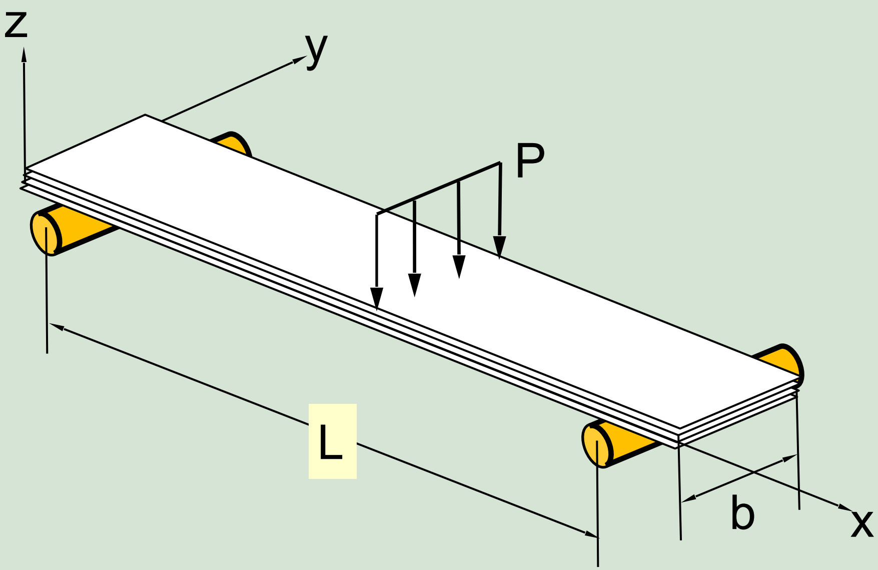
Ειδικά Θέματα Μηχανικής

(Μηχανική Σύνθετων Υλικών)

Κεφάλαιο 5 (5.1)

ΚΑΜΨΗ ΔΟΚΩΝ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗΣ ΠΟΛΥΣΤΡΩΤΗΣ ΔΟΜΗΣ



Για δοκούς με συμμετρική διάταξη στρώσεων και L/b>20 μπορεί να θεωρηθεί προσεγγιστικά ότι τα εντατικά κ… η είναι συνα… μεταβλητής x. Θα ισχύει δηλ. ότι:

$$M_x(x) = \frac{-M(x)}{b} \qquad (\ )$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{xx} & D_{xy} & D_{xs} \\ D_{xy} & D_{yy} & D_{ys} \\ D_{xs} & D_{ys} & D_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_s \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D'_{xx} & D'_{xy} & D'_{xs} \\ D'_{xy} & D'_{yy} & D'_{ys} \\ D'_{xs} & D'_{ys} & D'_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_s \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{D}' = \mathbf{D}^{-1}$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} Q_{ij}^{(k)}(z_k^3 - z_{k-1}^3), \quad i,j = x,y,s.$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_s \end{Bmatrix} = z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_s \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_s \end{Bmatrix}^k = z \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss} \end{bmatrix}^k \left[\begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_s \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_s \end{Bmatrix} \right]$$

0

ΚΑΜΨΗ ΔΟΚΩΝ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗΣ ΠΟΛΥΣΤΡΩΤΗΣ ΔΟΜΗΣ

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_s\end{Bmatrix}^k = z\begin{bmatrix}Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs}\\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{ys}\\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss}\end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix}k_x\\ k_y\\ k_s\end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}k_x\\ k_y\\ k_s\end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix}D'_{xx} & D'_{xy} & D'_{xs}\\ D'_{xy} & D'_{yy} & D'_{ys}\\ D'_{xs} & D'_{ys} & D'_{ss}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\frac{M}{b}\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}$$

$$\sigma_i^{(k)} = -zQ_{ij}^{(k)}D'_{jx}\frac{M(x)}{b},\ \text{i,j=x,y,s}$$

$$\sigma_x^{(k)} = -z\left[Q_{xx}^{(k)}D'_{xx} + Q_{xy}^{(k)}D'_{xy} + Q_{xs}^{(k)}D'_{xs}\right]\frac{M(x)}{b}$$

$$\sigma_y^{(k)} = -z\left[Q_{xy}^{(k)}D'_{xx} + Q_{yy}^{(k)}D'_{xy} + Q_{ys}^{(k)}D'_{xs}\right]\frac{M(x)}{b}$$

$$\sigma_s^{(k)} = -z\left[Q_{xs}^{(k)}D'_{xx} + Q_{ys}^{(k)}D'_{xy} + Q_{ss}^{(k)}D'_{xs}\right]\frac{M(x)}{b}$$

