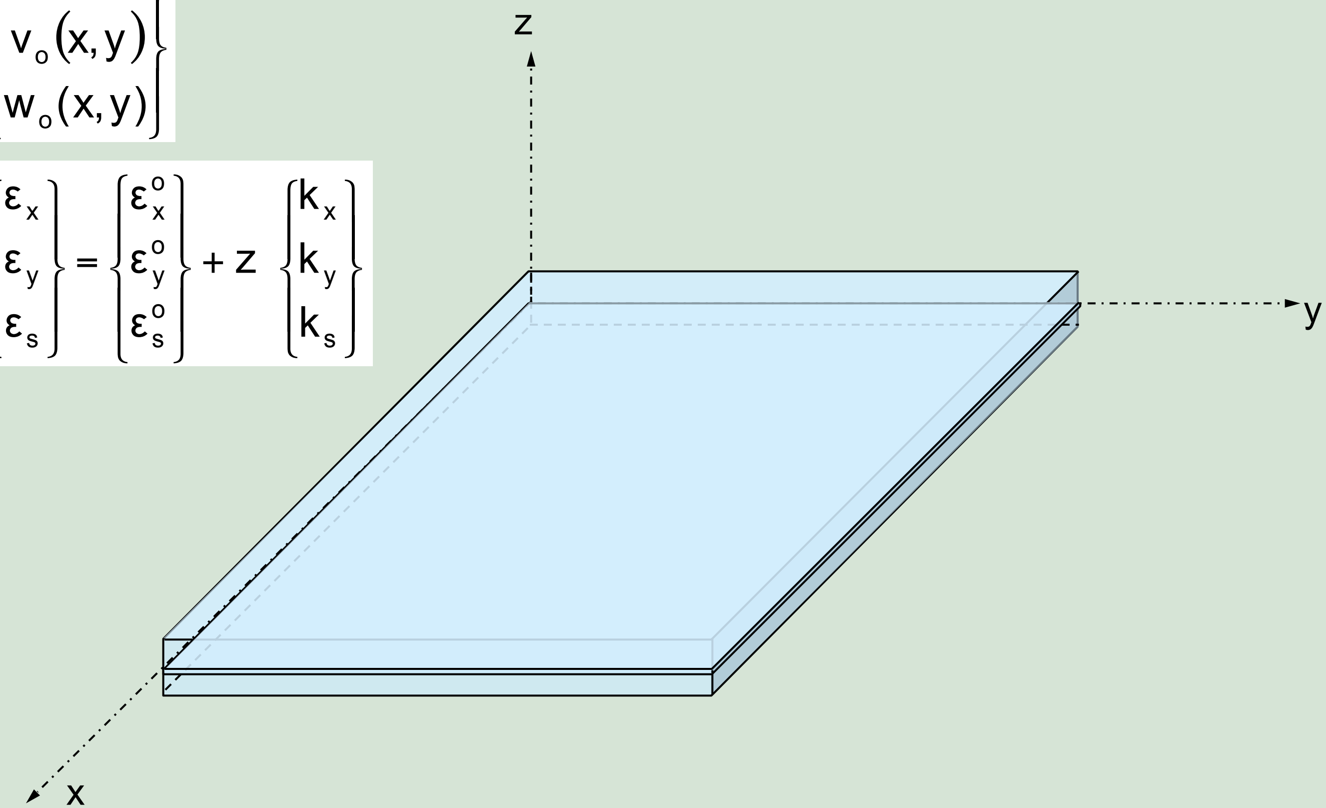
$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \varepsilon_s^o \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_s \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_s \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss} \end{bmatrix}^k \left[\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \varepsilon_s^o \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_s \end{Bmatrix} \right]$$

