

Ι. Π. Ρίζου

Αναπληρωτή Καθηγητή Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

**ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΚΛΑΣΙΚΗΣ
ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ**

Έκδοση 1α

9 Ιανουαρίου 2011

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το μάθημα της Κλασικής Μηχανικής αποτελεί ένα από τα βασικά μαθήματα στην κατάρτιση ενός Φυσικού. Είναι απαραίτητο στον μελλοντικό εκπαιδευτικό αφενός για να επιτύχει στις εξετάσεις επιλογής και αφετέρου επειδή πραγματεύεται σε μεγάλο μέρος ύλη την οποία πρόκειται να διδάξει. Είναι επίσης απαραίτητο στον φοιτητή που σκοπεύει να ακολουθήσει μεταπτυχιακές σπουδές καθώς η Κλασική Μηχανική καλύπτει συνήθως ένα σημαντικό τμήμα των θεμάτων των εξετάσεων εισαγωγής σε μεταπτυχιακά τμήματα.

Οι σημειώσεις αυτές βασίζονται στις παραδόσεις του μαθήματος Κλασική Μηχανική I του 2ου έτους του Τμήματος Φυσικής του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων και καλύπτουν συνοπτικά την ύλη που έχει διδαχθεί. Απευθύνονται σε φοιτητές οι οποίοι έχουν ήδη διδαχθεί τουλάχιστον ένα εισαγωγικό εξάμηνο Μηχανικής και έχει σκοπό αφενός να βοηθήσει στην ενοποίηση των προϋπαρχόντων γνώσεων με τη βοήθεια των μαθηματικών γνώσεων που έχουν επίσης αποκτήσει και αφετέρου να επεκταθεί σε νέα θέματα όπως αυτό των συζευγμένων ταλαντώσεων ή των κεντρικών δυνάμεων.

Η τελευταία έκδοση αυτών των σημειώσεων θα βρίσκεται πάντα στο δικτυακό τόπο του μαθήματος του Τμήματος Φυσικής Κλασική Μηχανική I, στο σύστημα ασύγχρονης τηλεκαίδευσης του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, <http://ecourse.uoi.gr/> ή στην προσωπική ιστοσελίδα του διδάσκοντα <http://theory.physics.uoi.gr/rizos/>.

Ιωάννινα 12-09-09

Ρίζος Ιωάννης

Σημειώσεις έκδοσης:

1γ Προσθήκη κεφαλαίου ταλαντώσεων

1δ Διορθώσεις τυπογραφικών λαθών

1ε,1ζ Προσθήκες, διορθώσεις στο Κεφ. 5

1θ-κ Διορθώσεις, προσθήκες, μεταβολές στην ύλη

Περιεχόμενα

1	ΕΙΣΑΓΩΓΗ	7
1.1	Οι νόμοι του Νεύτωνα	7
1.2	Δυνάμεις	8
2	ΣΤΑΤΙΚΗ	13
2.1	Εισαγωγή	13
2.2	Ισορροπία υλικού σημείο	14
2.2.1	Πρόβλημα 1: Βάρος κρεμασμένο από δύο σχοινιά	14
2.2.2	Πρόβλημα 2: Ισορροπία σε κεκλιμένο επίπεδο	15
2.3	Ισορροπία στερεού σώματος	16
2.3.1	Πρόβλημα 1: Βουτιά στην πισίνα	17
2.3.2	Πρόβλημα 2: Ισορροπία σκάλας	18
2.3.3	Πρόβλημα 3: Δοκάρι σε ισορροπία	19
3	Ο ΔΕΥΤΕΡΟΣ ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ ΝΕΥΤΩΝΑ	21
3.1	Εισαγωγή	21
3.2	Υπολογισμός δυνάμεων και επιταχύνσεων	21
3.2.1	Πρόβλημα 1: Η κίνηση του τραίνου	22
3.2.2	Πρόβλημα 2: Η μηχανή του Atwood	22
3.2.3	Πρόβλημα 3: Κίνηση σε κεκλιμένο επίπεδο	25
3.2.4	Πρόβλημα 4: Η διπλή μηχανή του Atwood	26
3.3	Προσδιορισμός τροχιάς σωμάτων	28
3.3.1	Πρόβλημα 1: Ελεύθερη πτώση σώματος	31
3.3.2	Πρόβλημα 2: Κίνηση στη μία διάσταση	32
3.3.3	Πρόβλημα 3: Πλάγια Βολή	32
3.3.4	Πρόβλημα 4: Μήκος τροχιάς βλήματος*	35
3.3.5	Πρόβλημα 5: Πτώση Αλεξιπτωτιστή	37
3.3.6	Πρόβλημα 6: Παράξενη δύναμη	40
3.3.7	Πρόβλημα 7: Η αλυσίδα που πέφτει	41
3.3.8	Πρόβλημα 8: Κατακόρυφη βολή με αντίσταση αέρα . . .	43
3.4	Ο δεύτερος νόμος σε πολικές συντεταγμένες	44
3.4.1	Πρόβλημα 1: Κυκλική κίνηση	46
3.4.2	Πρόβλημα 2: Κίνηση πάνω σε σφαίρα	47

3.4.3	Πρόβλημα 3: Κίνηση σε κυκλική στεφάνη με αντίσταση αέρα	49
4	ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ	51
4.1	Εισαγωγή	51
4.2	Απλός Αρμονικός Ταλαντωτής	51
4.3	Το απλό εκκρεμές	52
4.4	Συζευγμένες ταλαντώσεις	57
4.4.1	Πρόβλημα 1: Δύο μάζες τρία ελατήρια	57
4.4.2	Πρόβλημα 2: Τριατομικό μόριο	61
4.4.3	Πρόβλημα 3: Ελατήρια σε κύκλο	62
5	ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ ΚΑΙ ΟΡΜΗΣ	65
5.1	Εισαγωγή	65
5.2	Διατήρηση ενέργειας στην μία διάσταση	65
5.2.1	Πρόβλημα 1: Η ενέργεια απλού αρμονικού ταλαντωτή	67
5.2.2	Πρόβλημα 2: Δυναμικό βαρύτητας κοντά στην επιφάνεια της γης	68
5.2.3	Πρόβλημα 3: Ταχύτητα πρόσκρουσης	69
5.2.4	Πρόβλημα 4: Ταχύτητα διαφυγής	69
5.3	Μικρές Ταλαντώσεις	70
5.3.1	Πρόβλημα 1: Διατομικό μόριο	71
5.4	Διατήρηση ενέργειας στις τρεις διαστάσεις	72
5.4.1	Πρόβλημα 1: Διατηρητική δύναμη ;	72
5.4.2	Πρόβλημα 2: Κεντρική Δύναμη	73
5.4.3	Πρόβλημα 3: Μέγιστο ύψος βολής	73
5.5	Διατήρηση ορμής	74
5.6	Το σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας	75
5.7	Κρούσεις	76
5.7.1	Πρόβλημα 1: Κρούση με ακίνητη σφαίρα	76
5.7.2	Πρόβλημα 2: Ένα πείραμα επίδειξης	78
5.7.3	Πρόβλημα 3: Μπιλιάρδο	80
5.8	Συστήματα μεταβλητής μάζας	82
5.8.1	Εισαγωγή	82
5.8.2	Πρόβλημα 1: Η κίνηση του πυραύλου	83
6	ΚΕΝΤΡΙΚΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ	85
6.1	Εισαγωγή	85
6.2	Εξισώσεις κίνησης	86
6.2.1	Πρόβλημα 1: Εύρεση τροχιών σε δυναμικό $1/r^2$	88
6.2.2	Πρόβλημα 2: Υπολογισμός δύναμης από τροχιά	90
6.3	Η εξίσωση τροχιάς	92
6.4	Τροχιές σε βαρυτικό δυναμικό	92
6.5	Μελέτη εξίσωσης τροχιάς	94

6.6	Οι νόμοι του Kepler	96
A' ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ		101
A'.1	Τριγωνομετρικές συναρτήσεις	101
A'.1.1	Τριγωνομετρικές ταυτότητες	101
A'.1.2	Αναγωγή τριγωνομετρικών συναρτήσεων αθροισμάτων και διαφορών τόξων	101
A'.2	Υπερβολικές συναρτήσεις	102
A'.3	Παράγωγοι	104
A'.4	Ολοκληρώματα	104
A'.5	Ανάπτυγμα σε σειρά Taylor	105
A'.6	Η συνάρτηση του Lambert	105
A'.7	Διαφορικοί τελεστές	106

Κεφάλαιο 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σκοπός της Κλασικής Μηχανικής είναι να περιγράψει τη χρονική εξέλιξη ενός φυσικού συστήματος αποτελούμενου από μακροσκοπικά σώματα. Τέτοια σώματα είναι ένα μήλο που πέφτει από το δέντρο, η οβίδα ενός κανονιού, ένα διαστημόπλοιο, οι πλανήτες που περιστρέφονται γύρω από τον Ήλιο. Για να το πετύχει αυτό βασίζεται σε κάποιες αρχές (νόμους) οι οποίες καθορίζουν μέσω μαθηματικών εξισώσεων τον τρόπο που κινούνται τα αντικείμενα τα οποία απαρτίζουν το σύστημα. Στα πλαίσια αυτού του μαθήματος θα μελετήσουμε την Κλασική Μηχανική βασιζόμενοι στους Νόμους του Νεύτωνα. Θα ακολουθήσουμε αξιωματική θεμελίωση, ξεκινώντας από τους τρεις νόμους θα αποδείξουμε για παράδειγμα, κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις, τους νόμους διατήρησης, όπως η διατήρηση της ενέργειας και της ορμής. Θα διατυπώσουμε, επίσης, τους νόμους του Νεύτωνα, σε πολικές συντεταγμένες που μας επιτρέπουν να μελετήσουμε εύκολα τη κυκλική κίνηση αλλά και το κεντρικό δυναμικό. Θα αναφερθούμε επίσης συνοπτικά στις ταλαντώσεις, τις οποίες έχετε ήδη διδαχθεί, και θα εξετάσουμε το θέμα των συζευγμένων ταλαντώσεων.

Συχνά χρησιμοποιούμε για απλότητα την έννοια του υλικού σημείου, το οποίο ορίζεται ως ένα σώμα με πεπερασμένη μάζα αλλά χωρίς μέγεθος (σημειακό)¹.

