

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

## ΕΥΦΥΗ ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ

(Μηχανική των πιεζοηλεκτρικών υλικών)

**ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ**

<b>6.1</b>	<b>ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....</b>	<b>3</b>
6.1.1	ΠΙΕΖΟΗΛΕΚΤΡΙΚΟΙ ΔΙΕΓΕΡΤΕΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ.....	3
<b>6.2</b>	<b>ΠΙΕΖΟΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΥΛΙΚΑ.....</b>	<b>5</b>
6.2.1	Η ΑΝΑΚΑΛΥΨΗ ΤΟΥ ΠΙΕΖΟΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΥ.....	5
6.2.2	ΕΥΘΥ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ ΠΙΕΖΟΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ.....	6
6.2.3	ΠΙΕΖΟΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΚΕΡΑΜΙΚΑ.....	7
6.2.4	Η ΠΕΡΟΒΣΚΙΤΙΚΗ ΔΟΜΗ ΤΟΥ ΡΖΤ.....	8
6.2.5	ΧΩΡΙΑ WEISS ΚΑΙ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΗΣ ΠΟΛΩΣΗΣ ΤΟΥ ΡΖΤ.....	9
6.2.6	ΗΛΕΚΤΡΟΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ.....	12
6.2.7	ΠΙΕΖΟΗΛΕΚΤΡΙΚΟΙ ΔΙΕΓΕΡΤΕΣ ΜΕ ΜΟΡΦΗ ΔΟΚΩΝ ΚΑΜΨΗΣ.....	14
<b>6.3</b>	<b>ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΕΖΟΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΥΛΙΚΩΝ.....</b>	<b>18</b>
6.3.1	ΠΥΚΝΟΤΗΤΑ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ ΤΗΣ ΕΛΑΣΤΙΚΗΣ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗΣ.....	19
6.3.2	ΠΥΚΝΟΤΗΤΑ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ ΤΟΥ ΗΛΕΚΤΡΟΣΤΑΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ.....	22
6.3.3	ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΗΣ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗΣ.....	23
6.3.3.1	Εσωτερική Ενέργεια των Πιεζοηλεκτρικών Υλικών.....	25
6.3.3.2	Γραμμικές Καταστατικές Εξισώσεις και Ηλεκτρική Ενθαλπία.....	26
6.3.3.3	Συμβολισμός των Ελαστικών και Πιεζοηλεκτρικών Τανυστών.....	29
	<b>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....</b>	<b>33</b>

## 6.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο, που ανακαλύφθηκε από τ' αδέρφια Pierre και Jacques Curie, συνδυάζει ηλεκτρικές με μηχανικές ιδιότητες των υλικών και αντίστροφα. Για παράδειγμα, αν πιεζοηλεκτρικά υλικά (π.χ. χαλαζίας, τουρμαλίνης) υπόκεινται σε ηλεκτρικές διεγέρσεις κατά μήκος συγκεκριμένων κρυσταλλικών προσανατολισμών, τότε εμφανίζονται, κατά μήκος καλώς ορισμένων κρυσταλλικών προσανατολισμών, μηχανικές παραμορφώσεις. Αντίθετα, μια μηχανική παραμόρφωση του υλικού προκαλεί τη δημιουργία ηλεκτρικών φορτίων πόλωσης. Το πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο εμφανίζεται τόσο σε μονοκρυσταλλικά όσο και σε πολυκρυσταλλικά υλικά. Στις μέρες μας, τα υλικά με πιεζοηλεκτρικές ιδιότητες απέκτησαν τεράστια τεχνική σημασία ως λειτουργικά υλικά. Τα πολυκρυσταλλικά κεραμικά, όπως είναι το  $\text{BaTiO}_3$  και η PZT, είναι πιεζοηλεκτρικά υλικά με ευρεία χρήση εξαιτίας του χαμηλού κόστους κατασκευής και των σχεδόν αυθαίρετων δυνατών σχημάτων που μπορούν να πάρουν, σε σύγκριση με τα μονοκρυσταλλικά πιεζοηλεκτρικά υλικά. Επιπλέον, τα συγκεκριμένα υλικά παρουσιάζουν εξαιρετικές πιεζοηλεκτρικές και διηλεκτρικές ιδιότητες, γεγονός που τα καθιστά ιδιαίτερα χρήσιμα στο πεδίο των πιεζοηλεκτρικών διεγερτών [1].

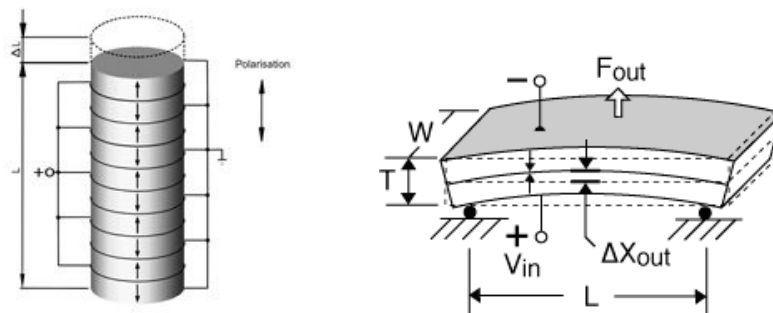
### 6.1.1 Πιεζοηλεκτρικοί διεγέρτες και εφαρμογές

Οι πιεζοηλεκτρικοί διεγέρτες εφαρμόζονται σε πλήθος συσκευών μαζικής παραγωγής, όπως είναι: οι συσκευές εκπομπής ήχου, οι μετατροπείς και αισθητήρες υπερηχητικής ισχύος, οι διεγέρτες κάμψης σε μηχανές ύφανσης, οι κεφαλές εκτυπωτών, οι διεγέρτες για την κάμψη δοκών σε βαλβίδες, τα οπτικά συστήματα και πρόσφατα, ως πολυστρωματικοί διεγέρτες στα συστήματα ψεκασμού στην αυτοκινητοβιομηχανία.

Μερικά από τα βασικά πλεονεκτήματα που τους επιτρέπουν την χρήση σε ένα τόσο ευρύ φάσμα εφαρμογών, είναι η δυνατότητα δημιουργίας συμπαγών κατασκευών που καταλαμβάνουν μικρό όγκο, η υψηλή ακρίβεια διέγερσης και οι πάρα πολύ μικροί χρόνοι απόκρισης που διαθέτουν, η απουσία φαινομένων τριβής, η ικανότητα χειρισμού σε συνθήκες κενού καθώς και σε πιθανές κρυσταλλικές θερμοκρασίες [2].

Το μεγαλύτερο μέρος των πιεζοηλεκτρικών διεγερτών έχει κυρίως τη μορφή στοιβάς σωρευμένων λεπτών πιεζοηλεκτρικών στρωμάτων και τη μορφή δοκών κάμψης και απεικονίζονται στο παρακάτω σχήμα (Σχ-1). Οι διεγέρτες με τη μορφή στοιβάς βασίζονται

στο διάμηκες πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο (longitudinal piezoelectric effect) (τύπου  $d_{33}$ ) και αποτελούνται συνήθως από αρκετά κεραμικά πιεζοηλεκτρικά στρώματα με μεταβαλλόμενη διεύθυνση ηλεκτρικής πόλωσης.



Σχ-1 Διεγέρτες με τη μορφή στοίβας και τη μορφή δοκού κάμψης

Οι επαφές των ηλεκτροδίων του κάθε στρώματος χρησιμοποιούνται για τη καθοδήγηση του διεγέρτη. Με αυτόν τον τύπο διεγέρτη μπορούν να επιτευχθούν πολύ ισχυρές δυνάμεις (μηχανικές τάσεις) με ταυτόχρονες μικρές επιμηκύνσεις (ελαστικές παραμορφώσεις), της τάξης μερικών μικρομέτρων ( $\mu\text{m}$ ), καθώς και πολύ υψηλά ηλεκτρικά δυναμικά λειτουργίας, της τάξης των kV. Οι σωρευμένοι διεγέρτες χρησιμοποιούνται συνήθως σε τεχνολογικές εφαρμογές της αυτοκινητοβιομηχανίας, ως οδηγοί βαλβίδων έγχυσης καυσίμου και σε οπτικά μέσα, ως οδηγοί υψηλής ακρίβειας.

Οι πιεζοηλεκτρικοί διεγέρτες με τη μορφή δοκών κάμψης βασίζονται στο εγκάρσιο πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο (transverse piezoelectric effect) (τύπου  $d_{31}$ ) και εφαρμόζονται εκεί που απαιτούνται μεγάλες παραμορφώσεις. Τοποθετούνται συνήθως στην επιφάνεια εύκαμπτων ελαστικών δοκών.

Η εφαρμογή μικρής ηλεκτρικής τάσης, της τάξης των 24 – 200V, στα ηλεκτρόδια του διεγέρτη προκαλεί παραμόρφωση του διεγέρτη, σε κατεύθυνση κάθετη προς την ηλεκτρική πόλωση. Η παραμόρφωση του πιεζοηλεκτρικού διεγέρτη αποτελεί την αιτία εμφάνισης ροπής κάμψης στην ελαστική δοκό επί της οποίας είναι τοποθετημένος. Έτσι, είναι εφικτές μεγάλες παραμορφώσεις της τάξης μερικών εκατοντάδων μικρομέτρων.

Τα πιο γνωστά και αντιπροσωπευτικά παραδείγματα πιεζοηλεκτρικών διεγερτών, με τη μορφή δοκών κάμψης, αποτελούν οι *μονόμορφες δομές* (monomorph) (ένα ενεργό πιεζοηλεκτρικό και ένα παθητικό ελαστικό στρώμα), οι *δίμορφες δομές* (bimorph) (δυο ενεργά πιεζοηλεκτρικά στρώματα) και οι *τρίμορφες δομές* (trimorph) (ένα παθητικό

ελαστικό στρώμα ανάμεσα σε δυο ενεργά πιεζοηλεκτρικά στρώματα). Πρόσφατες τεχνικές εξελίξεις οδήγησαν στη δημιουργία μονόμορφων πιεζοηλεκτρικών δοκών με *πολυστρωματική τεχνολογία*, όπου ο διεγέρτης αποτελείται από αρκετά παθητικά ελαστικά εύκαμπτα και ενεργά πιεζοηλεκτρικά στρώματα. Η πολυστρωματική τεχνολογία έχει ως αποτέλεσμα το πλεονέκτημα της χρήσης ακόμα χαμηλότερων ηλεκτρικών δυναμικών λειτουργίας, επεκτείνοντας έτσι σημαντικά το πεδίο των βιομηχανικών εφαρμογών των πιεζοηλεκτρικών δοκών κάμψης.

## 6.2 ΠΙΕΖΟΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΥΛΙΚΑ

### 6.2.1 Η ανακάλυψη του πιεζοηλεκτρισμού

Το 1880, το φαινόμενο του πιεζοηλεκτρισμού ανακαλύφθηκε από τ' αδέρφια *Pierre και Jacques Curie* [3]. Ωστόσο αυτό δε συνέβη τυχαία. Προηγουμένως, ήταν ήδη γνωστή στην Ινδία και την Κεϋλάνη, η μυστηριώδης συμπεριφορά του ορυκτού τουρμαλίνη. Εάν το συγκεκριμένο ορυκτό το τοποθετούσαν μέσα σε ζεστή τέφρα, τότε απ' τη μια πλευρά προσέλκυε τα σωματίδια τέφρας ενώ απ' την αντίθετη πλευρά τα απέρριπτε. Έπειτα από καιρό, το φαινόμενο της έλξης και της απώθησης αντιστράφηκε. Στις αρχές του 18<sup>ου</sup> αιώνα και μέσω του εμπορίου, οι κρύσταλλοι τουρμαλίνη εισήχθησαν στην Ευρώπη. Το 1747, ο *Linne* ονόμασε τους κρυστάλλους τουρμαλίνη *lapis electricus*. Στον επόμενο αιώνα, ορισμένοι ερευνητές προσπάθησαν να βρουν μια σχέση μεταξύ των φαινομένων μηχανικής πίεσης και ηλεκτρισμού. Ο *Becquerel* πίστευε ότι ένα τέτοιο φαινόμενο έπρεπε να ήταν αναμενόμενο στους κρυστάλλους. Το 1877, ο Λόρδος *Kelvin* απέδειξε τη συσχέτιση μεταξύ πυροηλεκτρισμού και πιεζοηλεκτρισμού. Επιβεβαίωσε ότι το μεγαλύτερο μέρος του πυροηλεκτρικού φορτίου του τουρμαλίνη, αποδίδεται στο σχηματισμό πιεζοηλεκτρικής επιφανειακής φόρτισης, η οποία με τη σειρά της προκαλείται απ' την ελαστική παραμόρφωση του κρυστάλλου κάτω από θερμοκρασιακές μεταβολές.