Ανηγμένες δυνάμεις και ροπές στο μέσο επίπεδο

$$\begin{Bmatrix} u_o(x,y) \\ v_o(x,y) \\ w_o(x,y) \end{Bmatrix}$$

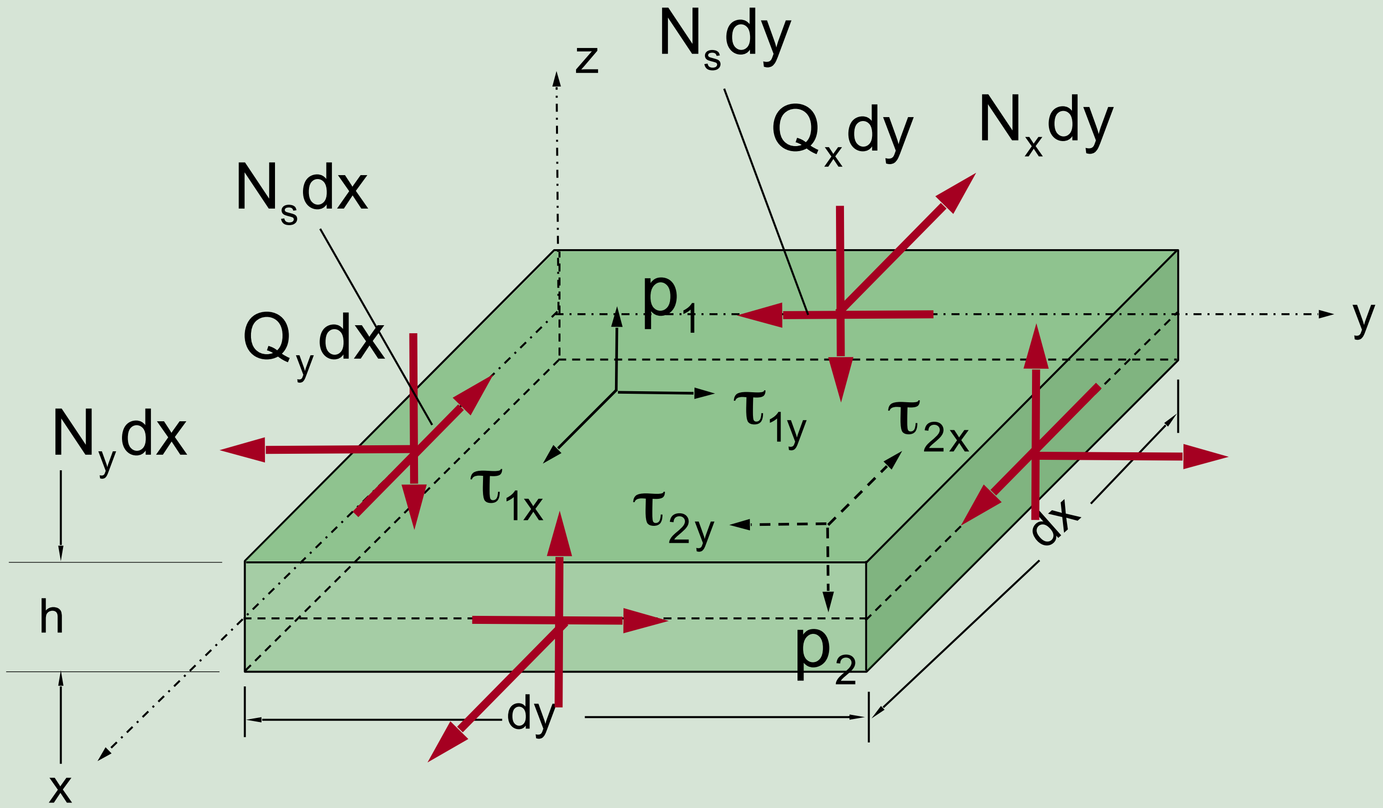
$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \varepsilon_s^o \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_s \end{Bmatrix}$$