1.1 Οι νόμοι του Νεύτωνα

Διατυπώθηκαν από τον Νεύτωνα (Isaac Newton) το 1687 στο σύγγραμμα Principia Mathematica.

Πρώτος νόμος: Ένα σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα (η οποία μπορεί να είναι μηδενική) εκτός και αν ενεργήσει πάνω του κάποια δύναμη.

¹Φυσικά αυτό αποτελεί μια χρήσιμη προσέγγιση, αλλά δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι στο όριο των πολύ μικρών σωμάτων, όπως τα στοιχειώδη σωματίδια, πχ το ηλεκτρόνιο, παύει να ισχύει η Κλασική Μηχανική!

Δεύτερος νόμος: Η χρονική μεταβολή της ορμής ενός σώματος ισούται με την δύναμη που ενεργεί στο σώμα.

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} (m \vec{v}) = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (1.1)$$

Τρίτος νόμος: Όταν ένα σώμα A ασκεί σε ένα άλλο σώμα B μια δύναμη \vec{F} τότε και το B ασκεί μια δύναμη $-\vec{F}$ στο A. (δράση-αντίδραση)

Ο πρώτος νόμος ορίζει την απουσία δύναμης. Χρησιμεύει για τον ορισμό ενός αδρανειακού συστήματος αναφοράς το οποίο είναι εκείνο στο οποίο ο πρώτος νόμος ισχύει. Αν έχουμε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, τότε, οποιοδήποτε άλλο κινείται με σταθερή ταχύτητα ως προς αυτό, είναι επίσης αδρανειακό.

Ο δεύτερος νόμος συνδέει τη μεταβολή της ορμής ενός σώματος με το αίτιο που την προκαλεί τη δύναμη. Ισχύει μόνο σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς (το οποίο ορίζεται από τον πρώτο νόμο). Μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για τον πειραματικό προσδιορισμό της μάζας ενός σώματος όταν αυτή συγκριθεί με μια πρότυπη μάζα. Στην περίπτωση ενός διατηρητικού (ή όπως λέμε πιο συχνά συντηρητικού) συστήματος ο δεύτερος νόμος οδηγεί στη διατήρηση της ενέργειας.

Ο τρίτος νόμος είναι γνωστός και ως αρχή της δράσης-αντίδρασης και στην περίπτωση ενός απομονωμένου συστήματος οδηγεί στην διατήρηση της ορμής.

1.2 Δυνάμεις

Οι δυνάμεις σύμφωνα με το δεύτερο νόμο είναι τα αίτια της μεταβολής της κινητικής κατάστασης ενός σώματος. Για την επίλυση ενός προβλήματος στα πλαίσια της Νευτώνειας θεμελίωσης της Κλασικής Μηχανικής θα πρέπει να μπορούμε να αναγνωρίσουμε τις δυνάμεις που ενεργούν στα σώματα τα οποία συμμετέχουν στο πρόβλημα. Για το σκοπό αυτό παραθέτουμε έναν κατάλογο με τις δυνάμεις και τον τρόπο που εμφανίζονται συνήθως στα προβλήματα της Μηχανικής.

Βαρυτικές Δυνάμεις: Σύμφωνα με τον νόμο της Παγκόσμιας Έλξης, επίσης διατυπωμένο από το Νεύτωνα, δύο μάζες m_1 και m_2 οι οποίες βρίσκονται σε απόσταση r έλκονται με δύναμη μέτρου

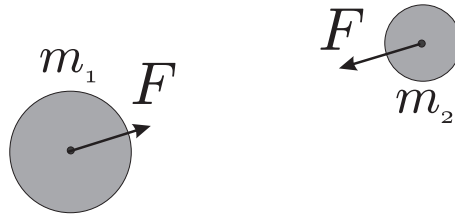
$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

όπου $G = 6.67428 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ μια σταθερά, γνωστή ως σταθερά του Νεύτωνα. Η διεύθυνση της βαρυτικής δύναμης είναι η ευθεία που ενώνει τα κέντρα μάζας ενώ η φορά είναι όπως εμφανίζεται στο Σχήμα. Η βαρυτική δύναμη είναι πάντα ελκτική. Για ένα σώμα μάζας m το οποίο βρίσκεται κοντά

στην επιφάνεια της γης (η οποία έχει γνωστή μάζα M και ακτίνα R) ο νόμος παίρνει την μορφή

$$F = m \left(\frac{GM}{R^2} \right) = m g$$

όπου $g = \frac{GM}{R^2}$ γνωστή ως επιτάχυνση της βαρύτητας ($g = 9.81 \text{ms}^{-2}$)



Σχήμα 1.1: Η βαρυτική δύναμη η οποία αναπτύσσεται δύο σώματα μάζας m_1 και m_2 .

Ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις : Ανάμεσα από δύο σωματίδια με φορτία q_1 και q_2 αντίστοιχα αναπτύσσεται η δύναμη Coulomb η οποία έχει μέτρο

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (1.2)$$

διεύθυνση την ευθεία που περνάει από τα δύο σωματίδια και είναι απωστική ή ελκτική ανάλογα αν τα φορτία είναι ομόσημα ή ετερόσημα.

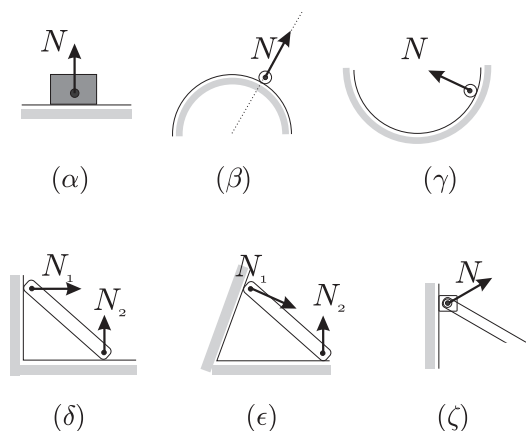
Στην γενική περίπτωση κατά την οποία ένα σωματίδιο με φορτίο q βρίσκεται σε μια περιοχή όπου υπάρχει ηλεκτρικό (\vec{E}) ή/και μαγνητικό πεδίο (\vec{B}) εξασκείται επάνω του η δύναμη Lorentz

$$\vec{F} = q \vec{E} + q\vec{v} \times B$$

όπου \vec{v} η ταχύτητα του σωματιδίου (εδώ στο σύστημα MKS).

Δύναμη αντίδρασης επιφάνειας : Όταν ένα σώμα ασκεί μια δύναμη σε μια επιφάνεια, η επιφάνεια ασκεί επίσης στο σώμα, μια αντίθετη δύναμη η οποία συγκρατεί το σώμα πάνω στην επιφάνεια. Η δύναμη αντίδρασης είναι κάθετη στην επιφάνεια που την ασκεί (εφόσον το σώμα εφάπτεται ελεύθερα δεν υπάρχει σύνδεσμος του σώματος με την επιφάνεια).

Δυνάμεις τριβής : Η τριβή εμφανίζεται κατά την ολίσθηση ενός αντικειμένου πάνω σε ένα άλλο λόγω των ατελειών που εμφανίζουν οι επιφάνειες των αντικειμένων. Η τριβή εμφανίζεται πάντα ως δύναμη με διεύθυνση παράλληλη προς την επιφάνεια επαφής και με φορά που να εμποδίζει την ολίσθηση στην επιφάνεια. Υπάρχουν δύο είδη τριβής : η στατική τριβή και η κινητική τριβή. Η κινητική τριβή, εμφανίζεται όταν τα δύο αντικείμενα κινούνται σχετικά και είναι ανάλογη με την κάθετη δύναμη ανάμεσα στις δύο εφραπτόμενες επιφάνειες

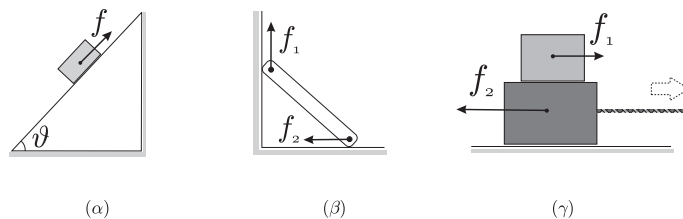


Σχήμα 1.2: Δύναμη/εις της αντίδρασης επιφάνειας σε μερικές χαρακτηριστικές περιπτώσεις: (α) Σώμα που βρίσκεται πάνω σε τραπέζι (β) σώμα που κινείται πάνω σε κυκλικό στεφάνι (γ) σώμα που κινείται στο εσωτερικό κυκλικού στεφανιού (δ) δοκάρι ακουμπισμένο σε τοίχο (ε) δοκάρι σε πλάγιο τοίχο (ζ) δοκάρι στερεωμένο σε τοίχο. Στην τελευταία περίπτωση η αντίδραση δεν είναι κάθετη στην επιφάνεια επειδή υπάρχει δεσμός μεταξύ της επιφάνειας και του σώματος.

$T_k = \mu_k F_N$ όπου ο συντελεστής αναλογίας μ_k ονομάζεται συντελεστής κινητικής τριβής. Η στατική τριβή εμφανίζεται όταν τα δύο σώματα είναι ακίνητα και δίνεται από τη σχέση

$$T_s \leq \mu_s F_N$$

Ο συντελεστής αναλογίας μ_s ονομάζεται συντελεστής στατικής τριβής και η ισότητα ισχύει όταν οι επαπτόμενες επιφάνειες μόλις αρχίζουν να κινούνται. Τα μ_k και μ_s εξαρτώνται από τις λεπτομέρειες των επιφανειών που έρχονται σε επαφή, είναι βέβαια πάντα θετικοί αριθμοί και συνήθως μικρότεροι της μονάδας. Για την επαφή δύο συγκεκριμένων επιφανειών ισχύει πάντα $\mu_s > \mu_k$.



Σχήμα 1.3: Δύναμη/εις της τριβής σε μερικές χαρακτηριστικές περιπτώσεις: (α) Σώμα που ισορροπεί σε κεκλιμένο επίπεδο (β) δοκάρι ακουμπισμένο σε τοίχο (γ) δύο σώματα (το ένα πάνω στο άλλο) που κινούνται προς τα δεξιά. Στην τελευταία περίπτωση είναι η τριβή που κινεί το επάνω σώμα.