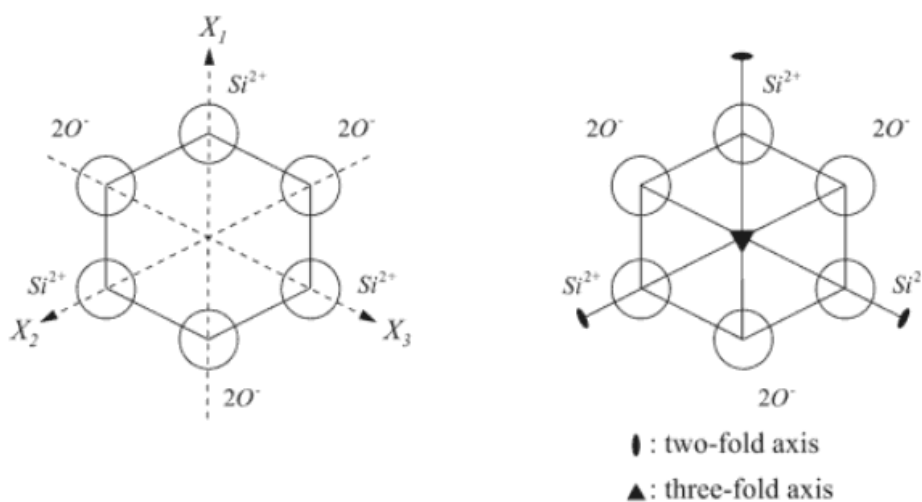
Τα αδέρφια *Curie* ανακάλυψαν αρχικά το ευθύ πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο στους κρυστάλλους τουρμαλίνη. Διαπίστωσαν ότι μια μηχανική παραμόρφωση σε συγκεκριμένες διευθύνσεις, προκαλεί αντίθετες ηλεκτρικές επιφανειακές φορτίσεις σε αντικείμενες κρυσταλλικές όψεις, οι οποίες είναι ανάλογες της μηχανικής παραμόρφωσης.

Το φαινόμενο αυτό, το οποίο παρατηρήθηκε επίσης στον χαλαζία και σε άλλους κρυστάλλους χωρίς κέντρο συμμετρίας, ονομάστηκε *πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο* (απ' την ελληνική λέξη *πιέζειν*). Το αντίστροφο πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο προβλέφθηκε απ' τον

*Lippmann*, ο οποίος βασίστηκε σε θερμοδυναμικές μελέτες και κατόπιν επιβεβαιώθηκε πειραματικά από τους αδερφούς *Curie*.

### 6.2.2 Ευθύ και αντίστροφο πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο

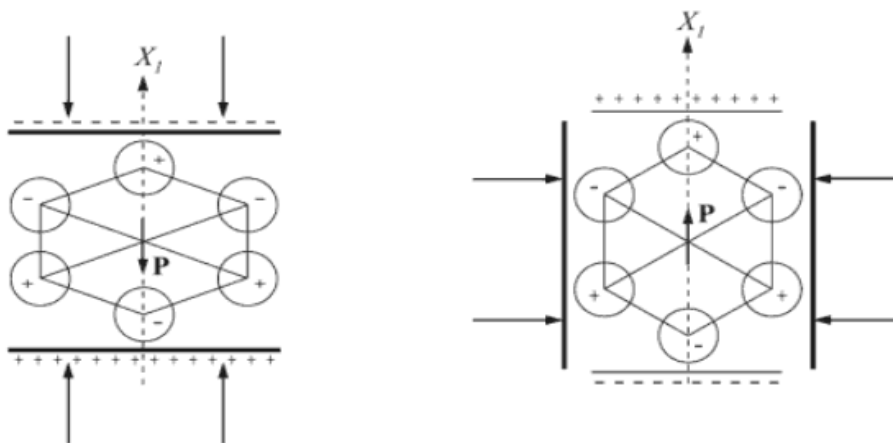
Το πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο παρατηρείται στις κρυσταλλικές δομές που δεν έχουν κέντρο συμμετρίας ως προς τα θετικά και αρνητικά φορτισμένα ιόντα του κρυσταλλικού πλέγματος. Έτσι, η απαραίτητη προϋπόθεση για την εμφάνιση πιεζοηλεκτρικού φαινομένου είναι η ύπαρξη πολικών αξόνων εντός της κρυσταλλικής δομής. Πολικός άξονας είναι η διεύθυνση κατά μήκος της οποίας υπάρχει ηλεκτρική διπολική ροπή που οφείλεται στη κατανομή του ηλεκτρικού φορτίου στο χημικό δεσμό. Για καλύτερη κατανόηση, θεωρούμε παρακάτω τη στοιχειώδη (μοναδιαία) κυψελίδα του κρυστάλλου α-χαλαζία (σχ-1).



**Σχ-1.** Απλοποιημένη δομή της στοιχειώδους κυψελίδας του χαλαζία. Αριστερά απεικονίζεται η θέση των ιόντων Si και O σε σχέση με τους κρυσταλλογραφικούς άξονες και δεξιά οι τρεις άξονες  $2^{ns}$  τάξης συμμετρίας και ο ένας άξονας  $3^{ns}$  τάξης συμμετρίας.

Η κυψελίδα, αποτελείται από αρνητικά φορτισμένα ιόντα (ανιόντα) οξυγόνου και θετικά φορτισμένα ιόντα (κατιόντα) πυριτίου. Έχει τρεις άξονες  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$ ,  $2^{ns}$  τάξης περιστροφικής συμμετρίας στο επίπεδο σχεδίασης και ένα άξονα  $Z$ ,  $3^{ns}$  τάξης περιστροφικής συμμετρίας, κάθετο στο επίπεδο σχεδίασης. Στην κατάσταση αυτή (απαραμόρφωτη) ο κρύσταλλος είναι ηλεκτρικά ουδέτερος, με μηδενική συνισταμένη ηλεκτρική πόλωση. Εάν υπάρξει όμως παραμόρφωση της δομής του κρυστάλλου, για

παράδειγμα, κατά μήκος του πολικού άξονα  $X_1$ , εμφανίζεται μια πρόσθετη ηλεκτρική πόλωση  $P$  κατά μήκος του άξονα αυτού. Η ηλεκτρική πόλωση, προκαλείται απ' τη μετατόπιση των ανιόντων έναντι των κατιόντων του κρυσταλλικού πλέγματος (σχ-2), με αποτέλεσμα την εμφάνιση ηλεκτρικού φορτίου στις εξωτερικές επιφάνειες του κρυστάλλου που είναι κάθετες στον άξονα  $X_1$  και κατά συνέπεια στην εμφάνιση ενός εξωτερικού ηλεκτρικού δυναμικού πόλωσης. Αυτή η συμπεριφορά του κρυστάλλου, ονομάζεται *ευθύ διάμηκες πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο*. Η εφαρμογή όμως θλιπτικών και εφελκυστικών τάσεων κάθετα στον άξονα  $X_1$ , προκαλεί πρόσθετη ηλεκτρική πόλωση με αντίθετο πρόσημο στη διεύθυνση  $X_1$  (σχ-2). Η συμπεριφορά αυτή, ονομάζεται *ευθύ εγκάρσιο πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο*.



**Σχ-2.** Ευθύ πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο εντός της δομής της στοιχειώδους κυψελίδας του χαλαζία. Αριστερά απεικονίζεται το διάμηκες πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο ενώ δεξιά, το εγκάρσιο πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο.

Και τα δυο φαινόμενα είναι αντιστρεπτά. Για παράδειγμα, συστολή ή διαστολή της δομής του χαλαζία, εμφανίζεται από την επίδραση ανάλογων προσανατολισμένων ηλεκτρικών πεδίων. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται *αντίστροφο πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο*.

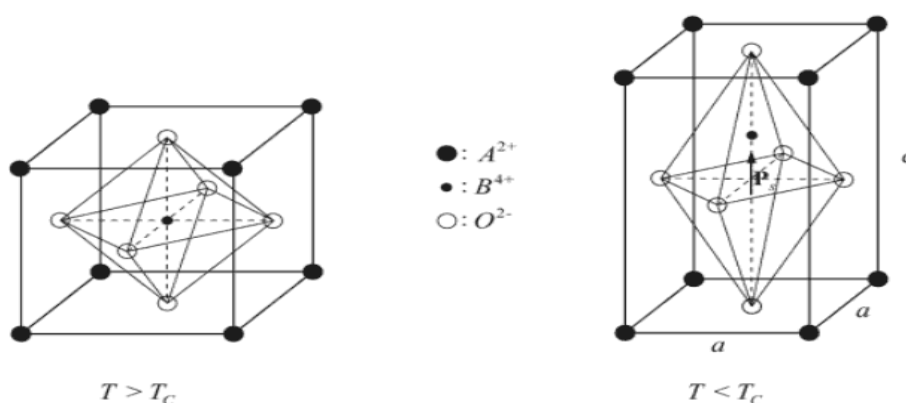
### 6.2.3 Πιεζοηλεκτρικά κεραμικά

Με την ανακάλυψη των πολυκρυσταλλικών κεραμικών με πιεζοηλεκτρικά χαρακτηριστικά, τα πιεζοηλεκτρικά υλικά απέκτησαν μεγάλη τεχνολογική σημασία μετά το 2ο Παγκόσμιο Πόλεμο. Εκ πρώτης όψεως, ο όρος *πιεζοηλεκτρικά κεραμικά* περιέχει μια αντίφαση κι αυτό γιατί μια πολυκρυσταλλική ένωση, όπως είναι τα κεραμικά, παρουσιάζει

ισότροπη συμπεριφορά εξαιτίας του στατιστικού προσανατολισμού των ξεχωριστών κόκκων (μονοκρυστάλλων). Γι' αυτό το λόγο, τα πιεζοκεραμικά δεν εμφανίζουν μακροσκοπικά πιεζοηλεκτρική συμπεριφορά, παρά το γεγονός ότι αποτελούνται από μεμονωμένους μονοκρυστάλλους που έχουν πιεζοηλεκτρικά χαρακτηριστικά. Τα κεραμικά στα οποία η αυθόρμητη πόλωση των κόκκων μπορεί να αναπροσαρμοστεί από ένα εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο σχηματίζοντας μακροσκοπικά την παραμένουσα αυθόρμητη πόλωση, απουσία του εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου, ονομάζονται *σιδηροηλεκτρικά* και έχουν πολυκρυσταλλική δομή. Σήμερα τα πολυκρυσταλλικά κεραμικά σαν το  $\text{BaTiO}_3$  και PZT, ανήκουν στα περισσότερο χρησιμοποιούμενα πιεζοηλεκτρικά υλικά. Αυτό συμβαίνει λόγω του χαμηλού κόστους κατασκευής και των σχεδόν αυθαίρετων πιθανών μορφών που μπορούν να πάρουν, σε σύγκριση με τα μονοκρυσταλλικά πιεζοηλεκτρικά υλικά. Επιπλέον, τα συγκεκριμένα υλικά έχουν πολύ καλές πιεζοηλεκτρικές και διηλεκτρικές ιδιότητες, κάνοντάς τα ιδιαίτερα χρήσιμα στην κατασκευή διεγερτών [4].

#### 6.2.4 Η περοβσκιτική δομή του PZT

Ο ζirkονικός-τιτανικός μόλυβδος (PZT), έχει τη λεγόμενη δομή περοβσκίτη των σιδηροηλεκτρικών κρυστάλλων, με γενικό τύπο  $\text{ABO}_3$ . Στη συγκεκριμένη δομή, το  $A$  αντιπροσωπεύει ένα κατιόν με φορτίο +2 (μόλυβδος), το  $B$  κατιόν με φορτίο +4 (τιτάνιο, ζirkόνιο) και τέλος το  $O$  ανιόν οξυγόνου με φορτίο -2. Πάνω από μια ορισμένη θερμοκρασία, που καλείται *θερμοκρασία Curie*  $T_C$ , η στοιχειώδης κυψελίδα του PZT έχει κυβική δομή (σχ-3).



**Σχ-3.** Δομή περοβσκίτη των σιδηροηλεκτρικών κρυστάλλων με γενικό τύπο  $\text{ABO}_3$ . Αριστερά φαίνεται η κυβική δομή πάνω απ' τη θερμοκρασία Curie ενώ δεξιά, η τετραγωνική δομή κάτω απ' τη θερμοκρασία Curie.