Θέτοντας

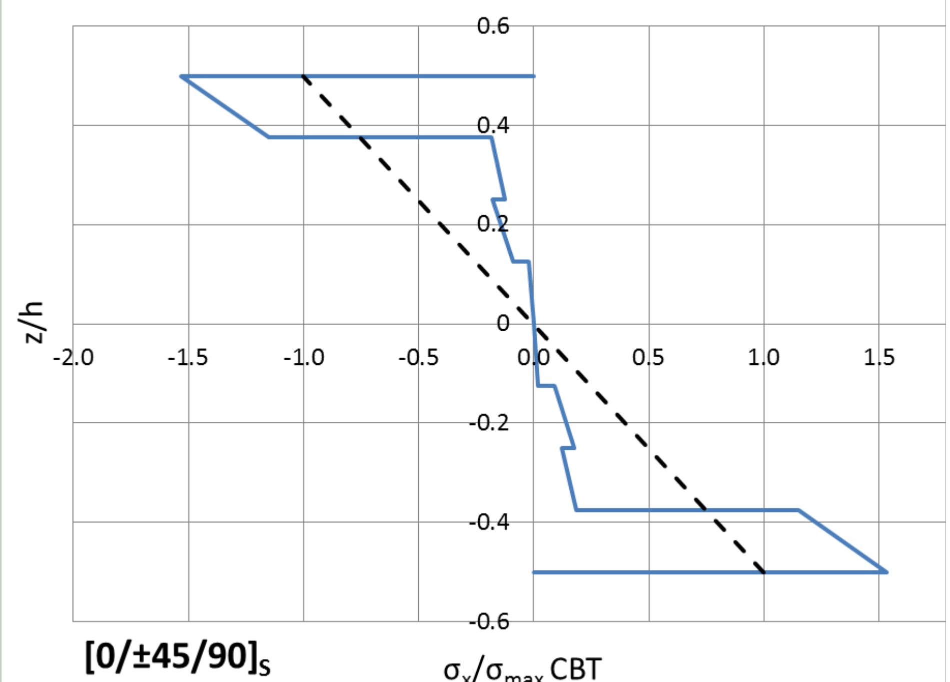
$$I = \frac{bh^3}{12}$$

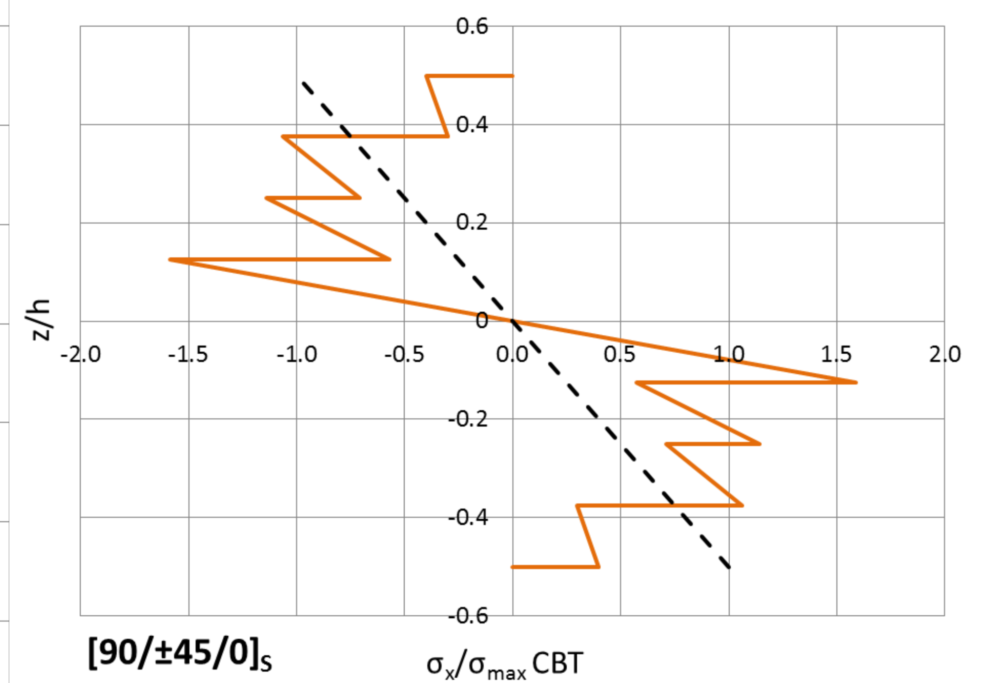
$$f_x^{(k)} = \frac{h^3}{12}\left[Q_{xx}^{(k)}D'_{xx} + Q_{xy}^{(k)}D'_{xy} + Q_{xs}^{(k)}D'_{xs}\right]$$