Τάση σχοινιού : Ένα σχοινί με το οποίο συνδέονται δύο σώματα ασκεί σε

κάθε σώμα μια δύναμη που ονομάζεται τάση του σχοινιού. Συνήθως στα προβλήματα θεωρούμε ότι τα σχοινιά ή νήματα που συνδέουν τα σώματα είναι *μη εκτατά* (το μήκος τους δηλαδή δεν μεταβάλλεται). Η τάση είναι ίδια σε όλο το μήκος του σχοινιού, όσο δεν μεσολαβούν συνδέσεις ή επαφή με άλλα σώματα. Ειδικά οι τροχαλίες, τις οποίες θα συναντήσουμε συχνά στα προβλήματα, στην προσέγγιση που δεν έχουν μάζα, θεωρούμε ότι δεν μεταβάλλουν τη τάση του σχοινιού που περνάει από αυτές.

Τάση ελατηρίου : Κάθε ελατήριο έχει ένα φυσικό μήκος. Όσο το μήκος του ισούται με το φυσικό του μήκος το ελατήριο δεν ασκεί δυνάμεις στα σώματα τα οποία είναι συνδεδεμένα με αυτό, όταν το μήκος μεταβληθεί τότε το ελατήριο ασκεί δυνάμεις (και στα τα δύο άκρα του). Συνήθως στα προβλήματα θεωρούμε *ιδανικά ελατήρια*. Αν μεταβάλλουμε το μήκος ενός ιδανικού ελατηρίου, πέραν του φυσικού του μήκους, κατά x , το ιδανικό ελατήριο ασκεί δύναμη ίση με $F = -kx$ (έχει φορά αντίθετη με τη μεταβολή του μήκους).



Σχήμα 1.4: Δύναμη που ασκεί ένα ελατήριο όταν το μήκος του μεταβάλλεται (μειώνεται) κατά x .

Κεφάλαιο 2

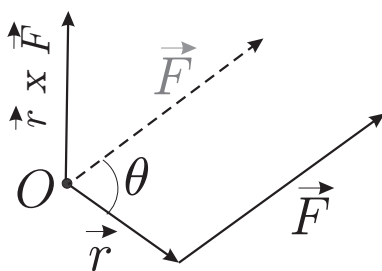
ΣΤΑΤΙΚΗ

2.1 Εισαγωγή

Σύμφωνα με τον πρώτο νόμο του Νεύτωνα, για την ισορροπία ενός υλικού σημείου αρκεί το άθροισμα των δυνάμεων που ενεργούν σε αυτό να ισούται με μηδέν. Για ένα στερεό σώμα, όπως γνωρίζεται ήδη, η κίνηση μπορεί να διαχωριστεί (τουλάχιστον στιγμιαία) σε μεταφορική κίνηση του κέντρου μάζας και σε περιστροφή γύρω από κάποιο άξονα το οποίο περνάει από αυτό. Ο μηδενισμός του αθροίσματος των δυνάμεων σε αυτήν την περίπτωση συνεπάγεται απλώς την ακινησία του κέντρου μάζας. Η απουσία περιστροφής εξασφαλίζεται από τον μηδενισμό του αθροίσματος των ροπών. Η ροπή ($\vec{\tau}$) μιας δύναμης \vec{F} ως προς ένα σημείο O δίνεται από

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \Rightarrow \tau = |\vec{\tau}| = r F \sin \theta$$

όπου τα \vec{r} και θ ορίζονται στο Σχήμα 2.1. Η θ είναι η μικρότερη γωνία ανάμεσα στα \vec{r} και \vec{F} . Η γενική συνθήκη ισορροπίας, για ένα στερεό σώμα είναι λοιπόν:



Σχήμα 2.1: Ροπή δύναμης \vec{F} ως προς σημείο O .

Ένα στερεό σώμα βρίσκεται σε ισορροπία όταν το άθροισμα των δυνάμεων και το άθροισμα των ροπών (ως προς ένα οποιοδήποτε σημείο) που ενεργούν πάνω του ισούται με μηδέν. Μπορούμε να δείξουμε ότι ο μηδενισμός των ροπών ως προς ένα σημείο (όχι απαραίτητα πάνω στο σώμα), σε συνδυασμό με τον

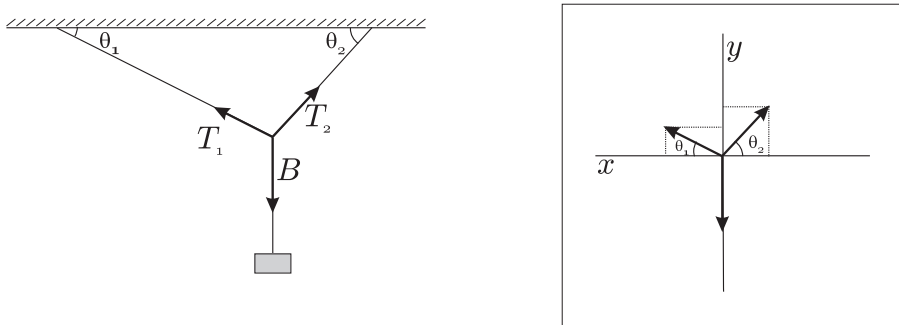
μηδενισμό του αθροίσματος, των δυνάμεων αρκεί για να αποδείξουμε ότι το άθροισμα των ροπών μηδενίζεται ως προς οποιοδήποτε σημείο.

2.2 Ισορροπία υλικού σημείο

Εξετάζουμε παρακάτω μερικά παραδείγματα στα οποία τα σώματα που συμμετέχουν μπορούν κατά προσέγγιση να θεωρηθούν ως υλικά σημεία. Σε αυτήν την περίπτωση για την ισορροπία του συστήματος αρκεί ο μηδενισμός του αθροίσματος των δυνάμεων που ενεργούν σε κάθε υλικό σημείο.

2.2.1 Πρόβλημα 1: Βάρος κρεμασμένο από δύο σχοινιά

Ένα βάρος (B) ισορροπεί κρεμασμένο από δύο σχοινιά τα οποία σχηματίζουν γωνίες θ_1 και θ_2 με την οροφή αντίστοιχα όπως στο Σχήμα 2.2. Να υπολογιστούν οι τάσεις των σχοινιών (T_1 και T_2) συναρτήσει των γωνιών θ_1, θ_2 .



Σχήμα 2.2: Βάρος (B) κρέμεται από δύο σχοινιά τα οποία σχηματίζουν γωνίες θ_1 και θ_2 με την οροφή αντίστοιχα. T_1 και T_2 είναι οι τάσεις των σχοινιών. Στα δεξιά η ανάλυση των δυνάμεων που ενεργούν στο σύστημα σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.

Για να ισορροπεί το σύστημα πρέπει το άθροισμα των δυνάμεων να είναι μηδέν. Αναλύοντας τις συνιστώσες σε καρτεσιανές συντεταγμένες παίρνουμε τις συνθήκες ισορροπίας

$$(x) : T_1 \cos \theta_1 - T_2 \cos \theta_2 = 0 \quad (2.1)$$

$$(y) : T_1 \sin \theta_1 + T_2 \sin \theta_2 = B \quad (2.2)$$

Επιλύοντας ως προς T_1, T_2

$$T_1 = \frac{B \cos \theta_2}{\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2} = \frac{B \cos \theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \quad (2.3)$$

$$T_2 = \frac{B \cos \theta_1}{\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2} = \frac{B \cos \theta_1}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \quad (2.4)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την σχέση (Α'.7) του Παραρτήματος Α για το συννημίτονο του αθροίσματος των γωνιών.

Ας εξετάσουμε μερικές οριακές περιπτώσεις:

(α'). $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ Από τις σχέσεις (2.3), (2.4) παίρνουμε $T_1 = 0, T_2 = B$.

(β'). $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ Από τις σχέσεις (2.3), (2.4) παίρνουμε $T_1 = T_2 = \frac{B}{2 \sin \theta}$.

(γ'). $\theta_1 = \theta_2 = \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ όπου $\varepsilon \ll 1$ Από τις σχέσεις (2.3), (2.4) και χρησιμοποιώντας την ανάπτυξη κατά Taylor (Α'.36) από το Παράρτημα παίρνουμε

$$T_1 = T_2 = \frac{B \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)}{\sin(\pi - 2\varepsilon)} \sim \frac{B \varepsilon}{2\varepsilon} = \frac{B}{2} \quad (2.5)$$

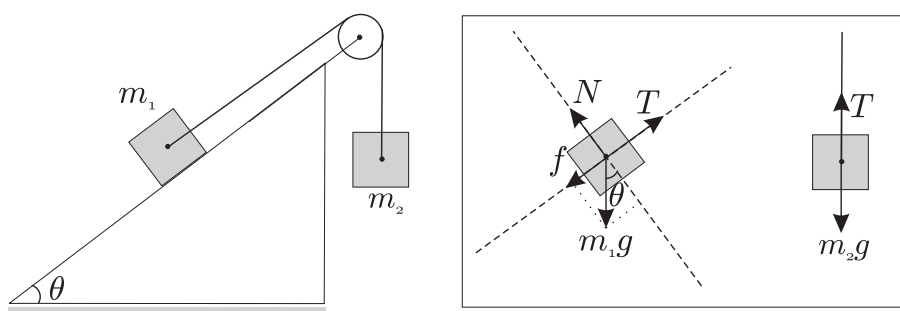
Άσκηση Σκεφτείτε σε ποιες φυσικές καταστάσεις αντιστοιχούν οι πιο πάνω οριακές περιπτώσεις και αν τα αποτελέσματα είναι φυσικά αποδεκτά. Σχεδιάστε το σχήμα με τις δυνάμεις για την κάθε περίπτωση.

Άσκηση Αν θέλουμε να έχουμε την μικρότερη δυνατή επιβάρυνση στα σχοινιά τι γωνίες πρέπει να διαλέξουμε ;

Άσκηση Επιλύστε την άσκηση χρησιμοποιώντας ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων όπου ο άξονας x έχει τη διεύθυνση της T_2 .

2.2.2 Πρόβλημα 2: Ισορροπία σε κεκλιμένο επίπεδο

Δύο σώματα μαζί m_1 και m_2 ισορροπούν σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης θ όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.3. Ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ του σώματος m_1 και του κεκλιμένου επιπέδου είναι μ . (α) Να σχεδιαστούν τα διαγράμματα ελεύθερου σώματος. (β) Να εξεταστούν οι συνθήκες ισορροπίας. (γ) Να εξεταστούν οι ειδικές περιπτώσεις (i) $\theta = \frac{\pi}{2}$, (ii) $\mu = 0$ και (c) $m_2 = 0$.