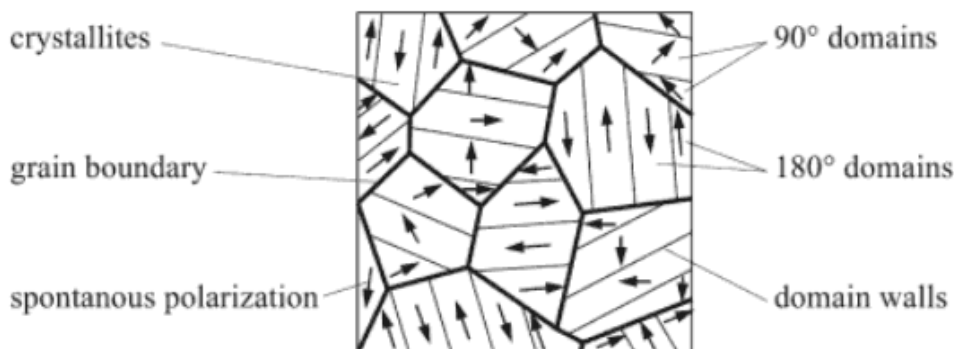


Στη κρυσταλλική δομή, δεν εμφανίζεται πιεζοηλεκτρισμός λόγω του υπάρχοντος κέντρου συμμετρίας. Κάτω απ' την θερμοκρασία  $T_C$ , η κυβική δομή του κρυσταλλικού πλέγματος μετατρέπεται αυθόρμητα σε τετραγωνική δομή (αυτό αποδίδεται σε ενεργειακά αίτια). Μ' αυτό τον τρόπο το πλέγμα των ανιόντων οξυγόνου εντός της τετραγωνικής δομής, μετακινείται κατά μήκος του κρυσταλλογραφικού c-άξονα. Ταυτόχρονα, το πλέγμα των κατιόντων μετατοπίζεται προς την αντίθετη κατεύθυνση. Προκαλείται έτσι διαστολή της στοιχειώδους κυψελίδας κατά μήκος του c-άξονα και ταυτόχρονη συστολή κατά μήκος των α-διευθύνσεων, κάθετων στον c-άξονα (σχ-3). Η παραμόρφωση που προκαλείται απ' τη μετάβαση της παρα-ηλεκτρικής στη σιδηρο-ηλεκτρική φάση καλείται *αυθόρμητη παραμόρφωση*. Η ηλεκτρική διπολική ροπή, συνδέεται με την αυθόρμητη παραμόρφωση και οφείλεται στην ασυμμετρία της τετραγωνικής μοναδιαίας κυψελίδας. Η ηλεκτρική διπολική ροπή, η οποία σχετίζεται με τον όγκο της μοναδιαίας κυψελίδας καλείται *αυθόρμητη πόλωση*  $P_s$  και έχει παράλληλη ή αντιπαράλληλη διεύθυνση με τον c-άξονα. Η μετάβαση της κυβικής σε τετραγωνική δομή, επιτρέπει τρεις διευθύνσεις για την αυθόρμητη δίογκωση και κατά συνέπεια, έξι διευθύνσεις για την αυθόρμητη ηλεκτρική πόλωση, αντίστοιχα. Εφαρμόζοντας ένα εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο, παράγονται επιπρόσθετα φαινόμενα επαγόμενης ηλεκτρικής πόλωσης και παραμόρφωσης, εξαιτίας της δύναμης κρούσης πάνω στα υπάρχοντα φορτισμένα κέντρα στο εσωτερικό της παραμορφωμένης τετραγωνικής στοιχειώδους κυψελίδας. (αντίστροφο πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο). Υποβάλλοντας τη στοιχειώδη κυψελίδα σε εξωτερικό μηχανικό φορτίο, παράγεται νέο πεδίο μηχανικών τάσεων που ασκείται στα φορτισμένα κέντρα της στοιχειώδους κυψελίδας προκαλώντας νέες μετατοπίσεις. Αυτό προκαλεί με τη σειρά του, πρόσθετη ηλεκτρική πόλωση και παραμόρφωση (ευθύ πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο). Για περισσότερη κατανόηση της ηλεκτρομηχανικής συμπεριφοράς των σιδηροηλεκτρικών κεραμικών, για παράδειγμα του PZT, είναι απαραίτητη η αναφορά στη θεωρία των περιοχών ηλεκτρικής πόλωσης (domains).

### 6.2.5 Χωρία Weiss και διαδικασίες αντιστροφής ηλεκτρικής πόλωσης του PZT

Σ' ένα πιεζοηλεκτρικό μονοκρυσταλλικό υλικό, για παράδειγμα α-χαλαζίας, οι διευθύνσεις αυθόρμητης πόλωσης της μοναδιαίας κυψελίδας είναι προκαθορισμένες. Τα δίπολα των μοναδιαίων κυψελίδων αλληλεπιδρούν με τέτοιο τρόπο, ώστε να προκαλούνται περιοχές με ομοιόμορφες διπολικές ηλεκτρικές ροπές. Αυτές οι περιοχές, ονομάζονται *περιοχές Weiss* (*Weiss domains*). Τα σύνορα των περιοχών αυτών, λέγονται *τοιχώματα*. (*domain*

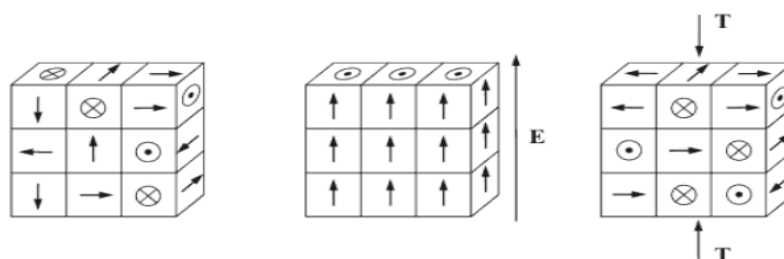
wall) Κάθε κρυσταλλίτης της κεραμικής ένωσης μπορεί να θεωρηθεί σαν ένας ξεχωριστός σιδηροηλεκτρικός κρύσταλλος, ο οποίος διαχωρίζεται σε περιοχές Weiss κάτω απ' τη θερμοκρασία Curie [4]. Στο (σχ-4), παρουσιάζεται η πολυκρυσταλλική δομή των σιδηροηλεκτρικών κεραμικών.



Σχ-4. Σχηματική απεικόνιση της πολυκρυσταλλικής δομής των σιδηροηλεκτρικών κεραμικών κάτω απ' το σημείο Curie.

Όπως προαναφέρθηκε, κάτω απ' τη θερμοκρασία Curie τα σιδηροηλεκτρικά κεραμικά κρυσταλλώνονται σε τετραγωνική δομή. Σύμφωνα με τις δυνατές διευθύνσεις ηλεκτρικής πόλωσης στις τετραγωνικές κρυσταλλικές δομές, διακρίνονται οι λεγόμενες περιοχές 180° και οι περιοχές 90°. Οι περιοχές 180° χαρακτηρίζονται από την παρουσία γειτονικών περιοχών Weiss με αντίθετες διευθύνσεις ηλεκτρικής πόλωσης, ενώ οι περιοχές 90° περιλαμβάνουν γειτονικές περιοχές Weiss με διευθύνσεις ηλεκτρικής πόλωσης κάθετες μεταξύ τους.

Μεταβαίνοντας κάτω απ' τη θερμοκρασία Curie, οι κρυσταλλίτες των σιδηροηλεκτρικών υλικών αποσυντίθενται σ' ένα μεγάλο αριθμό τυχαία κατανομημένων περιοχών Weiss, αν δεν υπάρχει εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο. Γι' αυτό, τα σιδηροηλεκτρικά είναι μη-πολωμένα υλικά, όσο αφορά τη μακροσκοπική τους συμπεριφορά (σχ-5).



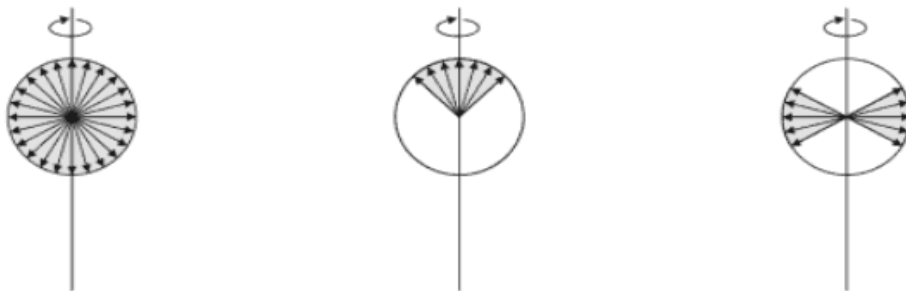
**Σχ-5.** Προσανατολισμός περιοχών σε απλό σιδηροηλεκτρικό κρύσταλλο. Από αριστερά: μη-πολωμένος, πολωμένος και αποπολωμένος κρύσταλλος.

Εφαρμόζοντας κατάλληλο εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο  $E$  με καθορισμένη διεύθυνση στους σιδηροηλεκτρικούς κρυσταλλίτες, οι περιοχές Weiss μπορούν να ευθυγραμμιστούν με τη διεύθυνση του πεδίου (σχ-5). Μ' αυτό τον τρόπο, ο αριθμός των περιοχών που ευθυγραμμίζονται παράλληλα με το ηλεκτρικό πεδίο αυξάνεται σε βάρος των αντιπαράλληλα ή των κάθετα ευθυγραμμισμένων περιοχών. Η αναπροσαρμογή της αυθόρμητης πόλωσης των σιδηροηλεκτρικών υλικών που επηρεάζεται από ένα εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο, μπορεί να προκληθεί με δυο διαφορετικές διαδικασίες δημιουργίας περιοχών Weiss, οι οποίες μπορεί να συμβούν χωριστά ή και ταυτόχρονα. Είναι οι διαδικασίες δημιουργίας περιοχών  $180^\circ$  και  $90^\circ$ . Με τη διαδικασία δημιουργίας περιοχής  $180^\circ$ , η αυθόρμητη ηλεκτρική πόλωση μεταβάλλεται σταδιακά κατά  $180^\circ$ , έως ότου ολόκληρη η ηλεκτρική πόλωση να ευθυγραμμιστεί παράλληλα με το ηλεκτρικό πεδίο. Με τη διαδικασία δημιουργίας περιοχής  $90^\circ$ , αρχικά η αυθόρμητη ηλεκτρική πόλωση μεταβάλλεται από μια αντιπαράλληλη διεύθυνση σε μια ενεργειακά πιο ευνοϊκή ασταθή θέση, κάθετη προς το ηλεκτρικό πεδίο. Αυξάνοντας το εξωτερικό πεδίο, η ευθυγράμμιση της αυθόρμητης ηλεκτρικής πόλωσης με τη διεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου, προκαλεί μια δεύτερη διαδικασία δημιουργίας περιοχής  $90^\circ$ .

Η διαδικασία δημιουργίας περιοχής  $180^\circ$ , παρουσιάζει έντονη αλλαγή της αυθόρμητης ηλεκτρικής πόλωσης ενώ οι διαδικασίες δημιουργίας περιοχής  $90^\circ$  προκαλούν παραμόρφωση στο κρυσταλλίτη, αφού αυτό συνδέεται άμεσα με τα διαφορετικά μήκη των κρυσταλλογραφικών  $a$ - και  $c$ - αξόνων, των μοναδιαίων κυψελίδων (σχ-3). Έτσι, επιδρώντας στον κρυσταλλίτη με εξωτερικές μηχανικές τάσεις, εμφανίζονται μόνο οι διαδικασίες δημιουργίας περιοχής  $90^\circ$ . Και επειδή αυτό έχει ως αποτέλεσμα την αποπόλωση του κρυστάλλου (σχ-5), προκύπτει λογικά το συμπέρασμα ότι η αντιστροφή της πολικότητας δεν είναι δυνατή, χρησιμοποιώντας μόνο εξωτερικές μηχανικές φορτίσεις. Στα πολυκρυσταλλικά κεραμικά PZT, ο προσανατολισμός των κρυσταλλογραφικών αξόνων των μεμονωμένων κρυσταλλιτών είναι τυχαίος. Επειδή η διεύθυνση ηλεκτρικής πόλωσης είναι συζευγμένη με το σύστημα κρυσταλλογραφικών αξόνων του κάθε κρυσταλλίτη, η ηλεκτρική πόλωση είναι επίσης τυχαία κατανομημένη σ' όλες τις διευθύνσεις. Έτσι είναι αδύνατη μια ακριβής ευθυγράμμιση της αυθόρμητης ηλεκτρικής πόλωσης σ' όλους τους κρυσταλλίτες, με το εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο. Στην

πραγματικότητα, η ηλεκτρική πόλωση των περιοχών προσανατολίζεται σε ένα εύρος διευθύνσεων γύρω απ' τη διεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου.

Στο (σχ-6), απεικονίζεται η μη-πολωμένη, πολωμένη και αποπολωμένη κατάσταση σε κεραμικό τύπου PZT.