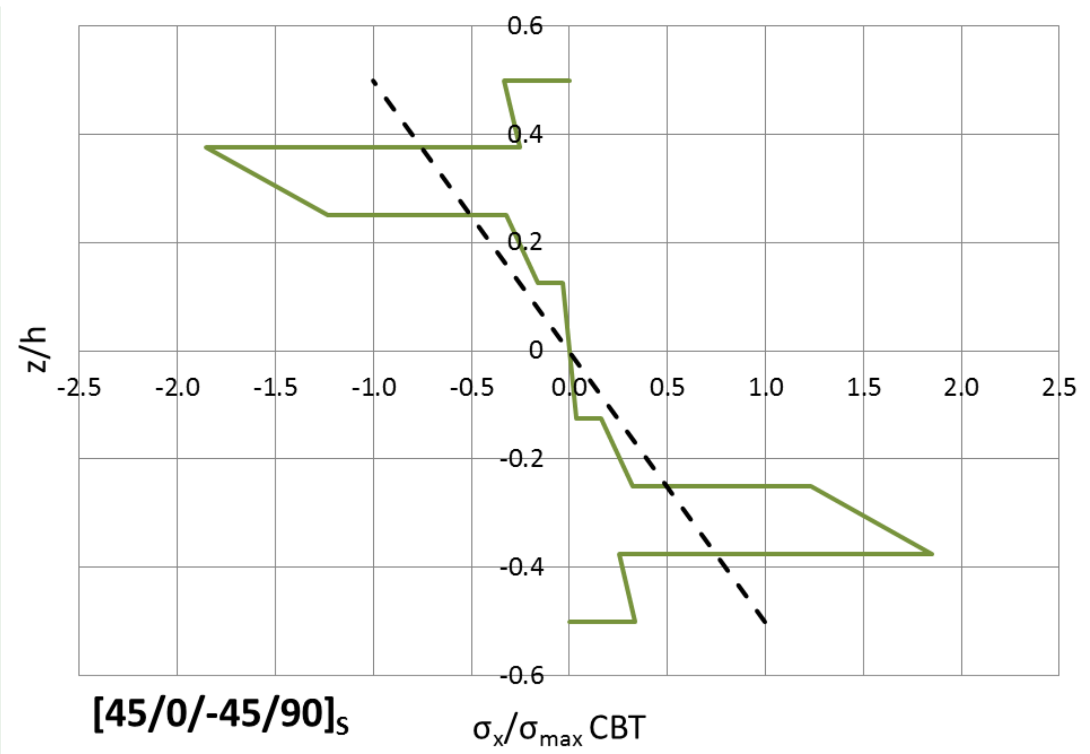
$$f_y^{(k)} = \frac{h^3}{12}\left[Q_{xy}^{(k)}D'_{xx} + Q_{yy}^{(k)}D'_{xy} + Q_{ys}^{(k)}D'_{xs}\right]$$

$$f_s^{(k)} = \frac{h^3}{12}\left[Q_{xs}^{(k)}D'_{xx} + Q_{ys}^{(k)}D'_{xy} + Q_{ss}^{(k)}D'_{xs}\right]$$

$$\boxed{\sigma_i^{(k)} = -zf_i^{(k)}\frac{M}{I},\ i = x, y, s}$$


0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-2.0
-1.5
-1.0
-0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
z/h
[0/±45/90]s
σx/σmax CBT


0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-2.0
-1.5
-1.0
-0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
z/h
[90/±45/0]s
σx/σmax CBT


0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-2.5
-2.0
-1.5
-1.0
-0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
z/h
[45/0/-45/90]s
σx/σmax CBT

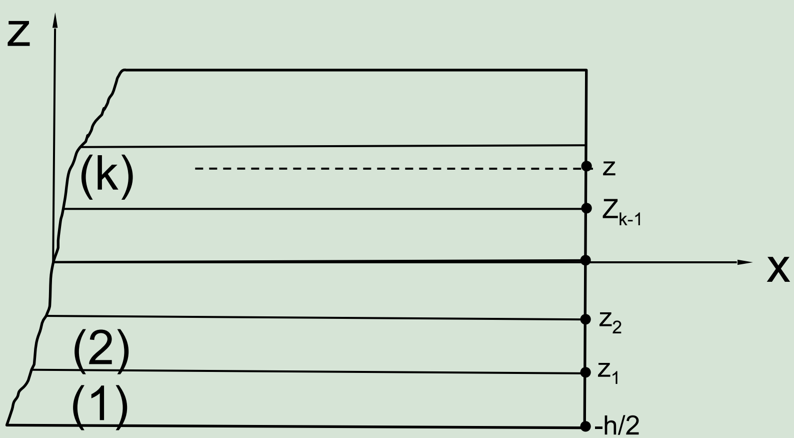
Από την εξ. Ισορροπίας δυνάμεων στην x-διεύθυνση γιά την k-στρώση υπολογίζεται η εγκάρσια διατμητική τάση:

$$\frac{\partial \sigma_x^{(k)}}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial \sigma_s^{(k)}}{\partial y}}_{0} + \frac{\partial \tau_{xz}^{(k)}}{\partial z} = 0$$

$$\sigma_i^{(k)} = -z f_i^{(k)} \frac{M}{I}, \quad i = x, y, s$$

$$\tau_{xz}^{(k)} = \frac{1}{I}\frac{dM}{dx}\int_{-\frac{h}{2}}^{z} f_x^{(k)} z\,dz = \frac{Q}{I}\int_{-\frac{h}{2}}^{z} f_x^{(k)} z\,dz$$

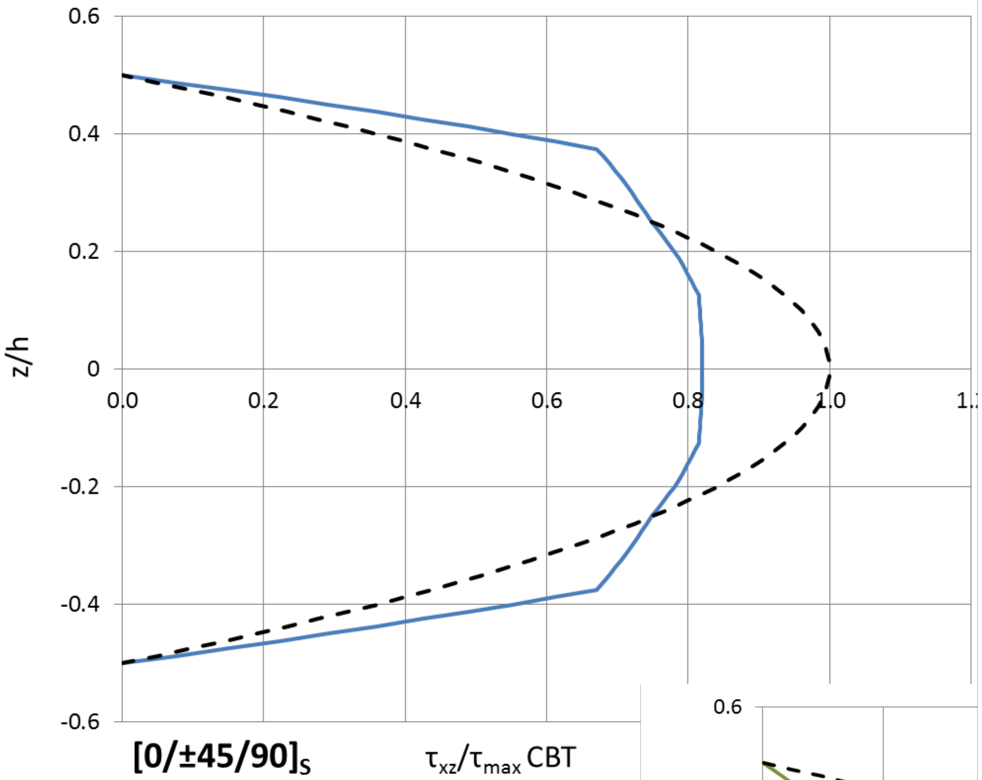
ΥΠΟΔΕΙΞΗ:

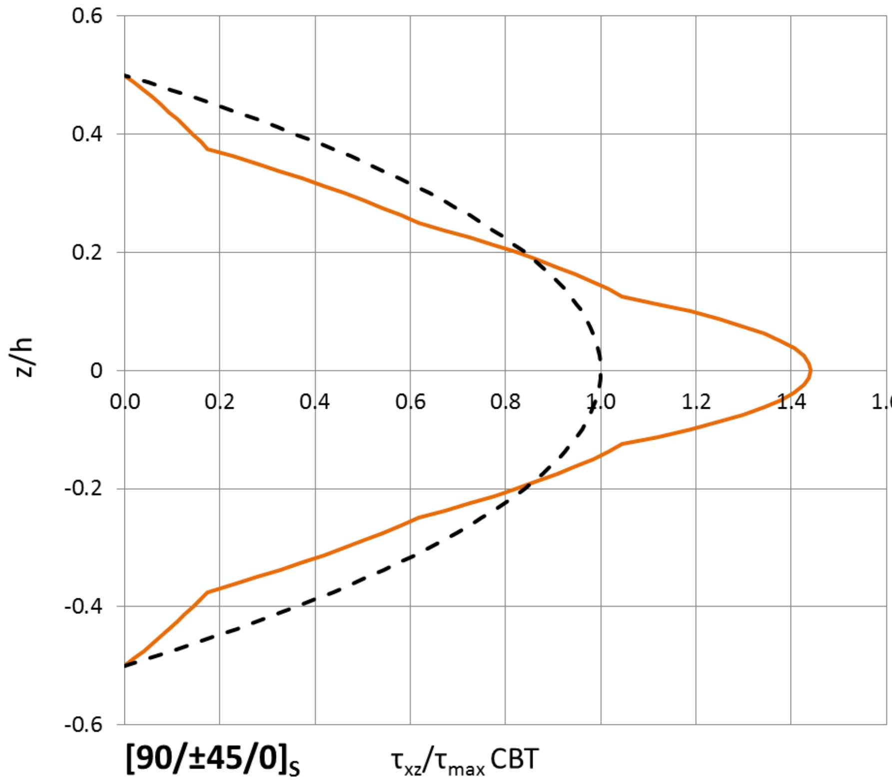


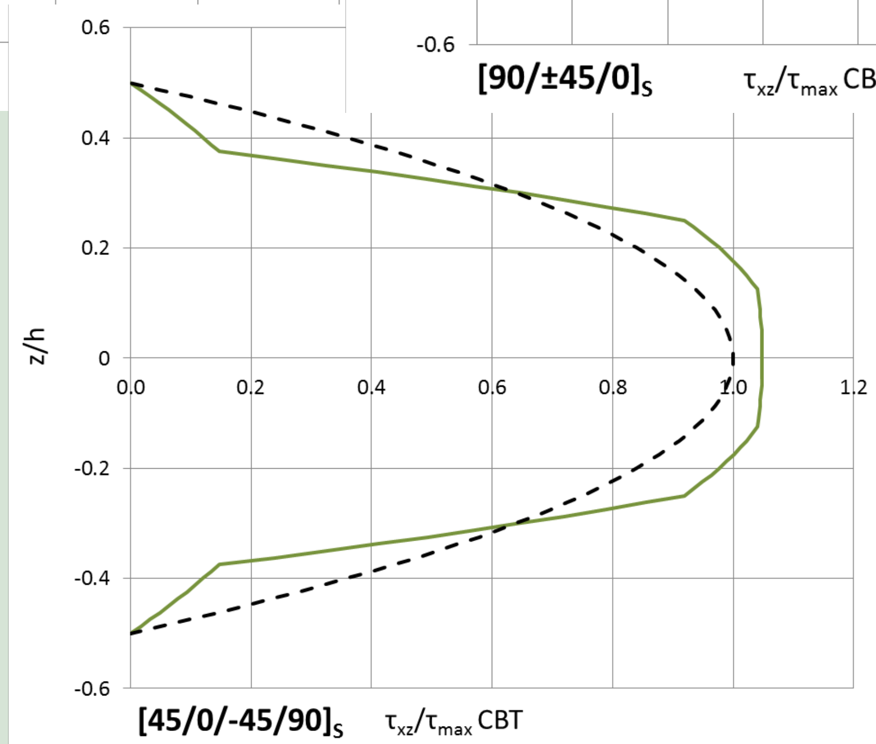
$$\boxed{\tau_{xz}^{(k)} = \frac{Q}{2I}\left[\sum_{\nu=1}^{k-1}\left(z_\nu^2 - z_{\nu-1}^2\right)f_x^{(\nu)} + \left(z^2 - z_{k-1}^2\right)f_x^{(k)}\right]}$$

ή γιά την k-στρώση:

$$\boxed{\tau_{xz}^{(k)}(z) = \tau_{xz}^{(k)}(z_{k-1}) + \frac{Q}{2I}\left(z^2 - z_{k-1}^2\right)f_x^{(k)}}$$


z/h
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
[0/±45/90]$_S$
τ_{xz}/τ_{max} CBT


z/h
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
1.4
1.6
[90/±45/0]$_S$
τ_{xz}/τ_{max} CBT


z/h
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
[45/0/-45/90]$_S$
τ_{xz}/τ_{max} CBT

$$\left.\begin{aligned} \sigma_i &= zQ_{ij}k_j \\ k_j &= D'_{jr}M_r \end{aligned}\right\} \quad \sigma_i = zQ_{ij}D'_{jr}M_r$$