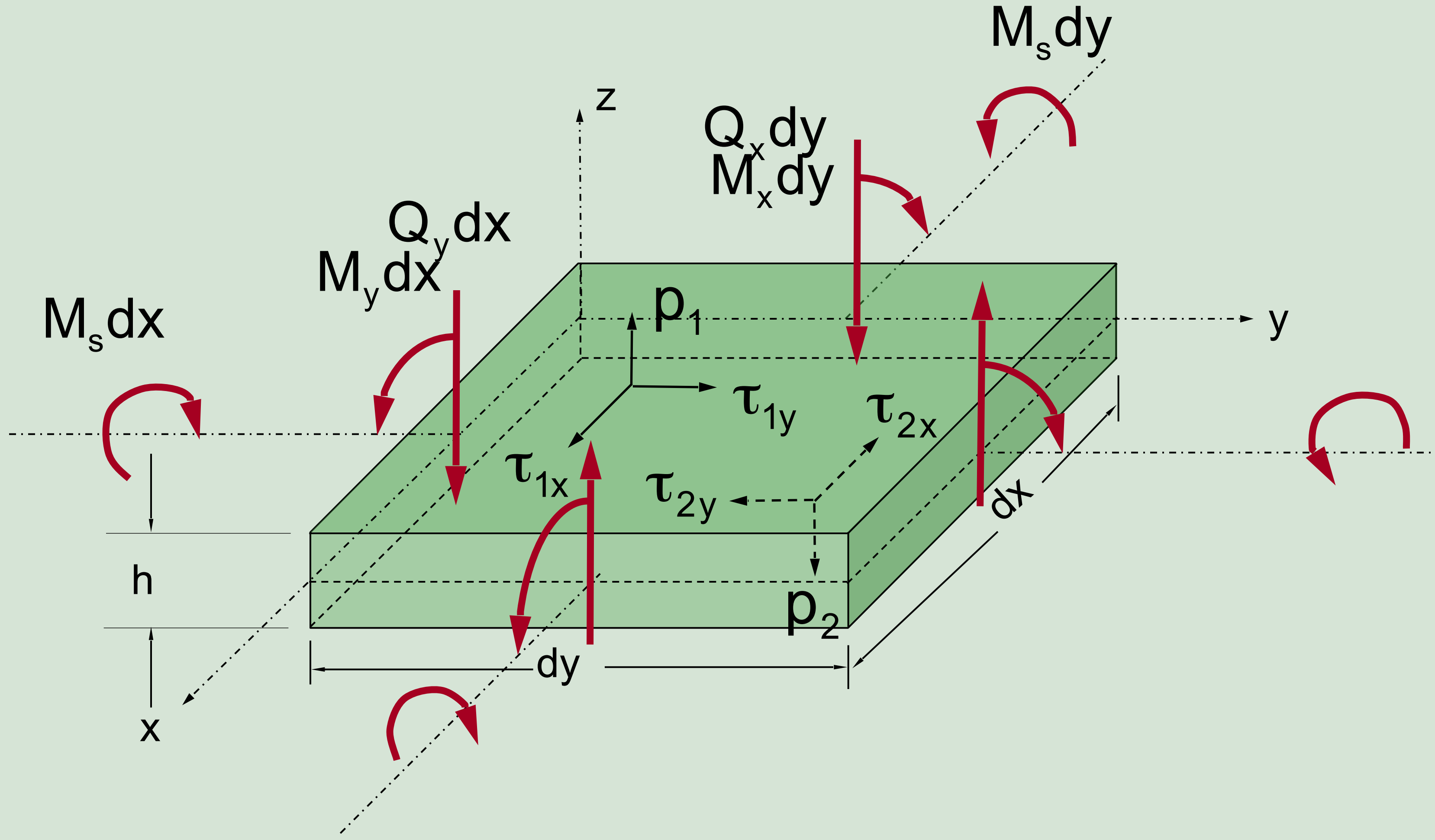
Αντί του συστήματος των τάσεων σε όλο το πάχος της πλακός, χρησιμοποιούμε ένα στατικά ισοδύναμο σύστημα ανηγμένων δυνάμεων και ροπών που ασκούνται στο μέσο επίπεδο:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_s \end{Bmatrix} dz \qquad \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_s \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_s \end{Bmatrix} zdz \qquad \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} dz,$$

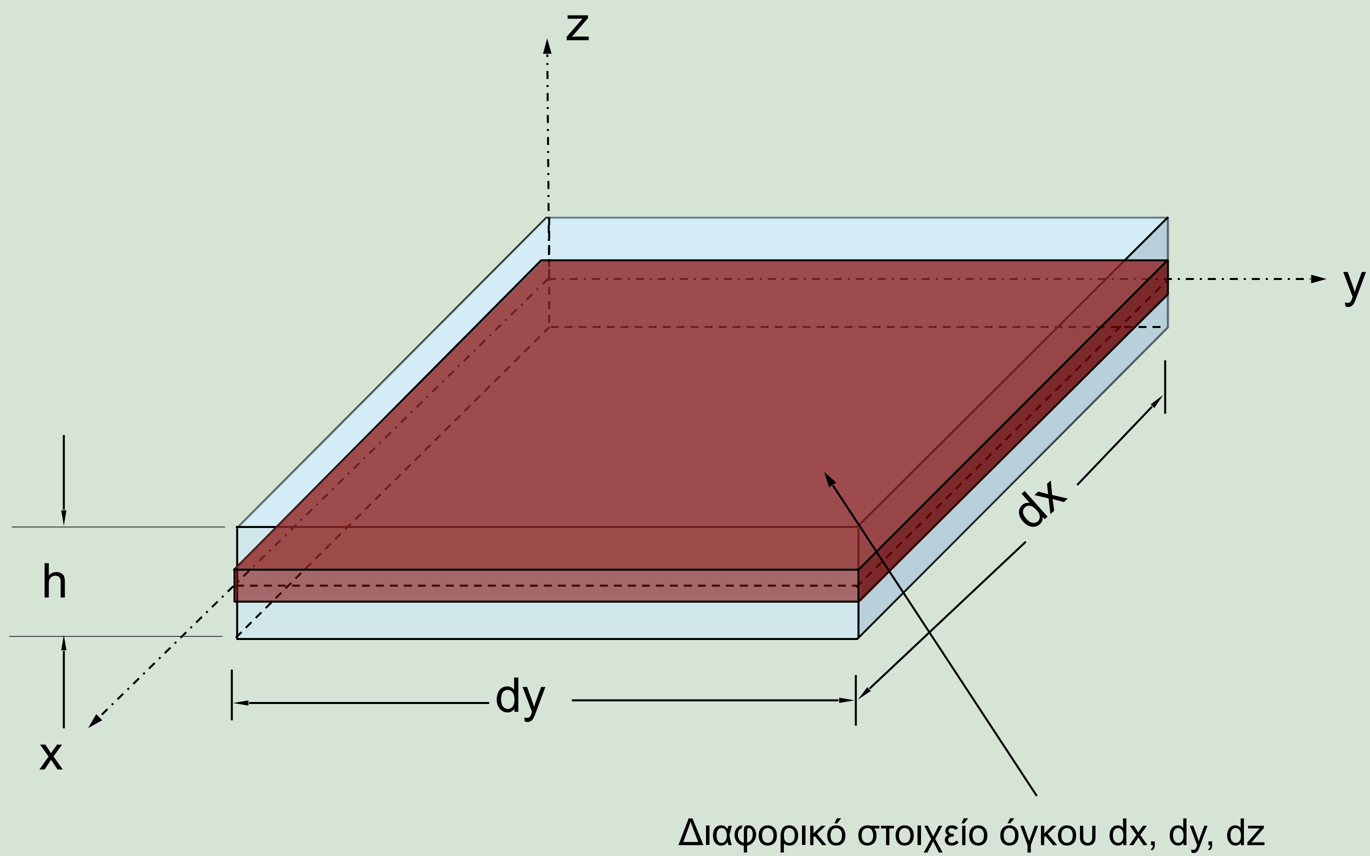
Ανηγμένες δυνάμεις σε διαφορικό στοιχείο πλάκας