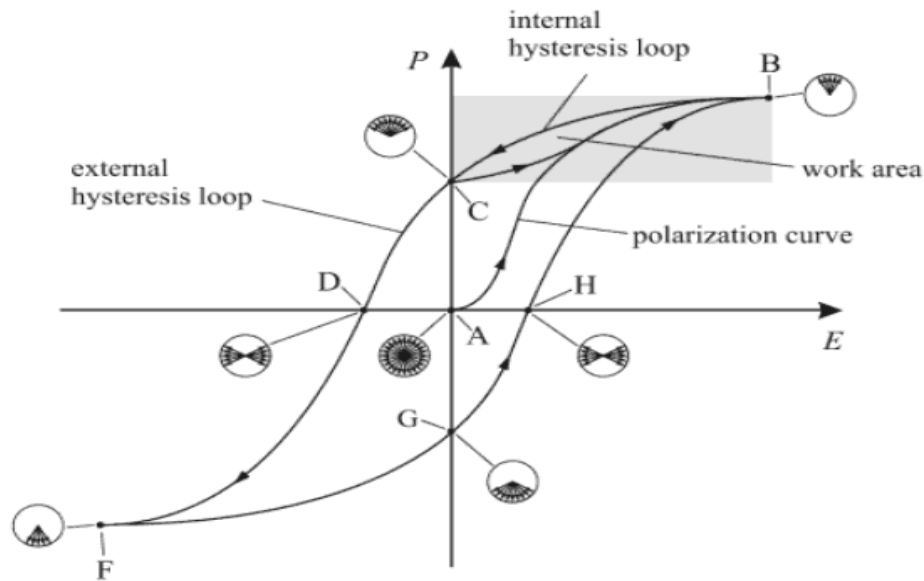


**Σχ-6.** Κατανομή των περιοχών σε σιδηροηλεκτρικά κεραμικά. Από αριστερά: μη-πολωμένα, πολωμένα και αποπολωμένα κεραμικά.

### 6.2.6 Ηλεκτρομηχανική συμπεριφορά

Οι διαδικασίες δημιουργίας περιοχής στα σιδηροηλεκτρικά κεραμικά προκαλούνται από εξωτερικά ηλεκτρικά πεδία και εξαρτώνται απ' τη διηλεκτρική και την αντίστροφη πιεζοηλεκτρική συμπεριφορά του υλικού. Εξαιτίας αυτών των διαδικασιών, η σχέση μεταξύ της ηλεκτρικής πόλωσης  $P$  και του εφαρμοζόμενου ηλεκτρικού πεδίου  $E$  είναι μη γραμμική και ακολουθεί τον γνωστό βρόχο υστέρησης (σχ-7). Λαμβάνοντας υπόψη την προηγούμενη ανάλυση για τα κεραμικά υλικά, μπορούν να προκύψουν ποικίλες διαμορφώσεις περιοχών Weiss και έτσι για συγκεκριμένη στιγμιαία τιμή του ηλεκτρικού πεδίου, να προκύπτουν διαφορετικές τιμές ηλεκτρικής πόλωσης. Ξεκινώντας από μια μη-πολωμένη κατάσταση (αρχή του συστήματος συντεταγμένων του E-P επιπέδου), οι περιοχές προσανατολίζονται στο αυξανόμενο ηλεκτρικό πεδίο μέχρι να ευθυγραμμιστούν όλες στη διεύθυνσή του. Έτσι, η καμπύλη πόλωσης η οποία φαίνεται στο (σχ-7), αναπτύσσεται μεταξύ των σημείων A και B. Αν το ηλεκτρικό πεδίο μειωθεί στη τιμή 0, ένα μικρό μέρος των περιοχών θα αναδιπλωθούν εξαιτίας των μηχανικών τάσεων που αναπτύσσονται μέσα στο υλικό. Η υπολειπόμενη πόλωση, καλείται *παραμένουσα πόλωση*  $P_r$ .

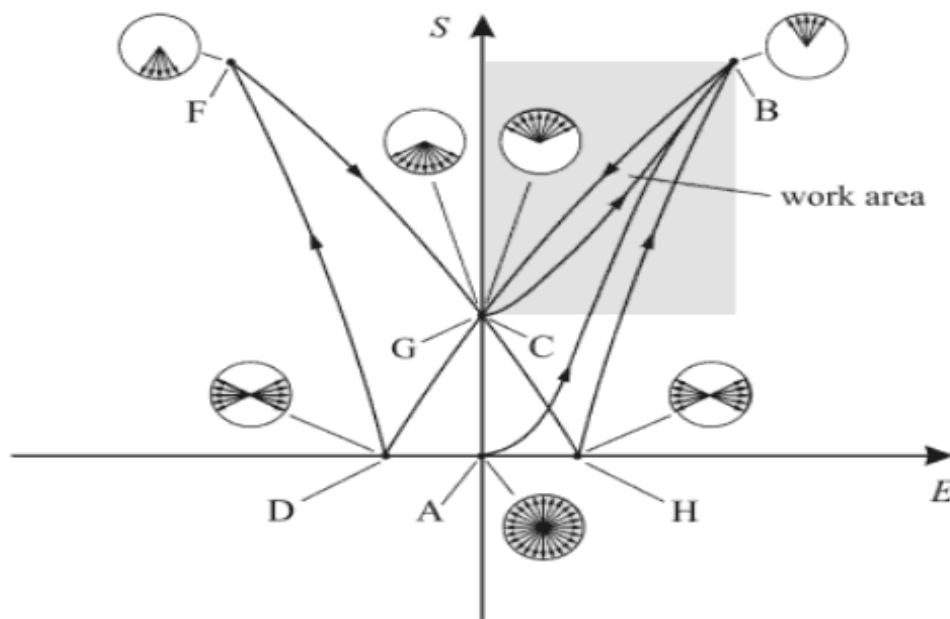
Αυτή η συσχέτιση απεικονίζεται στο (σχ-7) απ' τη καμπύλη μεταξύ των σημείων B και C.



Σχ-7. Απεικόνιση της ηλεκτρικής πόλωσης  $P$  συναρτήσει του ηλεκτρικού πεδίου  $E$ .

Αν εφαρμοστεί ηλεκτρικό πεδίο στην αντίθετη κατεύθυνση, οι περιοχές σταδιακά θα αναπροσανατολιστούν, μέχρι να ευθυγραμμιστούν όλες τελικά, με τη νέα κατεύθυνση του πεδίου. Σ' αυτή τη περίπτωση, το ζεύγος των μεταβλητών  $(E, P)$  ακολουθεί τη καμπύλη κατά μήκος των σημείων C-D-F. Στο σημείο D, το ηλεκτρικό πεδίο παίρνει τιμή στην οποία το υλικό μακροσκοπικά αποπολώνεται, Το συγκεκριμένο πεδίο, καλείται *συνεκτικό πεδίο*  $E_c$ . Αν το ηλεκτρικό πεδίο προσανατολιστεί ξανά στην αρχική του κατεύθυνση, οι περιοχές σταδιακά θα αναπροσανατολιστούν ξανά και θα ευθυγραμμιστούν με τη κατεύθυνση της ηλεκτρικής ροής. Σ' αυτή τη περίπτωση, το ζεύγος των μεταβλητών  $(E, P)$  διέρχεται της καμπύλης κατά μήκος των σημείων F-G-H-B. Οι καμπύλες κατά μήκος των σημείων B-C-D-F και F-G-H-B, σχηματίζουν τους λεγόμενους *εξωτερικούς βρόχους υστέρησης*. Αν η διεύθυνση του εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου αντιστραφεί πριν ευθυγραμμιστούν όλες οι περιοχές, τότε το ζεύγος των μεταβλητών  $(E, P)$  κινείται σε τοπικές περιοχές υστέρησης που ονομάζονται *εσωτερικοί βρόχοι υστέρησης*.

Η σχέση μεταξύ της παραμόρφωσης  $S$  του υλικού και του ηλεκτρικού πεδίου  $E$  περιγράφεται στο παρακάτω σχήμα. Από τη μορφή της, η συγκεκριμένη καμπύλη ονομάζεται *καμπύλη – πεταλούδα* (σχ-8).



Σχ-8. Απεικόνιση της παραμόρφωσης  $S$  συναρτήσει του ηλεκτρικού πεδίου  $E$ .

Το εύρος των τιμών του ηλεκτρικού πεδίου που χρησιμοποιούνται στις εφαρμογές με πιεζοηλεκτρικά κεραμικά, κυμαίνεται από 0 kV/mm έως 2 kV/mm. Η περιοχή που ενδιαφέρει τις εφαρμογές, επισημαίνεται στα (σχ-7) και (σχ-8) με γκρι χρώμα. Μέσα σ' αυτά τα όρια, το πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο χρησιμοποιείται με το βέλτιστο δυνατό τρόπο αφού προκαλείται απ' την ομοιόμορφη ευθυγράμμιση των περιοχών. Επιπλέον, μειώνεται και η μη-γραμμική συμπεριφορά της υστέρησης, η οποία επηρεάζει τα προσωρινά ηλεκτρικά χαρακτηριστικά του υλικού. Για να συντονίσουμε τα πιεζοκεραμικά υλικά σ' αυτή τη περιοχή εργασίας, στο τέλος της κατασκευαστικής διαδικασίας το κεραμικό υλικό πολώνεται στην επιθυμητή διεύθυνση, εφαρμόζοντας ένα ισχυρό ηλεκτρικό πεδίο λίγο κάτω απ' τη θερμοκρασία Curie.

Όσον αφορά τώρα τις μηχανικές επιδράσεις στα υλικά αυτά, αυτές περιορίζονται μόνο σε συμπιεστικές φορτίσεις, δεδομένου ότι τα σιδηροηλεκτρικά κεραμικά καταστρέφονται εύκολα ακόμα και με μικρές εφελκυστικές φορτίσεις. Τα παραπάνω χαρακτηριστικά θα πρέπει να λαμβάνονται υπόψη στη σχεδίαση διεγερτών από πιεζοκεραμικά υλικά.

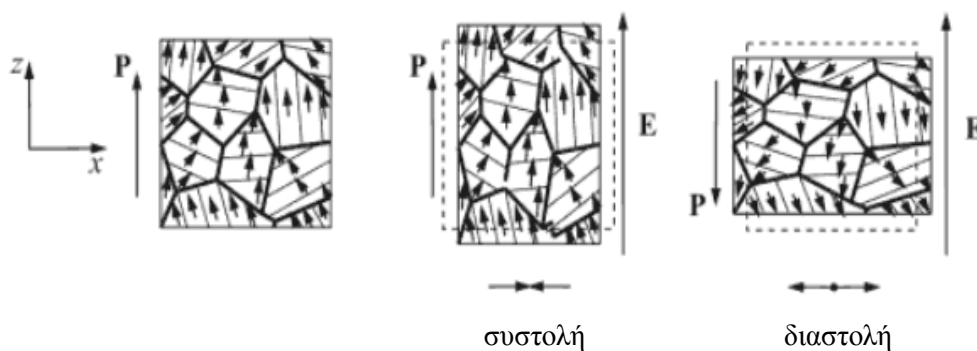
### 6.2.7 Πιεζοηλεκτρικοί διεγέρτες με μορφή δοκών κάμψης

Όλα τα είδη των πιεζοηλεκτρικών διεγερτών, βασίζονται το αντίστροφο πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο. Εφαρμόζοντας δηλαδή ένα εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο στο πιεζοηλεκτρικό υλικό, εμφανίζονται εκτάσεις και συμπίεσεις του υλικού οι οποίες εξαρτώνται απ' τον

προσανατολισμό του πεδίου σε σχέση με τη κρυσταλλική δομή στην περίπτωση των μονοκρυσταλλικών υλικών και από τον προσανατολισμό του πεδίου σε σχέση με τη παραμένουσα πόλωση στην περίπτωση των σιδηροηλεκτρικών κεραμικών. Η μεταβολή του μήκους του πιεζοηλεκτρικού υλικού, χρησιμοποιείται συνήθως για την δημιουργία γραμμικών διεγερτών (σωρευμένοι διεγέρτες), αξιοποιώντας το διάμηκες πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο. Αυτό το είδος ταλαντωτών, χαρακτηρίζονται από μικρές μετατοπίσεις και τη δημιουργία υψηλών δυνάμεων.

Γραμμικοί πιεζοηλεκτρικοί διεγέρτες, χρησιμοποιούνται σε διαφορετικά πεδία εφαρμογών (π.χ. ως υδάτινοι υπερηχητικοί ταλαντωτές, στην αυτοκινητοβιομηχανία, στην οπτική). Οι πολύ μικρές παραμορφώσεις σε υψηλά ηλεκτρικά δυναμικά (1-10kV), αποτελούν μειονέκτημα για το συγκεκριμένο είδος διεγερτών.

Όπως ήδη αναφέρθηκε παραπάνω, εφαρμόζοντας ένα ηλεκτρικό πεδίο στη διεύθυνση της παραμένουσας πόλωσης  $P_r$  του σιδηροηλεκτρικού κεραμικού, εκτός από τη χωρική ευθυγράμμιση των περιοχών πόλωσης του υλικού, αυτό έχει ως αποτέλεσμα και την αύξηση ή μείωση της συνολικής παραμόρφωσης κατά μήκος της διεύθυνσης του ηλεκτρικού πεδίου. Αυτές οι διαμήκεις εκτάσεις ή συμπίεσεις του υλικού, συνδυάζονται με εγκάρσιες συμπίεσεις ή εκτάσεις κάθετες στη διεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου (εγκάρσιο πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο). Τα παραπάνω απεικονίζονται στο παρακάτω σχήμα.