Γιά την περίπτωση ομογενούς δοκού, δηλ. μία μόνο στρώση:

$$D_{ij} = Q_{ij}\frac{h^3}{12} \Rightarrow D'_{ij} = S_{ij}\frac{12}{h^3}$$

$$Q_{ij}D'_{jx} = Q_{ij}S_{jx}\frac{12}{h^3} \quad \Rightarrow f_x = 1,\ f_y = f_s = 0$$

Άρα, οι εξισώσεις της σελ.2:

$$\sigma_i^{(k)} = -zf_i^{(k)}\frac{M}{I},\quad i = x, y, s$$

δίδουν τελικώς:

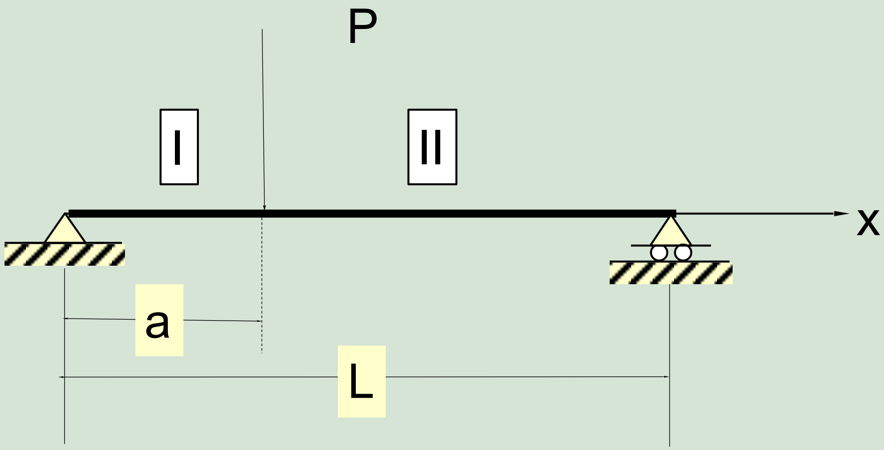
$$\boxed{\sigma_x = -\frac{M}{I}z,\ \sigma_y = \sigma_s = 0}$$

C.B.T

Ομοίως, η εγκάρσια διατμητική τάση γιά ομογενή δοκό:

$$\tau_{xz}^{(k)} = \frac{1}{I}\int_{-\frac{h}{2}}^{z} f_x^{(k)}\frac{dM}{dx}zdz = \frac{Q}{I}\int_{-\frac{h}{2}}^{z} f_x^{(k)}zdz \longrightarrow \boxed{\tau_{xz} = -\frac{Q}{I}\left[\frac{z^2}{2} - \frac{h^2}{8}\right] = \frac{h^2Q}{8I}\left[1 - \left(\frac{2z}{h}\right)^2\right]}$$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΒΕΛΟΥΣ ΚΑΜΨΗΣ



$$\left\{\begin{matrix} k_x \\ k_y \\ k_s \end{matrix}\right\} = \begin{bmatrix} D'_{xx} & D'_{xy} & D'_{xs} \\ D'_{xy} & D'_{yy} & D'_{ys} \\ D'_{xs} & D'_{ys} & D'_{ss} \end{bmatrix} \left\{\begin{matrix} M_x \\ M_y \\ M_s \end{matrix}\right\}$$

$$M_x(x) = -\frac{M(x)}{b}$$

$$k_x = -\frac{d^2w}{dx^2} = D'_{xx}M_x = -\frac{D'_{xx}}{b}M(x)$$

$$M_I(x) = P\left(1-\frac{a}{L}\right)x$$

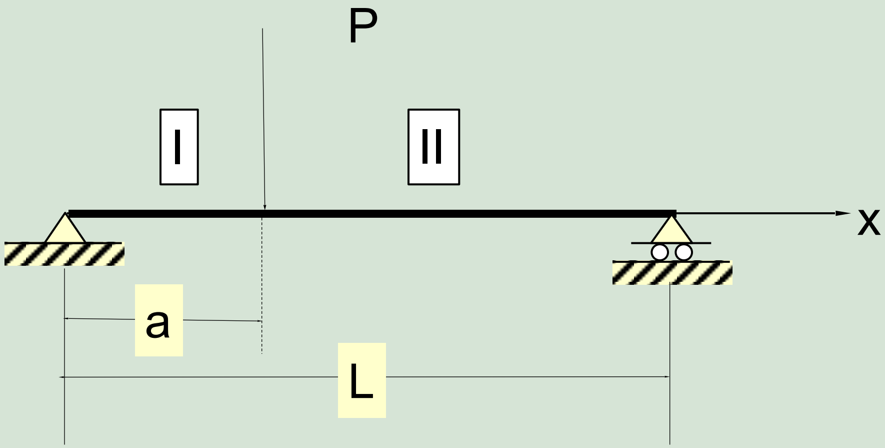
$$M_{II}(x) = P\left(1-\frac{a}{L}\right)x - P(x-a)$$