Σχήμα 2.3: Ισορροπία σωμάτων σε κεκλιμένο επίπεδο (αριστερά) και διαγράμματα ελεύθερου σώματος (δεξιά).

Στο σώμα m_1 ασκούνται οι εξής δυνάμεις: βάρος του ($m_1 g$), η τάση του σχοινοῦ (T), η αντίδραση του επιπέδου (N) και η τριβή (f). Στο σώμα m_2

ασκείται το βάρος του ($m_2 g$) και η τάση του σχοινιού (T).

(α) Τα διαγράμματα ελευθέρου σώματος φαίνονται στο Σχήμα 2.3. Η φορά της τριβής (f) μπορεί να είναι αυτή του σχήματος ή και αντίθετη.

(β) Η συνθήκη ισορροπίας του σώματος m_2 είναι

$$T = m_2 g \quad (2.6)$$

Αναλύοντας σε κάθετο σύστημα αξόνων (με τον άξονα x παράλληλο με το κεκλιμένο επίπεδο, όπως στο Σχήμα 2.3) οι συνθήκες ισορροπίας για το σώμα m_1 γράφονται

$$(x) : f + m_1 g \sin \theta = T \quad (2.7)$$

$$(y) : m_1 g \cos \theta = N \quad (2.8)$$

Χρησιμοποιώντας τις (2.6),(2.7) η δύναμη της τριβής γράφεται ως

$$f = g (m_2 - m_1 \sin \theta) \quad (2.9)$$

Από τη σχέση της τριβής με την κάθετη δύναμη έχουμε επίσης

$$|f| \leq \mu N \quad (2.10)$$

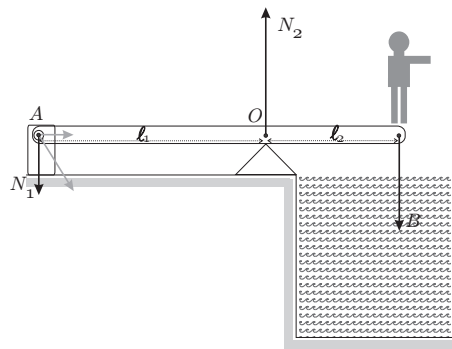
με $\mu \geq 0$. Αντικαθιστώντας τις (2.9),(2.9)

$$\begin{aligned} |g (m_2 - m_1 \sin \theta)| &\leq \mu m_1 g \cos \theta \Rightarrow \\ \left| \frac{m_2}{m_1} - \sin \theta \right| &\leq \mu \cos \theta \\ -\mu \cos \theta \leq \frac{m_2}{m_1} - \sin \theta &\leq \mu \cos \theta \\ \sin \theta - \mu \cos \theta \leq \frac{m_2}{m_1} &\leq \sin \theta + \mu \cos \theta \end{aligned} \quad (2.11)$$

Όπως προκύπτει από την (2.11), για $\theta = \frac{\pi}{2}$ το σύστημα ισορροπεί μόνο για $m_1 = m_2$ όπως είναι αναμενόμενο. Επίσης, όταν δεν υπάρχουν τριβές, $\mu = 0$ το σύστημα ισορροπεί όταν $m_1 = m_2 \sin \theta$. Στην περίπτωση $m_2 = 0$ η (2.11) δίνει $-\mu \cos \theta \leq \sin \theta \leq +\mu \cos \theta \Rightarrow -\mu \leq \tan \theta \leq +\mu$ και καθώς $\tan \theta \geq 0$ παίρνουμε $\tan \theta \leq \mu$.

2.3 Ισορροπία στερεού σώματος

Εξετάζουμε παρακάτω μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα ισορροπίας ενός στερεού σώματος. Η συνθήκη ισορροπίας σε αυτή την περίπτωση απαιτεί το μηδενισμό του αθροίσματος των δυνάμεων και των ροπών (ως προς ένα οποιοδήποτε σημείο).



Σχήμα 2.4: Ένας κολυμβητής βάρους B βρίσκεται στο ένα άκρο μιας σανίδας η οποία στηρίζεται στο άλλο άκρο και σε ενδιάμεσο σημείο που απέχει ℓ_1 και ℓ_2 από τα δύο άκρα αντίστοιχα.

2.3.1 Πρόβλημα 1: Βουτιά στην πισίνα

Ένας κολυμβητής βάρους B βρίσκεται στο ένα άκρο μιας σανίδας η οποία στηρίζεται στο άλλο άκρο καθώς και σε ένα ενδιάμεσο σημείο έτσι ώστε $\ell_1/\ell_2 = 2$ όπως στο Σχήμα 2.4. Να υπολογιστούν όλες οι δυνάμεις οι οποίες ασκούνται στον βατήρα συναρτήσει του B .

Εξετάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στον βατήρα. Αυτές είναι: το βάρος του κολυμβητή B (με διεύθυνση κάθετη στον βατήρα και φορά προς τα κάτω), η αντίδραση N_2 του ενδιάμεσου σημείου στήριξης O (με διεύθυνση επίσης κάθετη και φορά προς τα πάνω) και η δύναμη στήριξης στο σημείο A . Η τελευταία δεν έχει συγκεκριμένη διεύθυνση και θα μπορούσε να αναλυθεί σε μια κάθετη προς τον βατήρα συνιστώσα N_1 και σε μια παράλληλη. Καθώς δεν υπάρχει άλλη δύναμη με διεύθυνση παράλληλη προς τον βατήρα συμπεραίνουμε ότι η παράλληλη συνιστώσα μηδενίζεται και στα παρακάτω θεωρούμε μόνο την κάθετη συνιστώσα. Από το μηδενισμό του αθροίσματος των δυνάμεων έχουμε

$$N_2 = N_1 + B \quad (2.12)$$

και από το μηδενισμό του αθροίσματος των ροπών ως προς το ενδιάμεσο σημείο στήριξης

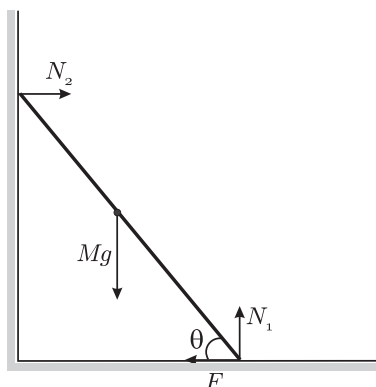
$$B \ell_2 = N_1 \ell_1 \quad (2.13)$$

Επιλύοντας τις (2.12), (2.13) παίρνουμε

$$N_1 = \frac{\ell_2 B}{\ell_1} = \frac{B}{2}, \quad N_2 = \frac{(\ell_2 + \ell_1) B}{\ell_1} = \frac{3B}{2} \quad (2.14)$$

2.3.2 Πρόβλημα 2: Ισορροπία σκάλας

Σκάλα μήκους L ισορροπεί ακουμπώντας σε έναν τοίχο χωρίς τριβή και στο έδαφος με το οποίο ο συντελεστής στατικής τριβής είναι μ , όπως στο Σχήμα 2.5. Ποια είναι η μικρότερη γωνία θ για την οποία η σκάλα παραμένει σε ισορροπία ;



Σχήμα 2.5: Ισορροπία σκάλας μάζας M η οποία σχηματίζει γωνία θ με το δάπεδο.

Οι δυνάμεις οι οποίες ενεργούν στην σκάλα είναι το βάρος Mg η αντίδραση του τοίχου N_2 , η αντίδραση του δαπέδου N_1 και η τριβή F όπως στο σχήμα. Αναλύοντας τις δυνάμεις σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων με τους άξονες x, y το δάπεδο και τον τοίχο αντίστοιχα, οι συνθήκες μηδενισμού του αθροίσματος των δυνάμεων γράφονται

$$(y) : N_1 = Mg \quad (2.15)$$

$$(x) : N_2 = F \quad (2.16)$$

Η συνθήκη μηδενισμού του αθροίσματος των ρομών ως προς άξονα περιστροφής το σημείο επαφής με το έδαφος είναι

$$N_2 L \sin \theta = Mg \frac{L}{2} \sin \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) \quad (2.17)$$

Επίσης, δύναμη τριβής δίνεται από

$$F \leq \mu N_1 \quad (2.18)$$

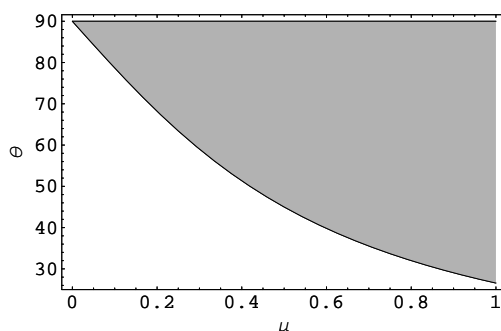
Αντικαθιστώντας τις (2.16), (2.18) στην (2.17) παίρνουμε την συνθήκη

$$2\mu Mg \sin \theta \geq Mg \cos \theta \implies \tan \theta \geq \frac{1}{2\mu} \quad (2.19)$$

και κατά συνέπεια η σκάλα ισορροπεί όσο

$$\theta \geq \arctan \frac{1}{2\mu} \quad (2.20)$$

Η περιοχή τιμών για τις οποίες αληθεύει η ανισότητα (2.20) απεικονίζεται γραφικά στο Σχήμα 2.6.



Σχήμα 2.6: Επιτρεπτές τιμές της γωνίας κλίσης θ σε μοίρες (σκιασμένη περιοχή) συναρτήσει του συντελεστή στατικής τριβής μ , για της οποίες η σκάλα ισορροπεί.

Άσκηση Όπως γνωρίζουμε εμπειρικά και επιβεβαιώνουμε από την (2.20) η ελάχιστη γωνία ισορροπίας μικραίνει όσο μεγαλώνει ο συντελεστής τριβής μ . Υπάρχει γωνία πέρα από την οποία η σκάλα είναι αδύνατον να ισορροπήσει ανεξάρτητα από την τιμή του συντελεστή τριβής ;

Άσκηση Να αποδειχθεί ότι αν ένα σώμα ισορροπεί υπό την επίδραση τριών (μη παραλλήλων) δυνάμεων τότε οι διευθύνσεις των δυνάμεων περνούν από το ίδιο σημείο.