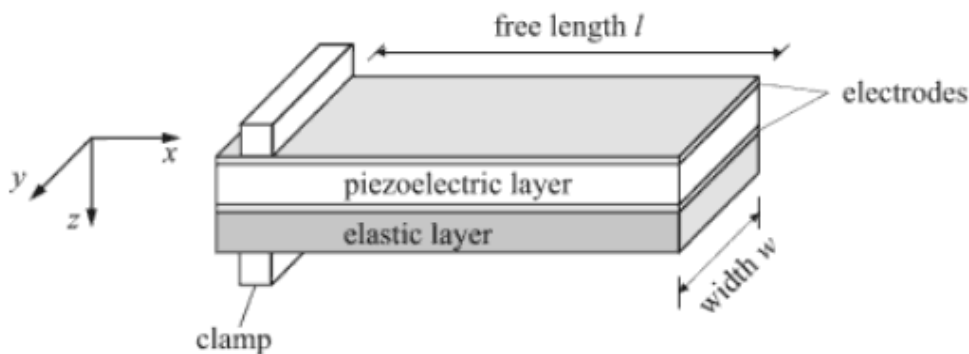


**Σχ-9.** Εγκάρσια παραμορφωτική συμπεριφορά των PZT κεραμικών. Από αριστερά: κατάσταση πόλωσης, ηλεκτρικό πεδίο παράλληλα ευθυγραμμισμένο στη παραμένουσα πόλωση (συστολή) και ηλεκτρικό πεδίο αντιπαράλληλα ευθυγραμμισμένο στη παραμένουσα πόλωση (διαστολή).

Αυτό το χαρακτηριστικό των σιδηροηλεκτρικών κεραμικών από PZT, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την δημιουργία των λεγόμενων *μονόμορφων δομών* (σχ-10). Μια

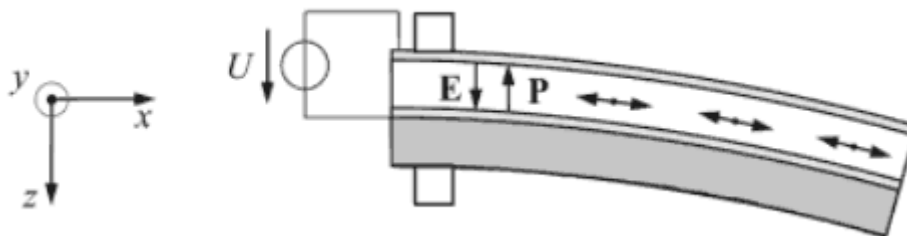
τέτοια δομή, αποτελείται από ένα ενεργό πιεζοκεραμικό και ένα παθητικό ελαστικό στρώμα.

Αν το πιεζοκεραμικό στοιχείο αποτελείται από ένα μονό στρώμα, τότε αναφερόμαστε σε *μονοστρωματικό* τύπο. Αν όμως το πιεζοκεραμικό στοιχείο αποτελείται από περισσότερα ενεργά πιεζοηλεκτρικά στρώματα, τότε αναφερόμαστε σε *πολυστρωματικό* τύπο.



Σχ-10. Αλληλουχία στρωμάτων σε μονόμορφη δομή.

Η κίνηση του πιεζοκεραμικού στοιχείου, που οφείλεται στην έκταση ή την συμπίεση του, περιορίζεται απ' το παθητικό ελαστικό στοιχείο. Αυτό έχει σαν συνέπεια την εμφάνιση μηχανικής ροπής με αποτέλεσμα την παραμόρφωση της συνολικής δομής (σχ-11). Η παραμόρφωση της συνολικής δομής στη διεύθυνση  $z$ , είναι πολύ μεγαλύτερη απ' τη παραμόρφωση του πιεζοηλεκτρικού στοιχείου στη διεύθυνση  $x$ . Έτσι οι μικρές μεταβολές του μήκους του πιεζοκεραμικού στοιχείου μετατρέπονται σε παραμόρφωση κάμψης. Με τον τρόπο αυτό, είναι δυνατό να δημιουργηθούν μεγάλες παραμορφώσεις στη διεύθυνση  $z$ , ακόμα και όταν ο διεγέρτης ενεργοποιείται με χαμηλά ηλεκτρικά δυναμικά (24-200V).

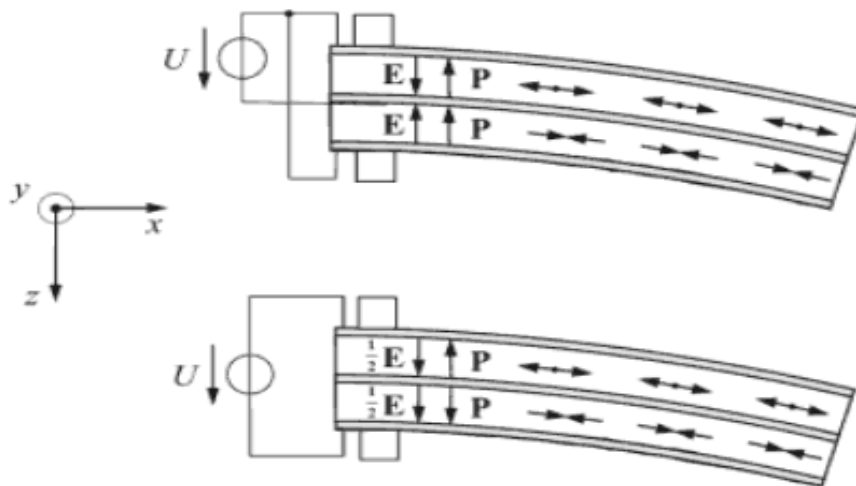


Σχ-11. Συμπεριφορά μονόμορφης δομής που υπόκειται σε ηλεκτρικό πεδίο.



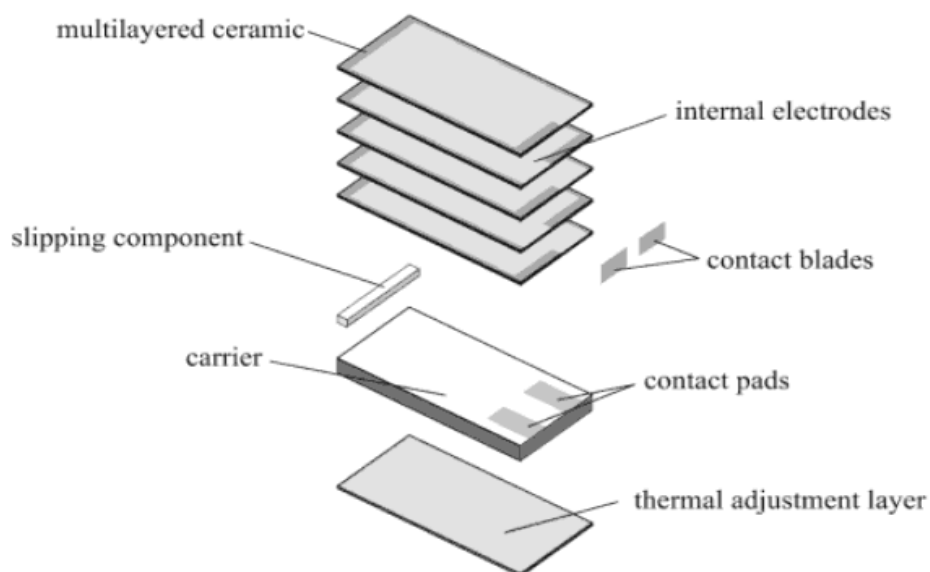
Για να αυξήσουμε τη παραμόρφωση κάμψης του συστήματος δοκού – διεγέρτη, το παθητικό ελαστικό στοιχείο μπορεί ν' αντικατασταθεί από ένα δεύτερο ενεργό πιεζοκεραμικό στοιχείο.

Αυτή είναι η λεγόμενη *δίμορφη δομή*. Θεωρούμε εδώ μια δίμορφη δομή μονοστρωματικού τύπου. Αν οι διευθύνσεις ηλεκτρικής πόλωσης και των δυο πιεζοηλεκτρικών στρωμάτων είναι οι ίδιες και τα στρώματα οδηγούνται με μια παράλληλη ηλεκτρική σύνδεση, τότε το σύστημα καλείται *παράλληλη δίμορφη δομή*. Αν οι κατευθύνσεις ηλεκτρικής πόλωσης των δυο στρωμάτων είναι αντίθετες και τα στρώματα οδηγούνται με μια σειριακή ηλεκτρική σύνδεση, τότε το σύστημα ονομάζεται *σειριακή δίμορφη δομή* (σχ-12).



**Σχ-12.** Συμπεριφορά δίμορφης δομής, που υπόκειται σε ηλεκτρικό πεδίο. Επάνω φαίνεται η παράλληλη δίμορφη δομή και κάτω η σειριακή δίμορφη δομή.

Το πλεονέκτημα στη σειριακή ηλεκτρική σύνδεση αποτελεί το γεγονός ότι δεν απαιτείται η παρουσία εσωτερικής επαφής και επομένως εσωτερικού ηλεκτροδίου. Το μειονέκτημα όμως είναι ότι στο εσωτερικό του κάθε πιεζοηλεκτρικού στρώματος, η τιμή του ηλεκτρικού πεδίου είναι σχεδόν η μισή σε σχέση με αυτή στην παράλληλη δίμορφη δομή.



Σχ-13. Δομή μονόμορφης δοκού κάμψης πολυστρωματικού τύπου

Στο παραπάνω σχήμα περιγράφεται η δομή μιας μονόμορφης δοκού κάμψης με πιεζοηλεκτρικό στρώμα πολυστρωματικού τύπου. Το πιεζοκεραμικό στοιχείο, αποτελείται από 5 ενεργά πιεζοηλεκτρικά στρώματα και το παθητικό στοιχείο αποτελείται από ένα στρώμα – φορέα και ένα θερμικά προσαρμοσμένο στρώμα.

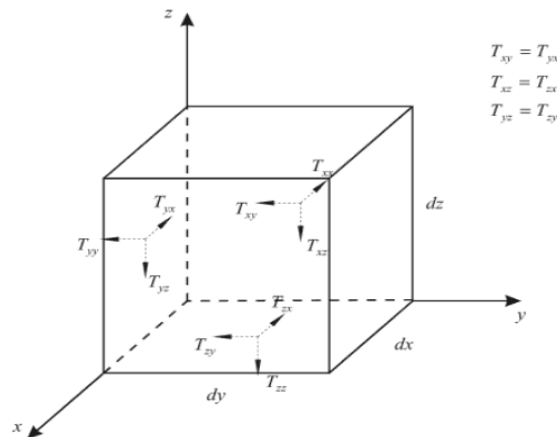
Συνήθως, τα ηλεκτρόδια συνδέονται μεταξύ τους έτσι ώστε να διασφαλίζεται η εναλλασσόμενη πολικότητα μεταξύ των γειτονικών στρωμάτων (ηλεκτρική παράλληλη σύνδεση). Συγκρίνοντας με τα πιεζοηλεκτρικά κεραμικά μονοστρωματικού τύπου, το χαμηλό ηλεκτρικό δυναμικό αποτελεί πλεονέκτημα των πιεζοηλεκτρικών κεραμικών πολυστρωματικού τύπου [5]. Οι πιεζοηλεκτρικοί διεγέρτες μονοστρωματικού τύπου, απαιτούν ηλεκτρικό δυναμικό λειτουργίας τουλάχιστον 200V ενώ στους αντίστοιχους διεγέρτες πολυστρωματικού τύπου, το δυναμικό λειτουργίας μειώνεται στα 24V.

### 6.3 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΕΖΟΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Για να περιγράψουμε τη στατική και δυναμική συμπεριφορά των πιεζοηλεκτρικών δοκών κάμψης, είναι απαραίτητο να περιγράψουμε πρώτα την εντατική και παραμορφωτική κατάσταση καθώς και την ελαστική συμπεριφορά ενός πιεζοηλεκτρικού κρυστάλλου. Με βάση αυτά, είναι δυνατή η κατασκευή των απαραίτητων θερμοδυναμικών δυναμικών και των πιεζοηλεκτρικών καταστατικών εξισώσεων που προκύπτουν.