Κατά τα γνωστά:

$$w_I(x) = \frac{D'_{xx}}{b}\left[\frac{P}{6}\left(1-\frac{a}{L}\right)x^3 + c_1x + c_2\right]$$

$$w_{II}(x) = \frac{D'_{xx}}{b}\left[\frac{P}{6}\left(1-\frac{a}{L}\right)x^3 - \frac{P}{6}(x-a)^3 + c_3x + c_4\right]$$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΒΕΛΟΥΣ ΚΑΜΨΗΣ



$$w_I(x) = \frac{D'_{xx}}{b}\left[\frac{P}{6}\left(1-\frac{a}{L}\right)x^3 + c_1 x + c_2\right]$$

$$w_{II}(x) = \frac{D'_{xx}}{b}\left[\frac{P}{6}\left(1-\frac{a}{L}\right)x^3 - \frac{P}{6}(x-a)^3 + c_3 x + c_4\right]$$

Συνοριακές συνθήκες:

$$@x=0: \quad w_I(x) = 0 \qquad \Rightarrow c_2 = 0$$

$$@x=L: \quad w_{II}(x) = 0 \qquad \Rightarrow \frac{P}{6}\left(1-\frac{a}{L}\right)L^3 - \frac{P}{6}(L-a)^3 + c_3 L + c_4 = 0$$

$$@x=a: \quad w_I(x) = w_{II}(x) \qquad \Rightarrow \frac{P}{6}\left(1-\frac{a}{L}\right)a^3 + c_1 a = \frac{P}{6}\left(1-\frac{a}{L}\right)a^3 + c_3 a + c_4$$

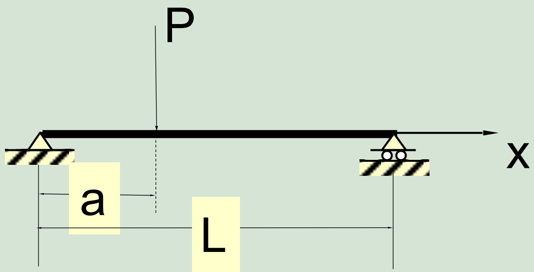
$$\frac{dw_I}{dx} = \frac{dw_{II}}{dx} \qquad \frac{P}{2}\left(1-\frac{a}{L}\right)a^2 + c_1 = \frac{P}{2}\left(1-\frac{a}{L}\right)a^2 + c_3$$

$$\Rightarrow c_1 = c_3$$

$$c_4 = 0$$

$$c_1 = c_3 = \frac{P}{6}\left(3a^2 - \frac{a^3}{L}\right) - \frac{PaL}{3}$$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΒΕΛΟΥΣ ΚΑΜΨΗΣ



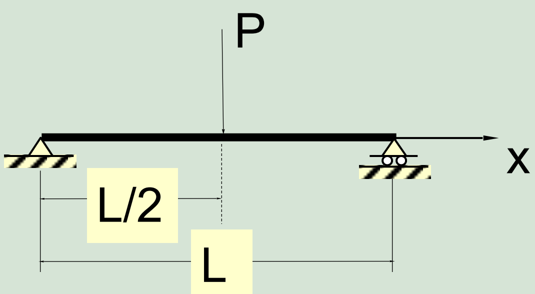
Τελικά:

$$w(x) = \frac{D'_{xx}}{b}\frac{P}{6}\left[\left(1-\frac{a}{L}\right)x^3 - \left(2aL - 3a^2 + \frac{a^3}{L}\right)x - \langle x-a \rangle^3\right]$$

όπου $\langle x-a \rangle = 0$ γιά $x \leq a$

Από την ανωτέρω σχέση εξάγονται εύκολα τα βέλη κάμψεως γιά τις περιπτώσεις των 3P & 4P Bending:

3PB: a=L/2



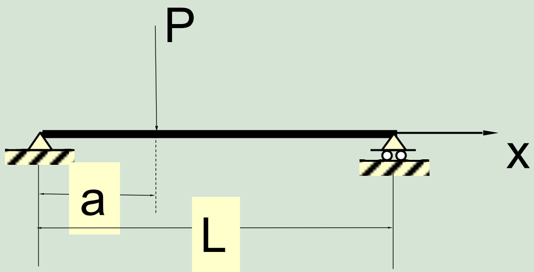
$$w(x) = -\frac{D'_{xx}}{b}\frac{P}{6}\left[\frac{x^3}{2} - \frac{3L^2}{8}x - \langle x-a \rangle^3\right]$$

$$\frac{D'_{xx}}{b} = E_x^f I$$

Μέγιστη τιμή γιά x=L/2:

$$w_{max} = -\frac{PL^3}{48E_x^f I}$$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΒΕΛΟΥΣ ΚΑΜΨΗΣ

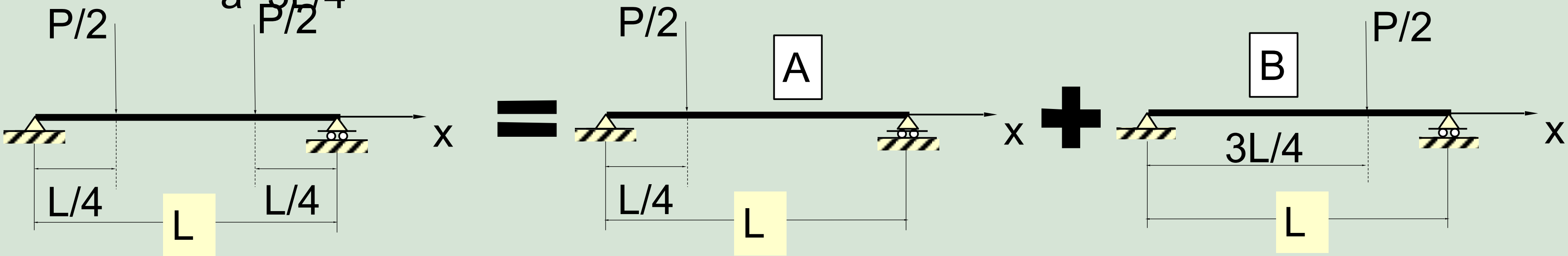


Τελικά:

$$w(x) = \frac{D'_{xx}}{b}\frac{P}{6}\left[\left(1-\frac{a}{L}\right)x^3 - \left(2aL - 3a^2 + \frac{a^3}{L}\right)x - \left\langle x-a\right\rangle^3\right]$$

όπου $\left\langle x-a\right\rangle = 0$ γιά $x \le a$

4PB: Επαλληλία φορτίων P/2 στις θέσεις a=L/4 και a=3L/4

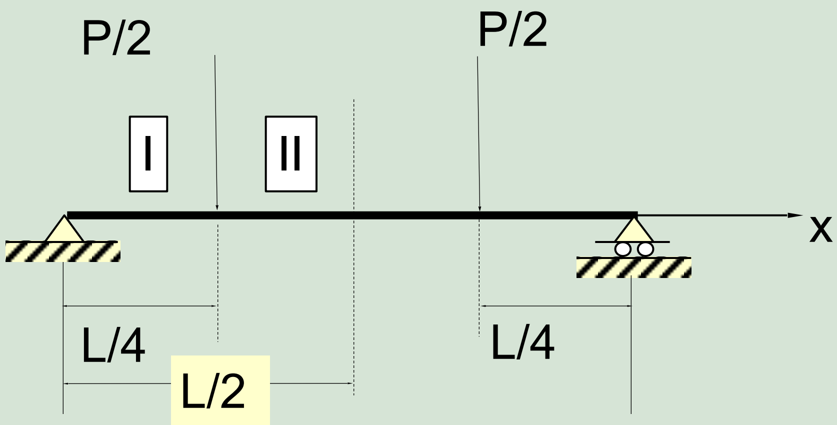


$$w_A = \frac{D'_{xx}}{b}\frac{P}{12}\left[\frac{3x^3}{4} - \frac{21}{64}L^2x - \left\langle x - \frac{L}{4}\right\rangle^3\right]$$

$$w_B = \frac{D'_{xx}}{b}\frac{P}{12}\left[\frac{x^3}{4} - \frac{15}{64}L^2x - \left\langle x - \frac{3L}{4}\right\rangle^3\right]$$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΒΕΛΟΥΣ ΚΑΜΨΗΣ

Τελικώς, λόγω συμμετρίας:



$$w_I = -\frac{PL^2 x}{192 E_x^f I}\left[9 - 16\left(\frac{x}{L}\right)^2\right]$$

$$w_{II} = \frac{PL^3}{768 E_x^f I}\left[1 - 48\left(\frac{x}{L}\right) + 48\left(\frac{x}{L}\right)^2\right]$$