Ανηγμένες ροπές σε διαφορικό στοιχείο πλάκας



Εξισώσεις ισορροπίας πλακών



Εξισώσεις ισορροπίας: $\sigma_{ij,j} + \overline{F}_i = 0 \, , i, j = 1, \ldots, 3$

Αμελώντας τις πεδιακές δυνάμεις:

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_s}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z}=0$$

$$\frac{\partial\sigma_s}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial z}=0$$

$$\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}=0$$

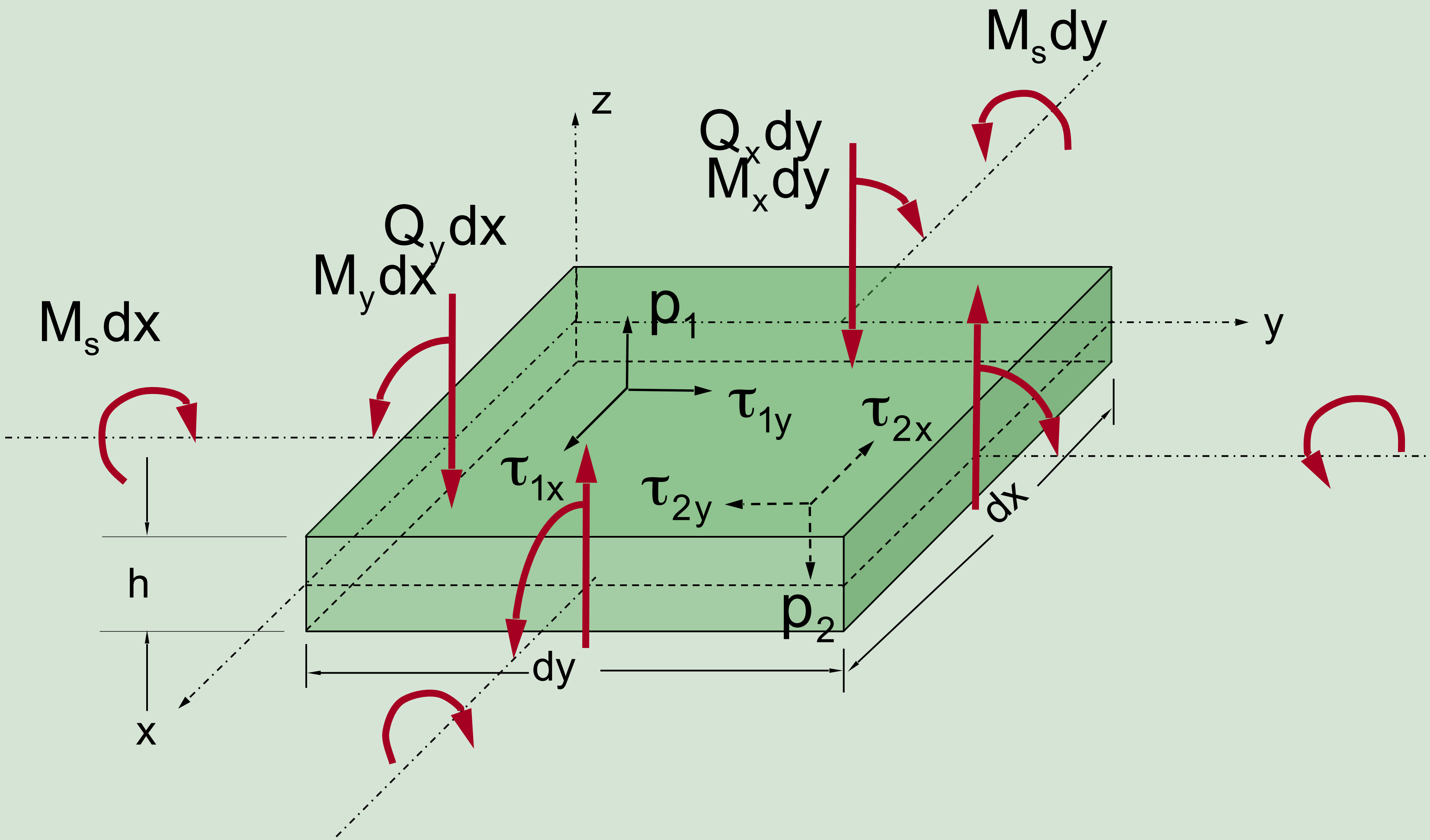
$$\begin{Bmatrix}M_x\\M_y\\M_s\end{Bmatrix}=\int_{-h/2}^{h/2}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\\sigma_y\\\sigma_s\end{Bmatrix}zdz$$