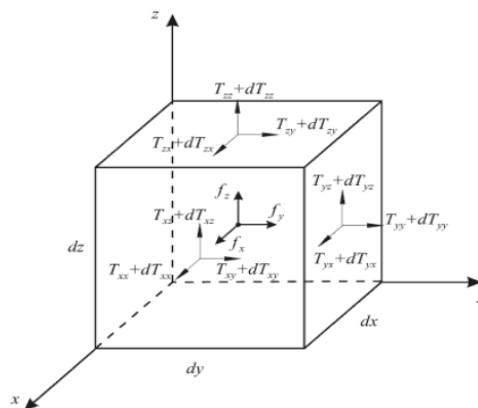
### 6.3.1 Πυκνότητα ενέργειας της ελαστικής παραμόρφωσης

Για να κατανοήσουμε καλύτερα τη σχέση τάσης – παραμόρφωσης σε ολόκληρο το στερεό σώμα, θεωρούμε ένα απειροστό τμήμα όγκου  $dV$  σχήματος ορθογωνίου εφοδιασμένο με ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων [6]. Εφόσον οι μηχανικές τάσεις είναι συνεχώς κατανομημένες σε ολόκληρο το στερεό σώμα, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ένα συνεχές μηχανικό φορτίο εφαρμόζεται σε κάθε όψη του τμήματος όγκου. Οι συνιστώσες της μηχανικής τάσης, αποδίδονται στα κέντρα των όψεων του όγκου και φαίνονται στο παρακάτω σχήμα (Σχ-14)



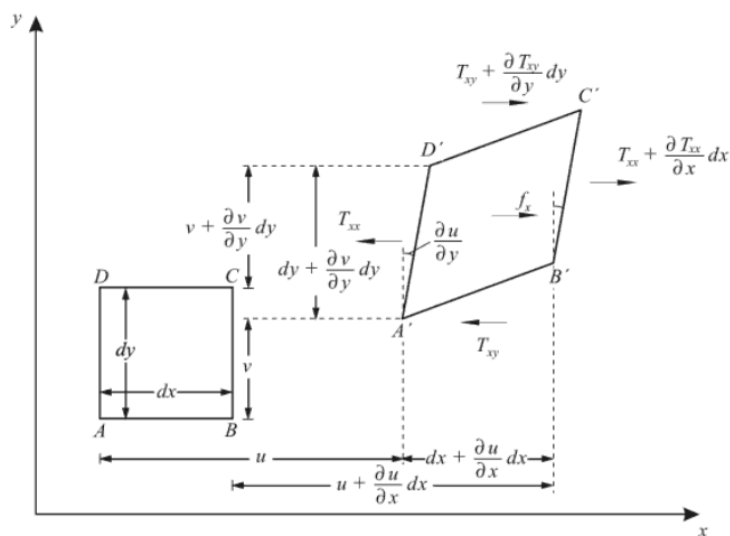
Σχ-14. Στοιχεία τάσης στις Καρτεσιανές συντεταγμένες.

Ο πίνακας των μηχανικών τάσεων, είναι συμμετρικός. Στην περίπτωση που πρέπει να ληφθούν υπόψη και μαζικές δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα,  $f_x, f_y, f_z$ , θεωρούμε ότι αυτές εφαρμόζονται στο γεωμετρικό κέντρο του τμήματος όγκου και συνεισφέρουν στις συνιστώσες της μηχανικής τάσης του εμπρόσθιου μέρους των επιφανειών του απειροστού τμήματος όγκου, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα (Σχ-15).



Σχ-15. Η συμβολή των μαζικών δυνάμεων στη διαμόρφωση των συνιστωσών της μηχανικής τάσης.

Για να απλοποιηθούν οι υπολογισμοί της πυκνότητας ενέργειας παραμόρφωσης του τμήματος όγκου, παρακάτω λαμβάνεται υπόψη μόνο το έργο που προκύπτει από τις μηχανικές τάσεις που δρουν στη διεύθυνση  $x$ . Με τον ίδιο τρόπο, υπολογίζεται και το έργο που προκύπτει από τις μηχανικές τάσεις που επιδρούν στις διευθύνσεις  $y$  και  $z$ . Στο σχ-16, παρουσιάζεται το στοιχείο όγκου στην απαραμόρφωτη και στην παραμορφωμένη κατάσταση, στο επίπεδο  $x$ -  $y$ . Λόγω της τάσης  $T_{xx}$  που ενεργεί στα αριστερά του τμήματος όγκου, η δύναμη που ασκείται στην πλευρά αυτή είναι ίση με  $T_{xx}dydz$ , όπου  $dz$  είναι το πάχος του τμήματος όγκου στη διεύθυνση  $z$ .



Σχ-16. Το στοιχείο όγκου στην απαραμόρφωτη και στην παραμορφωμένη κατάσταση στο επίπεδο  $x$ -  $y$ .

Η μετατόπιση του μέσου της πλευράς AD, του σημείου δηλαδή που υποθέτουμε ότι ασκείται η συγκεκριμένη τάση, είναι η μετατόπιση  $u$  του σημείου A, προσθέτοντας σ’

αυτήν την επιπλέον μετατόπιση  $\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y} dy$  του μέσου της πλευράς A’D’ ως προς το σημείο

A’. Έτσι, η συνολική μετατόπιση του μέσου της πλευράς AD που προκύπτει, είναι:

$$u_{AD} = u + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y} dy \tag{3.1}$$

Με βάση τη παραπάνω σχέση, το έργο της μηχανικής τάσης  $T_{xx}$ , θα είναι:

$$dW_{T_{xx}} = -T_{xx} d \left( u + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) dydz \tag{3.2}$$

Λαμβάνοντας υπόψη και τις μετατοπίσεις των μέσων των πλευρών BC, AB, DC που προκαλούνται από τις αντίστοιχες μηχανικές τάσεις και συμπεριλαμβάνοντας και τη

μαζική δύναμη  $f_x$ , προκύπτει ότι το συνολικό έργο στη διεύθυνση  $x$  (δεδομένου ότι  $dx dy dz = dV$ ):

$$dW_{x_1} = \left[ T_{xx} dS_{xx} + T_{xy} d\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \right] dV \quad (3.3)$$

Στην εξίσωση (3.3), η παραμόρφωση του υλικού δίνεται απ' τη σχέση:

$$d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = dS_{xx} \quad (3.4)$$

Η μεταβλητή  $S_{xx}$  συμβολίζει τη μηχανική παραμόρφωση στη διεύθυνση  $x$ , σε σχέση με τη μηχανική αξονική τάση  $T_{xx}$  που δρα στην ίδια διεύθυνση.

Ομοίως, το έργο στη διεύθυνση  $y$ , είναι:

$$dW_{x_2} = \left[ T_{yy} dS_{yy} + T_{xy} d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \right] dV \quad (3.5)$$

Το συνολικό έργο στο επίπεδο  $x$ - $y$  που απορρέει απ' τις μηχανικές τάσεις που ασκούνται, μέσω των (3.3) και (3.5), θα είναι:

$$dW_x = (T_{xx} dS_{xx} + T_{yy} dS_{yy} + 2T_{xy} dS_{xy}) dV \quad (3.6)$$

Στην εξίσωση (3.6), χρησιμοποιήθηκε η ακόλουθη σχέση για την εγκάρσια παραμόρφωση [7]:

$$S_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (3.7)$$

Η συνολική ενέργεια, λόγω της ελαστικής παραμόρφωσης στο συνολικό τμήμα όγκου  $dV$ , είναι:

$$dW_m = (T_{xx} dS_{xx} + T_{yy} dS_{yy} + T_{zz} dS_{zz} + 2T_{xy} dS_{xy} + 2T_{yz} dS_{yz} + 2T_{xz} dS_{xz}) dV \quad (3.8)$$

Συχνά, οι συντεταγμένες διευθύνσεις  $x$ ,  $y$  και  $z$  αντικαθίστανται από τους δείκτες 1, 2 και 3, οπότε η εξίσωση (3.8) γράφεται:

$$dW_m = \left( \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 T_{ij} dS_{ij} \right) dV \quad (3.9)$$

Τελικά, η πυκνότητα ενέργειας της ελαστικής παραμόρφωσης που δίνεται απ' την εξίσωση (3.9), σύμφωνα με την *αθροιστική σύμβαση του Einstein* γράφεται με τον ακόλουθο τρόπο:

$$dw_m = T_{ij} dS_{ij} \quad (3.10)$$

ή αλλιώς:

$$w_m = \frac{1}{2} T_{ij} S_{ij} \quad (3.11)$$

### 6.3.2 Πυκνότητα ενέργειας του ηλεκτροστατικού πεδίου

Η πυκνότητα ηλεκτρικής ενέργειας  $W_e$ , είναι σημαντική ποσότητα για τη μοντελοποίηση των πιεζοηλεκτρικών φαινομένων και περιγράφεται αναλυτικά παρακάτω. Αγνοώντας πιθανές απώλειες, η ενέργεια ενός ηλεκτροστατικού πεδίου θα πρέπει να είναι ίση με το έργο που απαιτείται για τη δημιουργία του ηλεκτρικού πεδίου. Για τη μεταφορά φορτίου  $dQ > 0$  από μια κάθοδο σε μια άνοδο διαφοράς ηλεκτρικού δυναμικού  $U$ , απαιτείται έργο:  $dW_e = U dQ$ . Ολοκληρώνοντας τη σχέση αυτή κατά μέλη και με τη βοήθεια της σχέσης  $Q = CU$ , προκύπτει:

$$W_e = \frac{1}{2} QU \quad (3.12)$$

Το ηλεκτρικό φορτίο  $Q$  συνδέεται με την πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου  $\rho$  με την ακόλουθη σχέση:

$$Q = \iiint_V \rho dV \quad (3.13)$$

Εισάγοντας την (3.13) στην (3.12), την έννοια του ηλεκτρικού δυναμικού  $\phi$ , της ηλεκτρικής μετατόπισης  $D$  και την εξίσωση του *Maxwell*:  $\rho = \text{div}D$ , το επιτελούμενο έργο  $W_e$  μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση:

$$W_e = \frac{1}{2} \iiint_V \phi \cdot \text{div}D dV \quad (3.14)$$

Επειδή  $\text{div}(\phi D) = \phi \text{div}D + D \cdot \text{grad}\phi$ , η (3.14) γίνεται:

$$W_e = \frac{1}{2} \iiint_V \text{div}(\phi D) dV - \frac{1}{2} \iiint_V D \cdot \text{grad}\phi dV \quad (3.15)$$

Ο πρώτος όρος της παραπάνω εξίσωσης, με τη βοήθεια του θεωρήματος *Gauss* [8], μπορεί να μετασχηματιστεί σ' ένα επιφανειακό ολοκλήρωμα πάνω στο κλειστό σύνορο  $A$  του όγκου  $V$ :

$$\iiint_V \text{div}(\phi D) dV = \oint_A (\phi D) \cdot dA \quad (3.16)$$

Θεωρώντας ότι η κατανομή του ηλεκτρικού φορτίου μηδενίζεται στο άπειρο,  $\rho_\infty = 0$ , και επειδή για το ηλεκτρικό δυναμικό και την ηλεκτρική μετατόπιση ισχύει:

$$\phi \sim \frac{1}{r} \quad \text{και} \quad |D| \sim \frac{1}{r^2} \quad (3.17)$$

Συμπεραίνουμε ότι στο άπειρο το επιφανειακό ολοκλήρωμα μηδενίζεται, δεδομένου ότι η επιφάνεια αυξάνεται κατά  $r^2$  και η προς ολοκλήρωση ποσότητα μειώνεται κατά  $1/r^3$ .

Έτσι η (3.15), γίνεται:

$$W_e = -\frac{1}{2} \iiint_V D \cdot \text{grad} \phi \, dV \quad (3.18)$$

Λόγω της σχέσης  $\text{curl} E = 0$  που ισχύει για ένα ηλεκτροστατικό πεδίο, το ηλεκτρικό πεδίο  $E$  μπορεί μαθηματικά να αναπαρασταθεί με τη βοήθεια της κλίσης ενός βαθμωτού ηλεκτρικού δυναμικού  $\phi$ , δηλαδή:

$$E = -\text{grad} \phi \quad (3.19)$$

Έτσι η (3.18) μέσω της (3.19), γίνεται:

$$W_e = \frac{1}{2} \iiint_V E \cdot D \, dV \quad (3.20)$$

Έτσι, από την (3.20) προκύπτει η μορφή της πυκνότητας ηλεκτρικής ενέργειας:

$$w_e = \frac{1}{2} E \cdot D \quad (3.21)$$

ή με το συμβολισμό των δεικτών,

$$w_e = \frac{1}{2} E_i D_i \quad (3.22)$$

Η πυκνότητα ενέργειας της ελαστικής παραμόρφωσης (3.11) και η τελευταία σχέση της πυκνότητας ηλεκτρικής ενέργειας (3.22), έχουν σημαντικό ρόλο στη μοντελοποίηση των πιεζοηλεκτρικών υλικών.