2.3.3 Πρόβλημα 3: Δοκάρι σε ισορροπία

Δοκάρι μάζας M και μήκους L ισορροπεί με το ένα άκρο του στερεωμένο σε τοίχο και το άλλο άκρο δεμένο με σχοινί υπό γωνία θ όπως στο Σχήμα 2.7. Να υπολογιστούν όλες οι δυνάμεις που ενεργούν στο δοκάρι συναρτήσει του βάρους του σώματος και της γωνίας θ . Για ποια γωνία θ η τάση του σχοινοῦ ισούται με το βάρος του δοκαριού ;

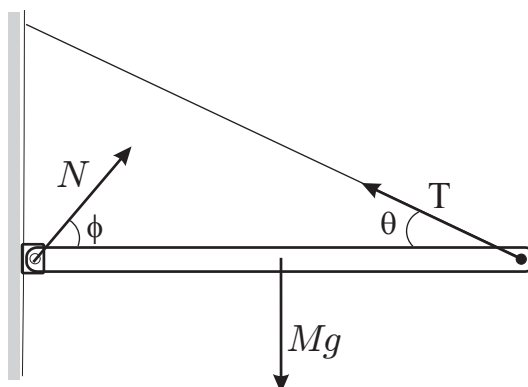
Οι δυνάμεις που ασκούνται στο δοκάρι είναι το βάρος του $B = Mg$ η τάση του σχοινοῦ T και η δύναμη στήριξης N . Η φορά της δύναμης N δεν είναι γνωστή για αυτό θεωρούμε ότι σχηματίζει γωνία ϕ με το δοκάρι η οποία θα προσδιοριστεί από τις συνθήκες ισορροπίας. Η συνθήκη ισορροπίας των δυνάμεων γράφεται

$$(x) : N \cos \phi = T \cos \theta \quad (2.21)$$

$$(y) : N \sin \phi + T \sin \theta = Mg \quad (2.22)$$

Για τις ροπές και θεωρώντας ως άξονα περιστροφής το σημείο στήριξης στον τοίχο έχουμε

$$Mg \frac{L}{2} = T L \sin(\pi - \theta) \Rightarrow T = \frac{Mg}{2 \sin \theta} \quad (2.23)$$



Σχήμα 2.7: Δοκάρι μάζας M ισορροπεί με το ένα άκρο του στερεωμένο σε τοίχο και το άλλο άκρο δεμένο με σχοινί υπό γωνία θ .

Αντικαθιστώντας την τελευταία σχέση την (2.22) παίρνουμε

$$N = \frac{Mg}{2 \sin \phi} \quad (2.24)$$

και ύστερα αντικαθιστώντας στην (2.21) τις (2.23), (2.24)

$$\frac{\cos \phi}{2 \sin \phi} = \frac{\cos \theta}{2 \sin \theta} \Rightarrow \tan \phi = \tan \theta \Rightarrow \phi = \theta \quad (2.25)$$

Συνοψίζοντας τα μέτρα των δυνάμεων που ασκούνται στο δοκάρι είναι

$$T = N = \frac{Mg}{2 \sin \theta} \quad (2.26)$$

Η τάση του σχοινιού γίνεται ίση με το βάρος του δοκαριού για $\sin \theta = \frac{1}{2}$ δηλαδή $\theta = 30^\circ$.

Συνιστώμενες ασκήσεις από διδακτικό βιβλίο [5]
2.73, 2.82, 2.84, και 3.57, 3.58, 3.59.

Κεφάλαιο 3

Ο ΔΕΥΤΕΡΟΣ ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ ΝΕΥΤΩΝΑ

3.1 Εισαγωγή

Θα εξετάσουμε σε αυτό το κεφάλαιο προβλήματα τα οποία επιλύονται με τη βοήθεια του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} (m \vec{v}) = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (3.1)$$

Όταν η μάζα είναι σταθερή ο δεύτερος νόμος παίρνει την μορφή

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m \vec{a} \quad (3.2)$$

Θα ξεκινήσουμε από προβλήματα στα οποία η επιτάχυνση είναι σταθερή και θα προχωρήσουμε σε πιο πολύπλοκα προβλήματα στα οποία η επιτάχυνση μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου.

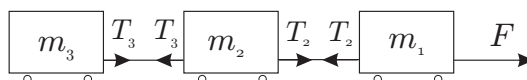
3.2 Υπολογισμός δυνάμεων και επιταχύνσεων

Η μέθοδος επίλυσης προβλημάτων που περιλαμβάνουν συστήματα αποτελούμενα από διάφορα σώματα στα οποία ενεργούν δυνάμεις μπορεί να χωριστεί τρία διαδοχικά στάδια

- ☞ Σχεδιασμός όλων των δυνάμεων που ενεργούν σε κάθε σώμα του συστήματος. Τα σχήματα που προκύπτουν ονομάζονται *διαγράμματα ελεύθερου σώματος*.
- ☞ Εφαρμογή του δεύτερου νόμου για κάθε σώμα χωριστά και παραγωγή μιας εξίσωσης τύπου $F = m a$
- ☞ Επίλυση του συστήματος των εξισώσεων που προκύπτει.

3.2.1 Πρόβλημα 1: Η κίνηση του τραίνου

Ένα τρένο αποτελείται από τρία βαγόνια μαζών m_1 , m_2 και m_3 αντίστοιχα και την μηχανή η οποία έλκει τα τρία βαγόνια με σταθερή δύναμη F όπως στο Σχήμα 3.1. Υποθέτοντας ότι δεν υπάρχουν τριβές να υπολογιστεί η επιτάχυνση του τραίνου καθώς και οι τάσεις στις συνδέσεις των βαγονιών. Η κοινή επιτάχυνση των βαγονιών δίνεται από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα



Σχήμα 3.1: Τρία βαγόνια τραίνου μάζας m_1, m_2, m_3 αντίστοιχα έλκονται από την μηχανή με δύναμη F .

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2 + m_3} \quad (3.3)$$

Στο βαγόνι μάζας m_3 η μόνη δύναμη που ασκείται είναι η T_3 άρα

$$T_3 = m_3 a = \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3} F$$

Στο βαγόνι μάζας m_2 έχουμε δύο (αντίθετες) δυνάμεις T_3 και T_2 . Ο νόμος του Νεύτωνα δίνει

$$T_2 - T_3 = m_2 a \Rightarrow T_2 = T_3 + m_2 a = \frac{m_2 + m_3}{m_1 + m_2 + m_3} F$$

Για έλεγχο μπορούμε να υπολογίσουμε με βάση τα παραπάνω την επιτάχυνση του βαγονιού μάζας m_1

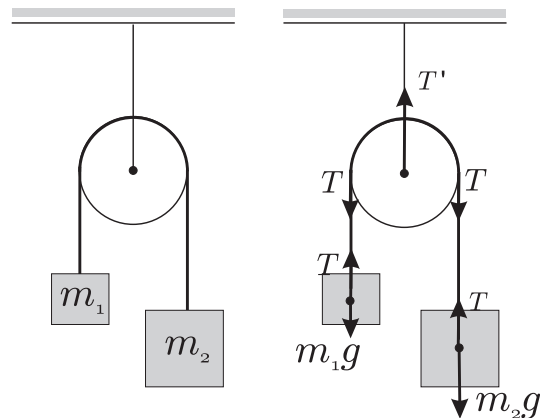
$$a_1 = \frac{F - T_2}{m_1} = \frac{1}{m_1} \left(1 - \frac{m_2 + m_3}{m_1 + m_2 + m_3} \right) F = \frac{F}{m_1 + m_2 + m_3} = a$$

που είναι η σωστή κοινή επιτάχυνση όπως προκύπτει από την (3.3). Ένας άλλος τρόπος να επιλύσουμε το πρόβλημα, ο οποίος θα μπορούσε να επεκταθεί εύκολα σε τρένο με περισσότερα βαγόνια, θα ήταν να θεωρήσουμε ότι η τάση T_3 κινεί το βαγόνι m_3 , και η τάση T_2 κινεί τα βαγόνια m_3 και m_2 .

3.2.2 Πρόβλημα 2: Η μηχανή του Atwood

Δύο σώματα μαζών m_1 και m_2 αντίστοιχα συνδέονται με σχοινί που περνάει από τροχαλία αμελητέας μάζας η οποία κρέμεται από την οροφή όπως στο Σχήμα 3.2. Το σύστημα αφήνεται να κινηθεί. Να υπολογιστεί η επιτάχυνση του κάθε σώματος καθώς και η τάση των σχοινιών. Οι τριβές θεωρούνται αμελητέες.

Η επίλυση αυτού του προβλήματος αρχίζει με την παρατήρηση ότι η τάση του



Σχήμα 3.2: Η μηχανή του Atwood και η ανάλυση των δυνάμεων που ενεργούν σε κάθε σώμα (διαγράμματα ελευθέρου σώματος).

σχοινοῦ (T) που συνδέει τα δύο σώματα πρέπει να είναι ίδια σε κάθε σημείο του σχοινοῦ. Στο σώμα m_1 ενεργεί το βάρος του ($m_1 g$) και η τάση του σχοινοῦ και αντίστοιχα στο σώμα m_2 . Εφαρμόζοντας τον δεύτερο νόμο στο πρώτο σώμα (m_1) έχουμε

$$T - m_1 g = m_1 a_1 \quad (3.4)$$

όπου a_1 η επιτάχυνση του και αντίστοιχα για το δεύτερο σώμα

$$T - m_2 g = m_2 a_2 \quad (3.5)$$

Καθώς τα δύο σώματα συνδέονται με το σχοινί οποιαδήποτε μετατόπιση του σώματος m_1 συνεπάγεται ίση και αντίθετη σε φορά μετατόπιση του σώματος m_2 , άρα

$$a_1 = -a_2 = a \quad (3.6)$$

Από τις εξισώσεις (3.4),(3.5),(3.6) προκύπτει το σύστημα

$$m_1 a - T = -m_1 g \quad (3.7)$$

$$-m_2 a - T = -m_2 g \quad (3.8)$$

Επιλύοντας ως προς a και T παίρνουμε

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g \quad (3.9)$$

και

$$T = \frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \quad (3.10)$$

Ας προσδιορίσουμε τώρα την τάση του σχοινιού που συγκρατεί την τροχαλία (T'). Εκτός από αυτήν στην τροχαλία ενεργεί η τάση του σχοινιού που συγκρατεί τα βάρη (T) και μάλιστα σε δύο σημεία όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.2. Το κέντρο μάζας της τροχαλίας δεν κινείται άρα

$$T' = 2T = \frac{4m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \quad (3.11)$$

Αν κρεμάσουμε την τροχαλία από ένα δυναμόμετρο τότε αυτό θα δείξει βάρος $T' = 2T$ δηλαδή το όλο σύστημα «ζυγίζει»

$$B_e = \frac{4m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \leq (m_1 + m_2) g \quad (3.12)$$

Είναι δηλαδή ελαφρύτερο από το συνολικό βάρος των δύο σωμάτων. Με άλλα λόγια μπορούμε να πούμε ότι το σύστημα έχει «ενεργή μάζα»

$$m_e = \frac{4m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (3.13)$$

Αυτό το αποτέλεσμα θα χρησιμεύσει σε επόμενο πρόβλημα.