$$\int_{-h/2}^{h/2}\left(z\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+z\frac{\partial\sigma_s}{\partial y}+z\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z}\right)dz=0$$

ή $$\frac{\partial}{\partial x}\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_x zdz+\frac{\partial}{\partial y}\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_s zdz+\int_{-h/2}^{h/2}z\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z}dz=0$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_s}{\partial y}+[z\sigma_{xz}]_{-h/2}^{h/2}-\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{xz}dz=0$$

$$\tau_{1x}=\sigma_{xz}\Big|_{z=\frac{+h}{2}}\qquad \tau_{2x}=\sigma_{xz}\Big|_{z=\frac{-h}{2}}$$



$M_s dy$
z
$Q_x dy$
$M_x dy$
$Q_y dx$
$M_y dx$
$M_s dx$
p_1
y
τ_{1y}
τ_{2x}
τ_{1x}
τ_{2y}
dx
h
p_2
dy
x

Αμελώντας τις πεδιακές δυνάμεις:

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_s}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z}=0$$

$$\frac{\partial\sigma_s}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial z}=0$$

$$\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}=0$$

$$\begin{Bmatrix}M_x\\M_y\\M_s\end{Bmatrix}=\int_{-h/2}^{h/2}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\\sigma_y\\\sigma_s\end{Bmatrix}zdz$$

$$\begin{Bmatrix}Q_x\\Q_y\end{Bmatrix}=\int_{-h/2}^{h/2}\begin{Bmatrix}\sigma_{xz}\\\sigma_{yz}\end{Bmatrix}dz,$$

$$\int_{-h/2}^{h/2}\left(z\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+z\frac{\partial\sigma_s}{\partial y}+z\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z}\right)dz=0$$

ή $$\frac{\partial}{\partial x}\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_x zdz+\frac{\partial}{\partial y}\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_s zdz+\int_{-h/2}^{h/2}z\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z}dz=0$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_s}{\partial y}+[z\sigma_{xz}]_{-h/2}^{h/2}-\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{xz}dz=0$$

$$\tau_{1x}=\sigma_{xz}\big|_{z=\frac{+h}{2}}\qquad \tau_{2x}=\sigma_{xz}\big|_{z=\frac{-h}{2}}$$

$$\tau_{1y}=\sigma_{yz}\big|_{z=\frac{+h}{2}}\qquad \tau_{2y}=\sigma_{yz}\big|_{z=\frac{-h}{2}}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}$$

$$\boxed{\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_s}{\partial y}-Q_x+\frac{h}{2}(\tau_{1x}+\tau_{2x})=0}$$

$$\boxed{\frac{\partial M_s}{\partial x}+\frac{\partial M_y}{\partial y}-Q_y+\frac{h}{2}(\tau_{1y}+\tau_{2y})=0}$$

Εξισώσεις ισορροπίας ανηγμένων ροπών περί τους άξονες x και y

Εξισώσεις ισορροπίας ανηγμένων δυνάμεων στις διευθύνσεις x, y και z

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_s}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}=0$$

$$\frac{\partial \sigma_s}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z}=0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}=0$$