### 6.3.3 Θερμοδυναμική της παραμόρφωσης

Βασική επιδίωξη, είναι ο υπολογισμός του έργου που απαιτείται για τη παραμόρφωση ενός πιεζοηλεκτρικού σώματος. Το σώμα θεωρείται ως ένα θερμοδυναμικά κλειστό σύστημα (π.χ. η μάζα του σώματος παραμένει σταθερή). Γενικά, ένα σύστημα ανταλλάσσει ενέργεια με το περιβάλλον του. Πιο συγκεκριμένα, η επίδραση του περιβάλλοντος στο διερευνούμενο σύστημα, προκαλεί την εμφάνιση επιφανειακών και μαζικών δυνάμεων. Οι επιφανειακές και μαζικές δυνάμεις προκαλούν έργο, το οποίο με τη σειρά του προκαλεί αλλαγή της ενέργειας του συστήματος. Εκτός από τις μηχανικές αλληλεπιδράσεις του συστήματος με το περιβάλλον του, οι ηλεκτρικές και οι θερμικές αλληλεπιδράσεις μπορούν επίσης να προκαλέσουν αλλαγή στην ενέργεια του συστήματος. Αρχικά,

λαμβάνουμε υπόψη τις μηχανικές και θερμικές αλληλεπιδράσεις του συστήματος με το περιβάλλον του και στη συνέχεια, θα λάβουμε υπόψη και τις ηλεκτρικές αλληλεπιδράσεις. Αυτό που γενικά ισχύει, είναι ότι οι διεργασίες σ' ένα κλειστό σύστημα εξελίσσονται, μέχρι να προκύψει μια κατάσταση ισορροπίας. Η κατάσταση ισορροπίας μπορεί να καθορισθεί καλά με τη βοήθεια ενός συγκεκριμένου αριθμού μακροσκοπικά μετρήσιμων παραμέτρων που καλούνται ανεξάρτητες καταστατικές μεταβλητές του συστήματος. Σε καθεμιά απ' αυτές τις καταστατικές μεταβλητές αντιστοιχεί ένα συγκεκριμένο είδος ενέργειας. Σύμφωνα με τον 1<sup>ο</sup> νόμο της θερμοδυναμικής: η ολική ενέργεια σε ένα κλειστό σύστημα παραμένει σταθερή. Σύμφωνα με τον Kelvin, η συνολική θερμική ενέργεια ενός συστήματος, λόγω της κινητικής ενέργειας των μορίων και των ατόμων, ονομάζεται εσωτερική ενέργεια  $\tilde{U}$  του συστήματος. Σύμφωνα με τον 1<sup>ο</sup> θερμοδυναμικό νόμο, η εσωτερική ενέργεια ενός συστήματος μπορεί να μεταβληθεί μόνο αν το σύστημα ανταλλάσσει ενέργεια με το περιβάλλον του. Η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας του συστήματος  $d\tilde{U}$ , ισούται με το άθροισμα της παρεχόμενης θερμότητας  $\delta\tilde{Q}$  και του παρεχόμενου μηχανικού έργου  $\delta W_m$  στο σύστημα:

$$d\tilde{U} = \delta\tilde{Q} + \delta W_m \quad (3.23)$$

Οι όροι  $\delta\tilde{Q}$  και  $\delta W_m$ , δείχνουν ότι τα ποσά της παρεχόμενης θερμότητας και έργου είναι απειροστά μικρά αλλά δεν αντιπροσωπεύουν τέλεια διαφορικά.

Επειδή η εσωτερική ενέργεια ενός συστήματος είναι ανάλογη της μάζας του, μπορεί να συσχετιστεί με το τμήμα όγκου  $dV$ . Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω, η πυκνότητα εσωτερικής ενέργειας είναι:

$$dU = \delta Q + \delta w_m \quad (3.24)$$

Στη σχέση αυτή, τα  $Q$  και  $w_m$  αντιπροσωπεύουν εκτατικές ποσότητες (επηρεάζονται απ' το περιβάλλον) ενώ  $U$  είναι καταστατική μεταβλητή. Σύμφωνα με τον 2<sup>ο</sup> νόμο της θερμοδυναμικής: η θερμότητα  $\delta Q$  που παρέχεται αντιστρέφτα στο σύστημα, στη θερμοκρασία  $\Theta$ , μπορεί να εκφραστεί σύμφωνα με την ακόλουθη σχέση:

$$\delta\tilde{Q} = \Theta d\tilde{\Sigma} \quad (3.25)$$

Η εκτατική μεταβλητή  $\tilde{\Sigma}$ , ονομάζεται εντροπία. Η εντροπία ανά μονάδα όγκου, καλείται πυκνότητα εντροπίας και συμβολίζεται με  $\Sigma$ .



Συνεπώς, η (3.24) μέσω της (3.25) γίνεται:

$$dU = \Theta d\Sigma + \delta w_m \quad (3.26)$$

Παρακάτω, μια γεωμετρική γραμμικοποίηση δικαιολογείται εξαιτίας των πολύ μικρών παραμορφώσεων του σώματος. Η μεταβολή της πυκνότητας ενέργειας παραμόρφωσης, έχει ήδη οριστεί στη σχέση (3.10):

$$\delta w_m = T_{ij} \delta S_{ij} \quad (3.27)$$

Θεωρώντας αντιστρεπτές μεταβολές και απειροστά ομοιογενείς παραμορφώσεις και εισάγοντας την (3.27) στην (3.26), προκύπτει:

$$dU = \Theta d\Sigma + T_{ij} \delta S_{ij} \quad (3.28)$$

Σε μια *αδιαβατική μεταβολή* ισχύει  $d\Sigma = 0$  (δεν υπάρχει ανταλλαγή θερμότητας με το περιβάλλον), οπότε από την (3.28) προκύπτει

$$dU = T_{ij} dS_{ij} \quad (3.29)$$

Επιπλέον, για μια *ισόθερμη μεταβολή* (σταθερή η θερμοκρασία), η σχέση (3.28) γίνεται:

$$d(U - \Theta \Sigma) = T_{ij} dS_{ij} \quad (3.30)$$

Έτσι, η πυκνότητα εσωτερικής ενέργειας, σε αδιαβατικές και ισόθερμες μεταβολές, μπορεί να πάρει την μορφή:

$$dU = \Theta d\Sigma + T_{ij} dS_{ij} \quad (3.31)$$

Για την κατανόηση των πιεζοηλεκτρικών καταστατικών εξισώσεων, πρέπει να επισημανθεί το ακόλουθο βασικό σχόλιο. Τα ζεύγη των μεταβλητών που εμφανίζονται σ' ένα τύπο ενέργειας, μπορούν να διακριθούν σε *εκτατικές* και *εντατικές ποσότητες*. Πρακτικά, στη διατύπωση των διαφόρων κατηγοριών ενέργειας, οι εκτατικές ποσότητες γράφονται πίσω απ' τα διαφορικά, ενώ οι εντατικές ποσότητες αντιπροσωπεύουν τους παράγοντες μπροστά απ' τα διαφορικά.

### 6.3.3.1 Εσωτερική Ενέργεια των πιεζοηλεκτρικών υλικών

Οι προηγούμενες μακροσκοπικές θεωρήσεις της μηχανικής και θερμοδυναμικής συμπεριφοράς ενός στερεού, επεκτείνονται παρακάτω στα ελαστικά διηλεκτρικά υλικά με πιεζοηλεκτρικά χαρακτηριστικά. Αυτά παρέχουν τη βάση, για τη φυσική περιγραφή της στατικής και δυναμικής συμπεριφοράς των πολυστρωματικών πιεζοηλεκτρικών δοκών κάμψης (διεγερτών). Η πυκνότητα ενέργειας του ηλεκτρικού πεδίου δίνεται από τη σχέση:

$$dw_e = E dD \quad (3.32)$$

ή αλλιώς

$$dw_e = E_i dD_i \quad (3.33)$$

Με τη βοήθεια της τελευταίας σχέσης, η πυκνότητα εσωτερικής ενέργειας (3.31), γράφεται ως εξής:

$$dU = \Theta d\Sigma + T_{ij} dS_{ij} + E_i dD_i \quad (3.34)$$

Η (3.34) περιγράφει την σχέση ενός θερμοδυναμικά ορισμένου δυναμικού, με τις εκτατικές ποσότητες  $\Sigma$ ,  $D_i$  και  $S_{ij}$  του συστήματος και αποτελεί τη βάση για τη θερμοδυναμική ανάλυση ελαστικών διηλεκτρικών με πιεζοηλεκτρικά χαρακτηριστικά. Στις παρακάτω θεωρήσεις, θα διατηρούνται αμετάβλητες είτε η θερμοκρασία  $\Theta$  ή η πυκνότητα εντροπίας  $\Sigma$  του συστήματος. Κατά συνέπεια, οι σταθερές του υλικού που θα εμφανίζονται στις καταστατικές εξισώσεις θα ισχύουν για αδιαβατικές και ισόθερμες μεταβολές.

### 6.3.3.2 Γραμμικές Καταστατικές Εξισώσεις και Ηλεκτρική Ενθαλπία

Από τη σχέση (3.34), προκύπτει ότι, για αδιαβατικές μεταβολές ( $d\Sigma=0$ ), η πυκνότητα εσωτερικής ενέργειας θα έχει τη μορφή:  $U=U(D_i, S_{ij})$ , όποτε:

$$dU = \left( \frac{\partial U}{\partial D_i} \right)_S dD_i + \left( \frac{\partial U}{\partial S_{ij}} \right)_D dS_{ij} \quad (3.35)$$

Ομοίως, οι συζυγείς εξαρτημένες μεταβλητές  $E_i$  και  $T_{ij}$  του συστήματος θα έχουν την μορφή:  $E_i=E_i(D_i, S_{ij})$  και  $T_{ij}=T_{ij}(D_i, S_{ij})$ , οπότε:

$$dE_i = \left( \frac{\partial E_i}{\partial D_k} \right)_S dD_k + \left( \frac{\partial E_i}{\partial S_{kl}} \right)_D dS_{kl} \quad (3.36)$$

$$dT_{ij} = \left( \frac{\partial T_{ij}}{\partial D_k} \right)_S dD_k + \left( \frac{\partial T_{ij}}{\partial S_{kl}} \right)_D dS_{kl} \quad (3.37)$$

Οι εξισώσεις (3.36) και (3.37), ονομάζονται *γραμμικές καταστατικές εξισώσεις*. Παρακάτω τα ζεύγη  $(\mathbf{T}, \mathbf{E})$  και  $(\mathbf{S}, \mathbf{E})$  θεωρούνται ως ανεξάρτητες μεταβλητές.

- **Καταστατικές Εξισώσεις με βάση τις ανεξάρτητες μεταβλητές  $(\mathbf{T}, \mathbf{E})$**

Αναπτύσσοντας τα ακόλουθα ολικά διαφορικά:

$$d(T_{ij} S_{ij}) = \frac{\partial(T_{ij} S_{ij})}{\partial T_{ij}} dT_{ij} + \frac{\partial(T_{ij} S_{ij})}{\partial S_{ij}} dS_{ij}$$

$$\Leftrightarrow d(T_{ij}S_{ij}) = S_{ij}dT_{ij} + T_{ij}dS_{ij} \quad (3.38)$$

και

$$d(E_i D_i) = \frac{\partial(E_i D_i)}{\partial E_i} dE_i + \frac{\partial(E_i D_i)}{\partial D_i} dD_i$$

$$\Leftrightarrow d(E_i D_i) = D_i dE_i + E_i dD_i \quad (3.39)$$

και αφαιρώντας κατά μέλη τις εξισώσεις (3.38) και (3.39), από την εξίσωση (3.34), προκύπτει

$$d(U - T_{ij}S_{ij} - E_i D_i) = -D_i dE_i - S_{ij} dT_{ij} \quad (3.40)$$

Ορίζοντας την ενθαλπία  $H$  ως:

$$H = U - T_{ij}S_{ij} - E_i D_i \quad (3.41)$$

από την (3.40) προκύπτει ότι:

$$dH = -D_i dE_i - S_{ij} dT_{ij} \quad (3.42)$$

και το συμπέρασμα .ότι  $H=H(E_i, T_{ij})$ . Επομένως:

$$dH = \left( \frac{\partial H}{\partial E_i} \right)_T dE_i + \left( \frac{\partial H}{\partial T_{ij}} \right)_E dT_{ij}$$

Άρα, οι συζυγείς εξαρτημένες μεταβλητές  $D_i$  και  $S_{ij}$  είναι συναρτήσεις των ανεξάρτητων μεταβλητών  $E_i$  και  $T_{ij}$  και τα ολικά διαφορικά τους έχουν την μορφή:

$$dD_i = \left( \frac{\partial D_i}{\partial E_k} \right)_T dE_k + \left( \frac{\partial D_i}{\partial T_{kl}} \right)_E dT_{kl} \quad (3.43)$$

$$dS_{ij} = \left( \frac{\partial S_{ij}}{\partial E_k} \right)_T dE_k + \left( \frac{\partial S_{ij}}{\partial T_{kl}} \right)_E dT_{kl} \quad (3.44)$$

Οι σχέσεις (3.43) και (3.44), αποτελούν ένα σύστημα καταστατικών εξισώσεων για το εκτατικό ζεύγος μεταβλητών  $(\mathbf{T}, \mathbf{E})$ , απ' όπου μπορούν να εξαχθούν οι υλικές σταθερές που φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Υλική σταθερά	Όνομα	Μονάδα στο SI
$\partial D_i / \partial E_k = \varepsilon_{ik}$	ηλεκτρική διαπερατότητα	$[\varepsilon_{ik}] = \text{F/m}$
$\partial D_i / \partial T_{kl} = \partial S_{ij} / \partial E_k = d_{ikl}$	πιεζοηλεκτρική σταθερά	$[d_{ikl}] = \text{m/V}$
$\partial S_{ij} / \partial T_{kl} = s_{ijkl}$	ελαστική σταθερά ακαμψίας	$[s_{ijkl}] = \text{m}^2/\text{N}$

Λαμβάνοντας υπόψη τις υλικές σταθερές, οι οποίες ορίζονται στον παραπάνω πίνακα, οι καταστατικές εξισώσεις για το εκτατικό ζεύγος μεταβλητών  $(\mathbf{T}, \mathbf{E})$ , παίρνουν την μορφή:

$$D_i = \varepsilon_{ik}^T E_k + d_{ikl} T_{kl} \quad (3.45)$$

$$S_{ij} = d_{ijk} E_k + s_{ijkl}^E T_{kl} \quad (3.46)$$

Οι καταστατικές εξισώσεις (3.45) και (3.46) θα χρησιμοποιηθούν στην συνέχεια για την εξαγωγή της στατικής συμπεριφοράς μιας πολυστρωματικής πιεζοηλεκτρικής δοκού κάμψης (διεγέρτης).