Ας εξετάσουμε δύο οριακές περιπτώσεις

(α). $m_1 = m_2 = m$ Οι εξισώσεις (3.9), (3.10), (3.11) συνεπάγονται

$$a = 0, \quad T = m g, \quad T' = 2 m g$$

δηλαδή, όπως θα περίμενε κανείς, το σύστημα ισορροπεί και η τάση του σχοινιού που ενώνει τα δύο σώματα ισούται με το βάρος του ενός και η τάση του σχοινιού που συγκρατεί την τροχαλία ισούται με το άθροισμα των βαρών.

(β'). $m_1 \ll m_2$ Από τις εξισώσεις (3.9), (3.10), (3.11) προκύπτει

$$a = \frac{1 - \frac{m_1}{m_2}}{1 + \frac{m_1}{m_2}} g = g \left(1 - 2 \frac{m_1}{m_2} + \mathcal{O} \left(\frac{m_1}{m_2} \right)^2 \right) \quad (3.14)$$

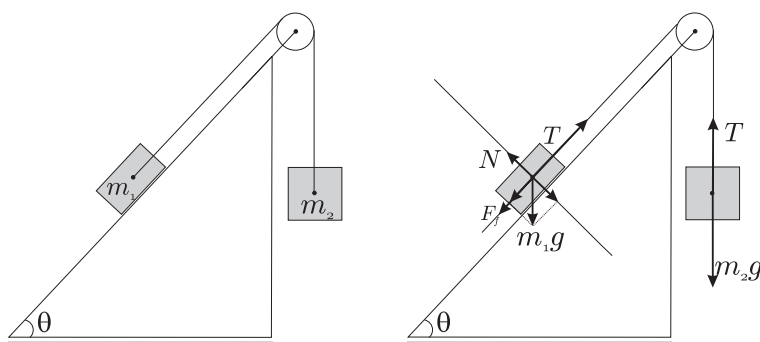
$$T = \frac{2m_1}{1 + \frac{m_1}{m_2}} g = 2m_1 g \left(1 - \frac{m_1}{m_2} + \mathcal{O} \left(\frac{m_1}{m_2} \right)^2 \right) \quad (3.15)$$

Δηλαδή, η επιτάχυνση του συστήματος σε πρώτη προσέγγιση είναι g , όπως είναι αναμενόμενο αφού η μάζα m_1 είναι αμελητέα και το m_2 πέφτει σχεδόν ελεύθερα. Αυτό που δεν είναι προφανές είναι ότι η τάση T ισούται με το διπλάσιο του βάρους του ελαφρύτερου σώματος και η τάση $T' = 2T$ ισούται με το τετραπλάσιο του βάρους του ελαφρύτερου σώματος.

3.2.3 Πρόβλημα 3: Κίνηση σε κεκλιμένο επίπεδο

Σώμα μάζας m_1 το οποίο βρίσκεται σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης θ και συντελεστή τριβής μ συνδέεται με σχοινί που περνάει από τροχαλία με σώμα μάζας m_2 όπως στο Σχήμα 3.3. Η μάζα της τροχαλίας θεωρείται αμελητέα. Να υπολογιστεί η επιτάχυνση των μαζών καθώς και η τάση του σχοινιού.

Όπως αναφέραμε και στο προηγούμενο παράδειγμα η τάση του σχοινιού είναι



Σχήμα 3.3: Σύστημα σωμάτων σε κεκλιμένο επίπεδο και η ανάλυση των δυνάμεων που ενεργούν σε κάθε σώμα (διαγράμματα ελεύθερου σώματος).

ίδια σε όλο το μήκος του σχοινιού. Οι δυνάμεις που ενεργούν στο πρώτο σώμα (m_1) είναι το βάρος $m_1 g$, η αντίδραση του επιπέδου N , η τριβή F_f και η τάση του σχοινιού T . Στο δεύτερο σώμα (m_2) έχουμε το βάρος $m_2 g$ και την τάση T . Οι δυνάμεις φαίνονται αναλυτικά στα διαγράμματα ελεύθερου σώματος του Σχήματος 3.3. Αναλύοντας τις δυνάμεις που ενεργούν στο σώμα m_1 σε κάθετη και παράλληλη συνιστώσα ως προς το επίπεδο (όπως στο Εδάφιο 2.2.2), ο δεύτερος νόμος συνεπάγεται

$$N - m_1 g \cos \theta = 0 \quad (3.16)$$

$$T - F_f - m_1 g \sin \theta = m_1 a \quad (3.17)$$

όπου έχουμε υποθέσει ότι το σώμα m_1 κινείται προς τα πάνω και το m_2 προς τα κάτω, δηλαδή $a > 0$. Αναλύοντας τις δυνάμεις στο σώμα m_2 παρατηρούμε ότι υπάρχει μόνο μια συνιστώσα (κατά μήκος του κάθετου στο έδαφος άξονα)

$$T - m_2 g = -m_2 a \quad (3.18)$$

Υπάρχει μια ακόμη εξίσωση η οποία προσδιορίζει την δύναμη της τριβής

$$F_f = \mu m_1 g \cos \theta \quad (3.19)$$

Αντικαθιστώντας την (3.19) στην (3.17) και επιλύοντας το σύστημα (3.17), (3.18) ως προς a και T παίρνουμε

$$a = \frac{g (m_2 - m_1 (\sin \theta + \mu \cos \theta))}{m_1 + m_2} \quad (3.20)$$

$$T = \frac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} (1 + \mu \cos \theta + \sin \theta) \quad (3.21)$$

Καθώς υποθέσαμε $a > 0$ η παραπάνω λύση ισχύει υπό τη προϋπόθεση

$$\frac{m_2}{m_1} > \sin \theta + \mu \cos \theta$$

Στην περίπτωση $a < 0$, δηλαδή η σχέση των μαζών είναι τέτοια ώστε η m_1 να κινείται προς τα κάτω οι εξισώσεις (3.17) και (3.19) παίρνουν τη μορφή

$$T + F_f - m_1 g \sin \theta = -m_1 a \quad (3.22)$$

$$T - m_2 g = m_2 a \quad (3.23)$$

και με ανάλογο τρόπο παίρνουμε

$$a = \frac{g (m_2 - m_1 (\sin \theta - \mu \cos \theta))}{m_1 + m_2} \quad (3.24)$$

$$T = \frac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} (1 - \mu \cos \theta + \sin \theta) \quad (3.25)$$

και η συνθήκη για να κινείται το σύστημα ($a < 0$) παίρνει τη μορφή

$$\frac{m_2}{m_1} < \sin \theta - \mu \cos \theta$$

3.2.4 Πρόβλημα 4: Η διπλή μηχανή του Atwood

Δίνεται η διπλή μηχανή του Atwood του Σχήματος 3.4 (κέντρο). Να υπολογιστούν οι επιταχύνσεις των τριών μαζών καθώς και οι τάσεις των σχοινιών.

Το διάγραμμα ελευθέρων σωμάτων παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.4 (αριστερά). Έστω a_1, a_2 και a_3 οι επιταχύνσεις των μαζών m_1, m_2 και m_3 (θεωρούμε θετική φορά προς τα πάνω). Εφαρμογή του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα για τις τρεις μάζες δίνει τρεις εξισώσεις

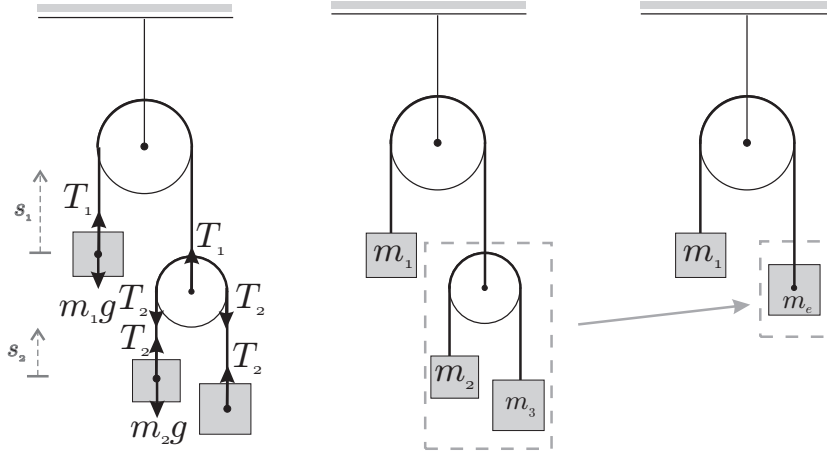
$$T_1 - m_1 g = m_1 a_1 \quad (3.26)$$

$$T_2 - m_2 g = m_2 a_2 \quad (3.27)$$

$$T_2 - m_3 g = m_3 a_3 \quad (3.28)$$

οι οποίες όμως περιέχουν πέντε αγνώστους. Υπάρχουν όμως, δύο πρόσθετες σχέσεις. Εξετάζοντας τις δυνάμεις στην κάτω τροχαλία έχουμε

$$T_1 = 2T_2 = 2T \quad (3.29)$$



Σχήμα 3.4: Η διπλή μηχανή του Atwood (κέντρο), το διάγραμμα ελευθέρων σωμάτων (δεξιά) και το ισοδύναμο φυσικό σύστημα (αριστερά) με μάζες m_1 και $m_e = 4 m_2 m_3 / (m_2 + m_3)$.