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_s \end{Bmatrix} dz$$

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} dz,$$

$$\int_{-h/2}^{h/2}\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_s}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}\right)dz=0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_x dz+\frac{\partial}{\partial y}\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_s dz+\left[\sigma_{xz}\right]_{-h/2}^{h/2}=0$$

$$\tau_{1x}=\sigma_{xz}\Big|_{z=\frac{+h}{2}} \qquad \tau_{2x}=\sigma_{xz}\Big|_{z=\frac{-h}{2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{xz} dz+\frac{\partial}{\partial y}\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{yz} dz+\left[\sigma_z\right]_{-h/2}^{h/2}=0$$

$$p_1=\sigma_z\Big|_{z=\frac{+h}{2}} \qquad p_2=\sigma_z\Big|_{z=\frac{-h}{2}}$$

$$\boxed{\frac{\partial N_x}{\partial x}+\frac{\partial N_s}{\partial y}+\tau_{1x}-\tau_{2x}=0}$$

$$\boxed{\frac{\partial N_s}{\partial x}+\frac{\partial N_y}{\partial y}+\tau_{1y}-\tau_{2y}=0}$$

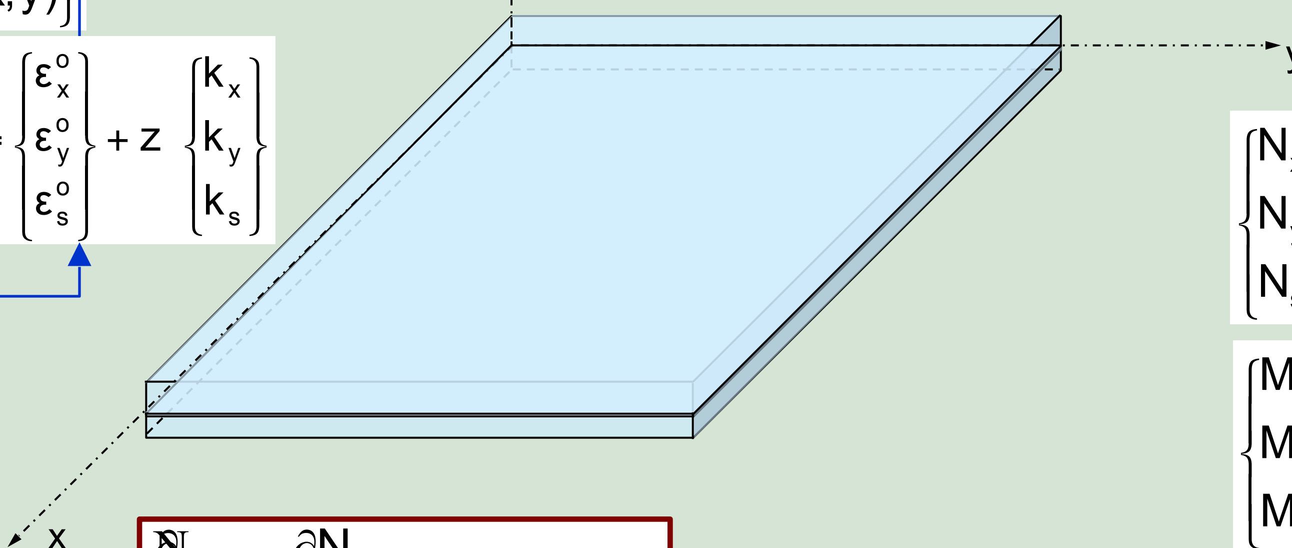
$$\boxed{\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}+p_1-p_2=0}$$

Ανακεφαλαιώνοντας:

$$\begin{Bmatrix} u_o(x,y) \\ v_o(x,y) \\ w_o(x,y) \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_s \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss} \end{bmatrix}^k \left[\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \varepsilon_s^o \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_s \end{Bmatrix} \right]$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \varepsilon_s^o \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_s \end{Bmatrix}$$



$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_s \end{Bmatrix} dz$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_s \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_s \end{Bmatrix} zdz$$

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} dz,$$

$$\boxed{\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_s}{\partial y} + \tau_{1x} - \tau_{2x} = 0}$$