Η βάση για την περιγραφή της δυναμικής συμπεριφοράς μιας τέτοιας δοκού, είναι η ηλεκτρική ενθαλπία  $H_e$ , η οποία αναλύεται στην επόμενη παράγραφο.

- **Ηλεκτρική Ενθαλπία και Καταστατικές Εξισώσεις με βάση τις ανεξάρτητες μεταβλητές  $(\mathbf{S}, \mathbf{E})$**

Με δεδομένο ότι οι μεταβλητές  $S$  και  $E$  θεωρούνται τώρα ως νέες ανεξάρτητες μεταβλητές του συστήματος, αφαιρώντας την εξίσωση (3.39) απ' την (3.34), προκύπτει:

$$d(U - E_i D_i) = T_{ij} dS_{ij} - D_i dE_i \quad (3.47)$$

Ορίζοντας την ηλεκτρική ενθαλπία  $H_e^*$  ως:

$$H_e = U - E_i D_i \quad (3.48)$$

προκύπτει ότι:

$$dH_e = T_{ij} dS_{ij} - D_i dE_i \quad (3.49)$$

και το συμπέρασμα ότι  $H_e = H_e(S_{ij}, E_i)$ . Επομένως, θα ισχύει:

$$dH_e = \left( \frac{\partial H_e}{\partial S_{ij}} \right)_E dS_{ij} - \left( \frac{\partial H_e}{\partial E_i} \right)_S dE_i \quad (3.50)$$

Οι συζυγείς εξαρτημένες μεταβλητές  $T_{ij}$  και  $D_i$  θα είναι επίσης συναρτήσεις των ανεξάρτητων μεταβλητών  $E_i$  και  $S_{ij}$ , οπότε τα ολικά διαφορικά τους θα έχουν την μορφή:

$$dT_{ij} = \left( \frac{\partial T_{ij}}{\partial S_{kl}} \right)_E dS_{kl} + \left( \frac{\partial T_{ij}}{\partial E_k} \right)_S dE_k \quad (3.51)$$

$$dD_i = \left( \frac{\partial D_i}{\partial S_{kl}} \right)_E dS_{kl} + \left( \frac{\partial D_i}{\partial E_k} \right)_S dE_k \quad (3.52)$$

\* Το νέο θερμοδυναμικό δυναμικό θα μπορούσε να προκύψει και με την εφαρμογή κατάλληλου μετασχηματισμού Legendre [9]:  $H_e(S_{ij}, E_i) = U(S_{ij}, D_i) - E_i D_i$

Οι σχέσεις (3.51) και (3.52), αποτελούν ένα σύστημα καταστατικών εξισώσεων για το εκτατικό ζεύγος μεταβλητών ( $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{E}$ ), απ' όπου μπορούν να εξαχθούν οι υλικές σταθερές που φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Υλική σταθερά	Όνομα	Μονάδα στο SI
$\partial T_{ij} / \partial S_{kl} = c_{ijkl}$	Ελαστικές σταθερές	$[c_{ijkl}] = 1\text{N/m}^2$
$\partial T_{ij} / \partial E_k = -\partial D_i / \partial S_{kl} = -e_{ijk}$	Πιεζοηλεκτρικές σταθερές	$[e_{ijk}] = 1\text{C/m}^2$

Λαμβάνοντας υπόψη τις υλικές σταθερές, που ορίζονται στον παραπάνω πίνακα, οι καταστατικές εξισώσεις για το εκτατικό ζεύγος μεταβλητών ( $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{E}$ ), παίρνουν την μορφή:

$$T_{ij} = c_{ijkl}^E S_{kl} - e_{ijk} E_k \quad (3.53)$$

$$D_i = e_{ikl} S_{kl} + \varepsilon_{ik}^S E_k \quad (3.54)$$

Ολοκληρώνοντας την σχέση (3.34), η οποία ισχύει για ισόθερμη ή αδιαβατική μεταβολή και με τη βοήθεια της (3.48), προκύπτει η μορφή της ηλεκτρικής ενθαλπίας  $H_e$ :

$$H_e = \frac{1}{2} T_{ij} S_{ij} - \frac{1}{2} E_i D_i \quad (3.55)$$

Εισάγοντας και τις εξισώσεις (3.53) και (3.54), η (3.55) παίρνει τελικά τη μορφή:

$$\begin{aligned} H_e &= \frac{1}{2} (c_{ijkl}^E S_{kl} - e_{ijk} E_k) S_{ij} - \frac{1}{2} (e_{ikl} S_{kl} + \varepsilon_{ik}^S E_k) E_i \\ \Leftrightarrow H_e &= \frac{1}{2} c_{ijkl}^E S_{kl} S_{ij} - e_{ij} E_i S_{ij} - \frac{1}{2} \varepsilon_{ik}^S E_k E_i \end{aligned} \quad (3.56)$$

### 6.3.3 Συμβολισμός των Ελαστικών και Πιεζοηλεκτρικών Τανυστών

Όλες οι προηγούμενες εξισώσεις διατυπώθηκαν με βάση τον τανυστικό συμβολισμό. Παίρνοντας υπόψη και τις συμμετρικές ιδιότητες των πιεζοηλεκτρικών κεραμικών από PZT, ο συμβολισμός αυτός μπορεί να απλοποιηθεί και να μετατραπεί σε συμβολισμό πινάκων.

Στη βιβλιογραφία, σχετικά με τη θεωρία του πιεζοηλεκτρισμού, είναι γενικά αποδεκτή η χρήση δεικτών που αντιστοιχούν σε πίνακες σε αντίθεση με τον αυστηρό τανυστικό συμβολισμό. Η συμμετρία των τανυστών τάσης και παραμόρφωσης το επιτρέπει αυτό. Για

τον σκοπό αυτό, οι διπλοί δείκτες των τανυστών ( $ij$ ) και ( $kl$ ) αντικαθίστανται από τους δείκτες των πινάκων  $p$  και  $q$ . Οι αντιστοιχίσεις, συνοψίζονται στον ακόλουθο πίνακα:

$ij$ ή $kl$	11	22	33	23 ή 32	31 ή 13	12 ή 21
$p$ ή $q$	1	2	3	4	5	6

Εισάγοντας τους νέους δείκτες, οι γραμμικές καταστατικές εξισώσεις και η ηλεκτρική ενθαλπία, που διατυπώθηκαν σε προηγούμενες παραγράφους, μπορούν να εκφραστούν σε συμπυκνόμενη μορφή.

Οι γραμμικές καταστατικές εξισώσεις (3.45) και (3.46) με βάση το ζεύγος ανεξάρτητων μεταβλητών ( $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{E}$ ), μπορούν να διατυπωθούν με τον ακόλουθο τρόπο:

$$\boxed{D_i = \varepsilon_{ik}^T E_k + d_{iq} T_q} \quad (3.57)$$

$$\boxed{S_p = d_{pk} E_k + s_{pq}^E T_q} \quad (3.58)$$

Οι γραμμικές καταστατικές εξισώσεις (3.53) και (3.54) με βάση το ζεύγος των ανεξάρτητων μεταβλητών ( $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{E}$ ), μπορούν να πάρουν τη μορφή:

$$\boxed{T_p = c_{pq}^E S_q - e_{pk} E_k} \quad (3.59)$$

$$\boxed{D_i = e_{iq} S_q + \varepsilon_{ik}^S E_k} \quad (3.60)$$

Η ηλεκτρική ενθαλπία  $H_e$ , η οποία περιγράφεται στην εξίσωση (3.56), διατυπώνεται ανάλογα ως εξής:

$$\boxed{H_e = \frac{1}{2} c_{pq}^E S_q S_p - e_{ip} E_i S_p - \frac{1}{2} \varepsilon_{ik}^S E_k E_i} \quad (3.61)$$

**Το σύνολο των εξισώσεων (3.57) – (3.61), αποτελεί τη μαθηματική περιγραφή της γραμμικής συμπεριφοράς των πιεζοηλεκτρικών υλικών και αποτελεί τη βάση για την επίλυση σχετικών προβλημάτων.**

Οι πίνακες των σταθερών για οποιοδήποτε ανισότροπο υλικό (triclinic), χωρίς κέντρο συμμετρίας, έχουν τη μορφή [10]:

$$\text{Ο πίνακας ελαστικής ευκαμψίας: } s_{pq}^E = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} & s_{16} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} & s_{24} & s_{25} & s_{26} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} & s_{34} & s_{35} & s_{36} \\ s_{14} & s_{24} & s_{34} & s_{44} & s_{45} & s_{46} \\ s_{15} & s_{25} & s_{35} & s_{45} & s_{55} & s_{56} \\ s_{16} & s_{26} & s_{36} & s_{46} & s_{56} & s_{66} \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

$$\text{Ο πίνακας ελαστικής ακαμψίας: } c_{pq}^E = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{15} & c_{25} & c_{35} & c_{45} & c_{55} & c_{56} \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & c_{46} & c_{56} & c_{66} \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

$$\text{Ο πίνακας πιεζοηλεκτρικών συντελεστών: } d_{iq} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{12} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

$$\text{Ο πίνακας πιεζοηλεκτρικών σταθερών: } e_{ip} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} & e_{15} & e_{16} \\ e_{12} & e_{22} & e_{23} & e_{24} & e_{25} & e_{26} \\ e_{13} & e_{23} & e_{33} & e_{34} & e_{35} & e_{36} \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

$$\text{Ο πίνακας ηλεκτρικής επιδεκτικότητας: } \varepsilon_{ik}^E = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

Το φερροηλεκτρικό κεραμικό PZT, παρουσιάζει εξαγωνική κρυσταλλική συμμετρία (ανήκουν στη κρυσταλλική ομάδα  $C_{6v}=6mm$ ) και οι πίνακες των ελαστικών και ηλεκτρικών ιδιοτήτων του έχουν τις μορφές που φαίνονται παρακάτω.

$$\text{Ο πίνακας ελαστικής ευκαμψίας PZT: } s_{pq}^E = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{11} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ s_{13} & s_{13} & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(s_{11} - s_{12}) \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

$$\text{Ο πίνακας ελαστικής ακαμψίας PZT: } c_{pq}^E = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(c_{11} - c_{12}) \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

$$\text{Ο πίνακας πιεζοηλεκτρικών συντελεστών PZT: } d_{iq} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

$$\text{Ο πίνακας πιεζοηλεκτρικών σταθερών PZT: } e_{ip} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

$$\text{Ο πίνακας ηλεκτρικής επιδεκτικότητας PZT: } \varepsilon_{ik}^E = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (3.71)$$



## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- [1] G. H. Heartling. *Ferroelectric Ceramics - History and Technology*. *Journal of the American Ceramic Society*, Vol. 82, No.4, pp. 797-818, 1999.
- [2] K. Uchino. *Piezoelectric Actuator's 2004 - Materials, Design, Drive/Control, Modeling and Applications*. *Actuator 2004, 9th International Conference on New Actuators, Bremen*, pp. 38-47, June 2004.
- [3] P. Curie, J. Curie. *Contractions et dilations produits par des tensions electriques dans les cristaux hemieedres a faces inclines*. *Comptes Rendus de l' Academie des Sciences*, 93, pp. 1137-1140, 1881.
- [4] D. Zhou. *Experimental Investigation of Non-linear Constitutive Behaviour of PZT Piezoceramics*. *Forschungszentrum Karlsruhe, Wissenschaftliche Berichte, FZKA 6869, Dissertation*, pp. 6-12, 2003.
- [5] H. J. Schreiner, R. Binding, G. Helke. *Characterization of Piezoelectric Multilayer Actuators: Low and High Field Behaviour*. *7th International Conference on New Actuators, Actuator 2000, Bremen, June 2000*.
- [6] R. Solecki, R. J. Conant. *Advanced Mechanics of Materials*. *Oxford University Press*, pp. 196-201, New York, 2003.
- [7] R. Solecki, R. J. Conant. *Advanced Mechanics of Materials*. *Oxford University Press*, p. 60, New York, 2003.
- [8] G. B. Arfken, H. J. Weber. *Mathematical method for physicists*. 4th ed. *Academic Press*, pp. 58-59, San Diego, 1995.
- [9] M. L. Boas. *Mathematical Methods in the Physical Sciences*. 2nd ed. *John Wiley & Sons*, pp. 189-190, New York, 1983.
- [10] H. F. Tiersten. *Linear Piezoelectric Plate Vibrations - Elements of the Linear Theory of Piezoelectricity and the Vibrations of Piezoelectric Plates*. *Plenum Press New York*, pp. 51-61, 1969.

—————xxxx—————