Επίσης, η κίνηση των σωμάτων δεν είναι ανεξάρτητη λόγω της σύνδεσής τους με τα σχοινιά. Αν θεωρήσουμε ότι, σε ένα χρονικό διάστημα Δt , το ένα σχοινί μετατοπίζεται κατά s_1 και το άλλο κατά s_2 , όπως στο Σχήμα. Τότε η μάζα m_1 μετατοπίζεται κατά $\Delta y_1 = s_1$, η μάζα m_2 κατά $\Delta y_2 = -s_1 + s_2$ και η μάζα m_3 κατά $\Delta y_3 = -s_1 - s_2$. Επομένως $2\Delta y_1 + \Delta y_2 + \Delta y_3 = 0$ και $2\frac{\Delta y_1}{\Delta t} + \frac{\Delta y_2}{\Delta t} + \frac{\Delta y_3}{\Delta t} = 0 \Rightarrow 2v_1 + v_2 + v_3 = 0$. Παραγωγίζοντας, βρίσκουμε για τις επιταχύνσεις

$$2a_1 + a_2 + a_3 = 0 \Rightarrow a_1 = -\frac{a_2 + a_3}{2} \quad (3.30)$$

Επιλύοντας το σύστημα (3.26)-(3.28),(3.29),(3.30) βρίσκουμε

$$a_1 = g \frac{4m_2 m_3 - m_1(m_2 + m_3)}{4m_2 m_3 + m_1(m_2 + m_3)} \quad (3.31)$$

$$a_2 = -g \frac{4m_2 m_3 + m_1(m_2 - 2m_3)}{4m_2 m_3 + m_1(m_2 + m_3)} \quad (3.32)$$

$$a_3 = g \frac{4m_2 m_3 + m_1(m_3 - 3m_2)}{4m_2 m_3 + m_1(m_2 + m_3)} \quad (3.33)$$

$$T = \frac{4g m_1 m_2 m_3}{4m_2 m_3 + m_1(m_2 + m_3)} \quad (3.34)$$

Σημειώνουμε εδώ ότι η επιτάχυνση (a_1) καθώς και η τάση T_1 μπορούν να υπολογιστούν και με μια άλλη μέθοδο η οποία βασίζεται στην αναγωγή. Όταν επιλύσαμε την στην απλή μηχανή του Atwood (βλ εξίσωσεις (3.11),(3.12)) δείξαμε ότι το σύστημα έχει «ενεργή μάζα» η οποία δίνεται από την εξίσωση (3.13). Εφαρμόζοντας το παραπάνω συμπέρασμα μπορούμε να αντικαταστήσουμε το υποσύστημα αποτελούμενο από τις μάζες m_2 και m_3 με μια ισοδύναμη

μάζα

$$m_e = \frac{4 m_2 m_3}{(m_2 + m_3)} \quad (3.35)$$

όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.4 και μετά να εφαρμόσουμε τα αποτελέσματα της απλής μηχανής (3.9),(3.10) για το πρόβλημα που προκύπτει. Έτσι παίρνουμε

$$a_1 = g \frac{m_e - m_1}{m_e + m_1} = g \frac{\frac{4 m_2 m_3}{(m_2 + m_3)} - m_1}{\frac{4 m_2 m_3}{(m_2 + m_3)} + m_1} \quad (3.36)$$

το οποίο είναι ακριβώς το αποτέλεσμα της εξίσωσης (3.31).

Παρόμοια για την τάση του σχοινιού (T_1) έχουμε

$$T_1 = g \frac{2 m_1 m_e}{m_1 + m_e} = g \frac{\frac{8 m_1 m_2 m_3}{(m_2 + m_3)}}{\frac{4 m_2 m_3}{(m_2 + m_3)} + m_1} \quad (3.37)$$

το οποίο είναι το αποτέλεσμα που προκύπτει από τις (3.29) και (3.34).

3.3 Προσδιορισμός τροχιάς σωμάτων

Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα για ένα σώμα μάζας σταθερής m στο οποίο ενεργεί δύναμη \vec{F} παίρνει την μορφή

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \quad (3.38)$$

που είναι διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης ως προς την θέση του σώματος $\vec{r}(t)$. Βέβαια δεν πρόκειται για μια εξίσωση αλλά για τρεις (σύστημα διαφορικών) καθώς η δύναμη $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ και η θέση $\vec{r} = (x, y, z)$ είναι διανυσματικές ποσότητες

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = F_x \quad (3.39)$$

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = F_y \quad (3.40)$$

$$m \frac{d^2 z(t)}{dt^2} = F_z \quad (3.41)$$

Για κίνηση στην μια διάσταση η εξίσωση (3.38) απλοποιείται

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = F \quad \text{ή} \quad m \ddot{x} = F \quad (3.42)$$

όπου η δύναμη μπορεί εν γένει να εξαρτάται από τον χρόνο, την θέση και την ταχύτητα $F = F(t, x, \dot{x})$. (και σε ειδικές περιπτώσεις που δεν θα αντιμετωπίσουμε εδώ και από ανώτερες παραγώγους της θέσης). Η γενική λύση της

(3.42) περιέχει δύο αυθαίρετες σταθερές και έχει συνεπώς άπειρες λύσεις. Για να προσδιορίσουμε μονοσήμαντα τη συνάρτηση $x(t)$, χρειάζεται να δώσουμε την τιμή της θέσης και της παραγώγου της θέσης (ταχύτητας) για μια δεδομένη χρονική στιγμή t_0

$$x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = v_0 \quad (3.43)$$

Αυτές ονομάζονται αρχικές συνθήκες. Η διαφορική εξίσωση που προκύπτει δεν λύνεται αναλυτικά στην γενική περίπτωση μπορεί όμως πάντα να λυθεί αριθμητικά με την βοήθεια ενός υπολογιστή. Σε αρκετές ενδιαφέρουσες περιπτώσεις υπάρχει αναλυτική λύση και με αυτές θα ασχοληθούμε στα επόμενα παραδείγματα.

Οι μέθοδοι αναλυτικής επίλυσης μπορεί να να κατηγοριοποιηθούν, ανάλογα με την μορφή της δύναμης, ως εξής:

(α). Η δύναμη εξαρτάται μόνο από το χρόνο.

Γράφουμε τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα ως

$$m \frac{dv}{dt} = F(t)$$

και ολοκληρώνοντας τα δύο μέλη προσδιορίζουμε την $v(t)$

$$m \int_{v_0}^{v(t)} dv' = \int_{t_0}^t dt' F(t') \Rightarrow v(t) = \frac{1}{m} \int_{t_0}^t dt' F(t') + v_0 \quad (3.44)$$

Ύστερα ολοκληρώνοντας την ταχύτητα

$$\frac{dx}{dt} = v(t) \Rightarrow \int_{x_0}^{x(t)} dx' = \int_{t_0}^t dt' v(t') \quad (3.45)$$

προσδιορίζουμε την θέση

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t dt' v(t')$$

και αντικαθιστώντας την (3.44)

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' F(t'') \quad (3.46)$$

Στην περίπτωση σταθερής δύναμης $F(t) = F$ η (3.46) δίνει

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{F}{m} \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' = \\ &= x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{F}{m} \int_{t_0}^t dt' (t' - t_0) = \\ &= x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{F}{m} \frac{(t - t_0)^2}{2} \end{aligned} \quad (3.47)$$

που είναι ο γνωστός τύπος για το διάστημα που διανύει ένα κινητό μάζας m όταν κινείται με σταθερή επιτάχυνση ($a = \frac{F}{m}$) (ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση).

- (β'). Η δύναμη εξαρτάται μόνο από την ταχύτητα
Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε και πάλι τη μορφή

$$m \frac{dv}{dt} = F(v)$$

του δεύτερου νόμου. Ολοκληρώνοντας παίρνουμε

$$m \int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv'}{F(v')} = \int_{t_0}^t dt' = t - t_0 \quad (3.48)$$

από την οποία μπορούμε να προσδιορίσουμε το $v(t)$ και ύστερα ολοκληρώνοντάς το να υπολογίσουμε την θέση συναρτήσει του χρόνου όπως στην (3.45)

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t dt' v(t')$$

- (γ'). Η δύναμη εξαρτάται μόνο από την θέση
Σε αυτή την περίπτωση, απαλείφουμε το χρόνο από το δεύτερο νόμο, χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx} \quad (3.49)$$

για να γράψουμε το δεύτερο νόμο ως

$$m v \frac{dv}{dx} = F(x) \Rightarrow m \int_{v_0}^{v(x)} dv' v' = \int_{x_0}^x dx' F(x')$$

η οποία δίνει

$$v(x)^2 = v_0^2 + \frac{2}{m} \int_{x_0}^x dx' F(x') \Rightarrow v(x) = \pm \sqrt{v_0^2 + \frac{2}{m} \int_{x_0}^x dx' F(x')}$$

και ύστερα από τον ορισμό της ταχύτητας

$$v(x) = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{v(x)} = dt \Rightarrow \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx'}{v(x')} = \int_{t_0}^t dt' = t - t_0 \quad (3.50)$$

μπορούμε να προσδιορίσουμε το $x(t)$.

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι στις περιπτώσεις (β) και (γ) όταν λέμε η «δύναμη εξαρτάται μόνο από την ταχύτητα» ή η «δύναμη εξαρτάται μόνο από τη θέση» εννοούμε ότι η δύναμη δεν εξαρτάται εκπεφρασμένα από το χρόνο και μπορούμε

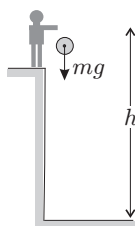
να εκφράσουμε τη δύναμη σε τέτοια μορφή ώστε όλη η χρονική εξάρτηση να υπεισέρχεται στις εκφράσεις μέσω της ταχύτητας ή της θέσης αντίστοιχα.

Επίσης σημειώνουμε ότι η παραπάνω μέθοδος επίλυσης του 2ου Νόμου, συνίσταται στην επίλυση της διαφορικής δευτέρας τάξης (3.42) μέσω δύο διαδοχικών ολοκληρώσεων. Σε ορισμένες περιπτώσεις (βλ πχ Πρόβλημα 6), είναι απλούστερη η άμεση επίλυση της αρχικής δευτεροβάθμιας διαφορικής εξίσωσης.