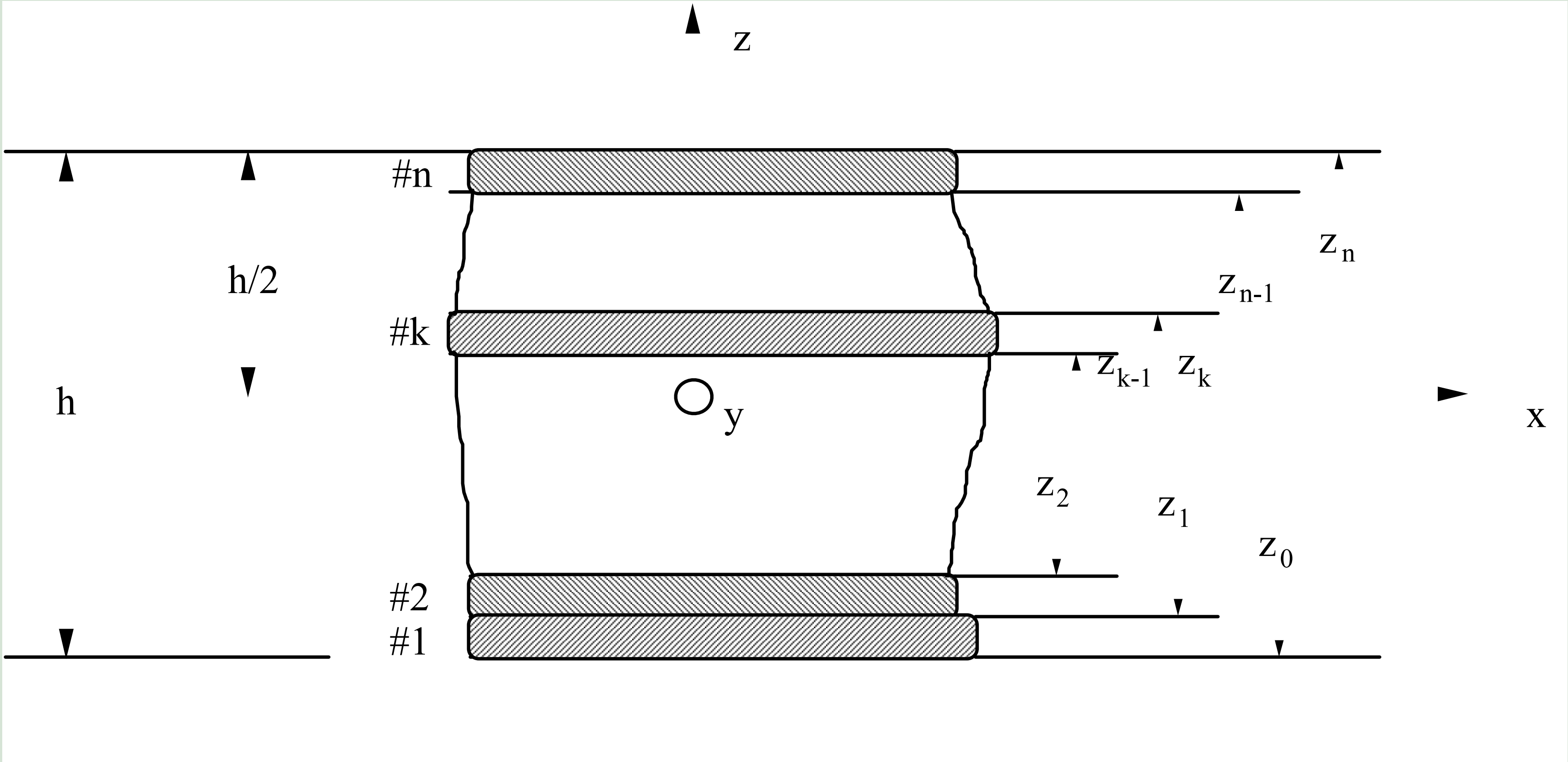
$$\boxed{\frac{\partial N_s}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + \tau_{1y} - \tau_{2y} = 0}$$

$$\boxed{\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p_1 - p_2 = 0}$$

$$\boxed{\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_s}{\partial y} - Q_x + \frac{h}{2}(\tau_{1x} + \tau_{2x}) = 0}$$

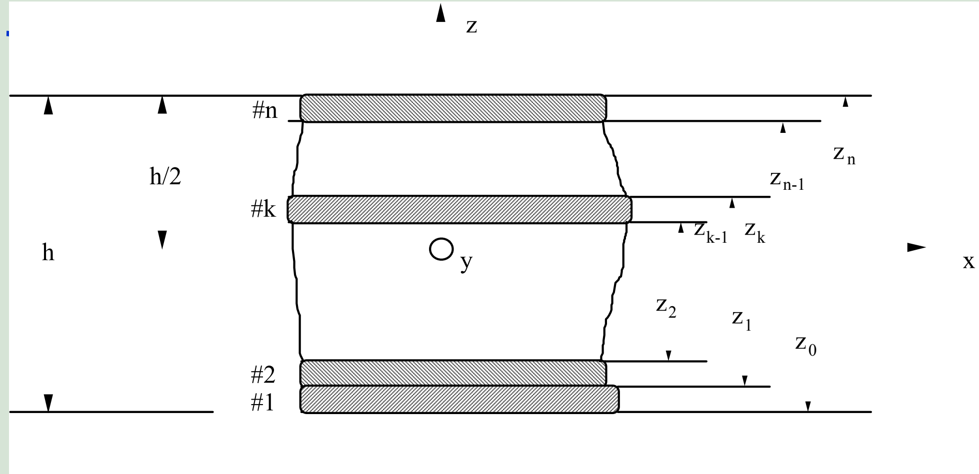
$$\boxed{\frac{\partial M_s}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y + \frac{h}{2}(\tau_{1y} + \tau_{2y}) = 0}$$

Καταστατικές εξισώσεις πολυστρώτου πλακός



Εγκάρσια διατομή πολυστρώτου πλακός, n-στρώσεων

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_s \end{Bmatrix} dz$$



$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_s \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss} \end{bmatrix}^k \left[\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \varepsilon_s^o \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_s \end{Bmatrix} \right]$$

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \left[\int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{xy} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{xs} & Q_{ys} & Q_{ss} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \varepsilon_s^o \end{Bmatrix} dz + \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{xy} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{xs} & Q_{ys} & Q_{ss} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_s \end{Bmatrix} z\,dz \right]$$

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \end{Bmatrix} = \left[\sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{xy} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{xs} & Q_{ys} & Q_{ss} \end{bmatrix}^{(k)} \int_{z_{k-1}}^{z_k} dz \right] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \varepsilon_s^o \end{Bmatrix} + \left[\sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{xy} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{xs} & Q_{ys} & Q_{ss} \end{bmatrix}^{(k)} \int_{z_{k-1}}^{z_k} z\,dz \right] \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_s \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xs} \\ A_{xy} & A_{yy} & A_{ys} \\ A_{xs} & A_{ys} & A_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \varepsilon_s^o \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{xx} & B_{xy} & B_{xs} \\ B_{xy} & B_{yy} & B_{ys} \\ B_{xs} & B_{ys} & B_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_s \end{Bmatrix}$$

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{n} Q_{ij}^{(k)} (z_k - z_{k-1})$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} Q_{ij}^{(k)} (z_k^2 - z_{k-1}^2), \quad i, j = x, y, s.$$

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \left[\int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{xy} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{xs} & Q_{ys} & Q_{ss} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \varepsilon_s^o \end{Bmatrix} dz + \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{xy} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{xs} & Q_{ys} & Q_{ss} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_s \end{Bmatrix} z dz \right]$$

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \end{Bmatrix} = \left[\sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{xy} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{xs} & Q_{ys} & Q_{ss} \end{bmatrix}^{(k)} \int_{z_{k-1}}^{z_k} dz \right] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \varepsilon_s^o \end{Bmatrix} + \left[\sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{xy} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{xs} & Q_{ys} & Q_{ss} \end{bmatrix}^{(k)} \int_{z_{k-1}}^{z_k} z dz \right] \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_s \end{Bmatrix}$$

Κατ' αντίστοιχο τρόπο γιά τις ανηγμένες ροπές:

$$\mathbf{M} = \sum_{k=1}^{n} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \sigma^{(k)} z\,dz = \sum_{k=1}^{n} \left[\int_{z_{k-1}}^{z_k} \mathbf{Q}^{(k)} \varepsilon^{o} z\,dz + \int_{z_{k-1}}^{z_k} \mathbf{Q}^{(k)} \mathbf{k} z^2\,dz \right]$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{xx} & B_{xy} & B_{xs} \\ B_{xy} & B_{yy} & B_{ys} \\ B_{xs} & B_{ys} & B_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \varepsilon_s^o \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{xx} & D_{xy} & D_{xs} \\ D_{xy} & D_{yy} & D_{ys} \\ D_{xs} & D_{ys} & D_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_s \end{Bmatrix}$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} Q_{ij}^{(k)} (z_k^3 - z_{k-1}^3), \qquad i,j = x,y,s.$$

Τελικά:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \\ M_x \\ M_y \\ M_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xs} & B_{xx} & B_{xy} & B_{xs} \\ A_{xy} & A_{yy} & A_{ys} & B_{xy} & B_{yy} & B_{ys} \\ A_{xs} & A_{ys} & A_{ss} & B_{xs} & B_{ys} & B_{ss} \\ B_{xx} & B_{xy} & B_{xs} & D_{xx} & D_{xy} & D_{xs} \\ B_{xy} & B_{yy} & B_{ys} & D_{xy} & D_{yy} & D_{ys} \\ B_{xs} & B_{ys} & B_{ss} & D_{xs} & D_{ys} & D_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \varepsilon_s^o \\ k_x \\ k_y \\ k_s \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^o \\ \mathbf{k} \end{Bmatrix}$$

Καταστατικές εξισώσεις πολυστρώτων πλακών