Παρακάτω εξετάζουμε μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα επίλυσης του 2ου νόμου του Νεύτωνα τα οποία εντάσσονται στην παραπάνω κατηγοριοποίηση.

3.3.1 Πρόβλημα 1: Ελεύθερη πτώση σώματος

|| Σώμα μάζας m πέφτει ελεύθερα από ύψος h να προσδιοριστεί το ύψος ||
 || που βρίσκεται το σώμα συναρτήσει του χρόνου. Σε πόσο χρόνο το σώμα ||
 || φτάνει στο έδαφος;



Σχήμα 3.5: Σώμα μάζας m πέφτει ελεύθερα από ύψος h .

Στο σώμα ασκείται μόνο το βάρος του με φορά αντίθετη με την θετική φορά του άξονα των y , δηλαδή $F = -mg$. Πρόκειται δηλαδή για σταθερή δύναμη και σύμφωνα με την (3.47)

$$y(t) = y_0 + v_0 t + \frac{F}{m} \frac{t^2}{2} \quad (3.51)$$

όπου θεωρήσαμε $t_0 = 0$. Αντικαθιστώντας την δύναμη καθώς και τις αρχικές συνθήκες $y_0 = h, v_0 = 0$ έχουμε

$$y(t) = h - g \frac{t^2}{2}$$

Το σώμα φτάνει στο έδαφος όταν

$$y(t) = 0 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

3.3.2 Πρόβλημα 2: Κίνηση στη μία διάσταση

Σώμα μάζας m κινείται κατά μήκος του άξονα των x υπό την επίδραση της δύναμης $F(t) = f_0 e^{-\gamma t}$ όπου f_0 και $\gamma > 0$ σταθερές. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα βρίσκεται στη θέση $x = 0$ και έχει μηδενική ταχύτητα. Να υπολογιστεί η ταχύτητα και η θέση του σώματος συναρτήσει του χρόνου.



Σχήμα 3.6: Σώμα μάζας m κινείται στη μία διάσταση υπό την επίδραση δύναμης $F(t)$.

Η δύναμη εξαρτάται μόνο από το χρόνο. Εφαρμόζοντας τα όσα αναφέραμε παραπάνω

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= f_0 e^{-\gamma t} m \frac{dv}{dt} = f_0 e^{-\gamma t} \Rightarrow \int_0^v dv' = \frac{f_0}{m} \int_0^t dt' e^{-\gamma t'} \Rightarrow \\ v' \Big|_0^v &= -\frac{f_0}{m\gamma} e^{-\gamma t'} \Big|_0^t \Rightarrow v = \frac{f_0}{m\gamma} (1 - e^{-\gamma t}) \end{aligned} \quad (3.52)$$

Συνεχίζοντας για τον προσδιορισμό της θέσης

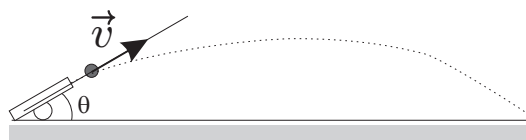
$$\begin{aligned} v = \frac{dx}{dt} &= \frac{f_0}{m\gamma} (1 - e^{-\gamma t}) \Rightarrow \int_0^x dx' = \frac{f_0}{m\gamma} \int_0^t dt' (1 - e^{-\gamma t'}) \\ \int_0^x dx' &= \frac{f_0}{m\gamma} \left[\int_0^t dt' - \int_0^t dt' e^{-\gamma t'} \right] \Rightarrow \\ x' \Big|_0^x &= \frac{f_0}{m\gamma} \left[t' \Big|_0^t + \frac{1}{\gamma} e^{-\gamma t'} \Big|_0^t \right] \Rightarrow x = \frac{f_0}{m\gamma} \left[t + \frac{1}{\gamma} (e^{-\gamma t} - 1) \right] \end{aligned} \quad (3.53)$$

3.3.3 Πρόβλημα 3: Πλάγια Βολή

Σώμα μάζας m εκτοξεύεται με ταχύτητα μέτρου v_0 και υπό γωνία θ με το οριζόντιο επίπεδο όπως στο Σχήμα 3.7. Να προσδιοριστεί η εξίσωση κίνησης του σώματος καθώς και η απόσταση από το σημείο εκτόξευσης στην οποία πέφτει στο έδαφος (βεληνεκές). Για δεδομένη αρχική ταχύτητα: (α) Ποιο το μέγιστο ύψος που φτάνει το σώμα ; (β) Ποιο το μέγιστο βεληνεκές ; (γ) Ποιο το μήκος της τροχιάς που διαγράφει και πότε αυτή γίνεται μέγιστη;

Το σώμα κινείται στις δύο διαστάσεις. Επιλέγουμε ως σύστημα συντεταγμένων κάθετους άξονες $x - y$ που τέμνονται στο σημείο εκτόξευσης. Η μόνη δύναμη που ενεργεί στο σώμα είναι το βάρος του κατά μήκος του άξονα των y και με φορά προς τα αρνητικά $\vec{F} = (0, -mg)$. Η θέση του σωματιδίου περιγράφεται από ένα διάνυσμα θέσης $\vec{r} = (x, y)$. Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \quad (3.54)$$



Σχήμα 3.7: Σώμα μάζας m εκτοξεύεται με ταχύτητα μέτρου v και υπό γωνία θ με το οριζόντιο επίπεδο.

γράφεται ως σύστημα δύο διαφορικών εξισώσεων

$$m \ddot{x} = 0 \quad (3.55)$$

$$m \ddot{y} = -m g \quad (3.56)$$

Οι αρχικές συνθήκες για την θέση είναι

$$x(0) = y(0) = 0$$

και για την ταχύτητα

$$\dot{x}(0) = v_0 \cos \theta, \quad \dot{y}(0) = v_0 \sin \theta$$

Η δύναμη είναι σταθερή άρα μπορούμε να ακολουθήσουμε την (3.47) για την ολοκλήρωση των εξισώσεων. Αναλυτικότερα οι δύο εξισώσεις (3.55), (3.56) είναι ανεξάρτητες. Η (3.55) συνεπάγεται

$$\ddot{x} = 0 \Rightarrow \int_{v_0 \cos \theta}^{\dot{x}} dx' = 0 \Rightarrow \dot{x}(t) = v_0 \cos \theta \quad (3.57)$$

Ολοκληρώνοντας άλλη μια φορά

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = v_0 \cos \theta &\Rightarrow \int_0^x dx' = v_0 \cos \theta \int_0^t dt' \Rightarrow \\ x(t) &= v_0 \cos \theta t \end{aligned} \quad (3.58)$$

Προχωρώντας παρόμοια για το y και ξεκινώντας από την (3.56) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \ddot{y} = -g &\Rightarrow \int_{v_0 \sin \theta}^{\dot{y}} dy' = -g \int_0^t dt' \Rightarrow \\ \dot{y}(t) &= v_0 \sin \theta - g t \end{aligned} \quad (3.59)$$

και

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} = v_0 \sin \theta - g t &\Rightarrow \int_0^y dy' = v_0 \sin \theta \int_0^t dt' - g \int_0^t t' dt' \Rightarrow \\ y(t) &= v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned} \quad (3.60)$$

τα οποία και προσδιορίζουν πλήρως την κίνηση του βλήματος συναρτήσει του χρόνου.

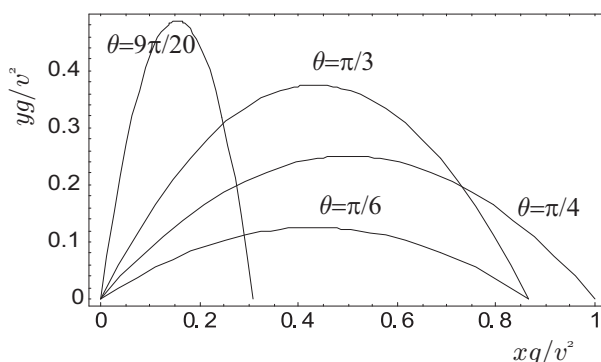
Μπορούμε να απαλείψουμε το χρόνο από τις (3.58),(3.60) και να προσδιορίσουμε την καμπύλη που περιγράφει την τροχιά στο επίπεδο $x - y$. Επιλύοντας την (3.58) και αντικαθιστώντας στην (3.60) παίρνουμε

$$y = x \tan \theta - \frac{x^2 g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} \quad (3.61)$$

Για την θεωρητική μελέτη του προβλήματος μπορούμε να απλοποιήσουμε την παραπάνω εξίσωση χρησιμοποιώντας διαστατική ανάλυση. Μπορούμε δηλαδή να θέσουμε $v_0 = g = 1$ και να μετρούμε την απόσταση σε μονάδες v_0^2/g . Η (3.61) γράφεται ως ¹

$$y = x \tan \theta - \frac{x^2}{2 \cos^2 \theta} \quad (3.62)$$

Μια γραφική απεικόνιση της τροχιάς για διάφορες τιμές της γωνίας βολής παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.8.



Σχήμα 3.8: Γραφική αναπαράσταση της κίνησης του βλήματος για γωνίες εκτόξευσης $\theta = 9\pi/20, \pi/3, \pi/6$ και $\theta = \pi/4$.

Χρόνος πτήσης

Ο χρόνος που διαρκεί η πτήση του βλήματος μπορεί να υπολογιστεί από την (3.60)

$$v \sin \theta t - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow t = \frac{2v_0 \sin \theta}{g} \quad (3.63)$$

Βεληνεκές

Την στιγμή που θα αγγίξει το βλήμα στο έδαφος έχουμε $y = 0$ και η (3.62) συνεπάγεται

$$x \tan \theta - \frac{x^2}{2 \cos^2 \theta} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \cos \theta \sin \theta = \sin(2\theta) \end{cases} \quad (3.64)$$

¹Ένας άλλος τρόπος να δούμε αυτό το αποτέλεσμα είναι να πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέρη της (3.61) με g/v^2 και ύστερα να εισάγουμε $y' = yg/v_0^2$ και $x' = xg/v_0^2$.

Η πρώτη λύση αντιστοιχεί στο σημείο βολής και η δεύτερη στη μέγιστη απόσταση x_{max} (βεληνεκές). Αποκαθιστώντας τις μονάδες

$$x_{max} = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\theta)$$

Παρατηρούμε ότι δύο συμπληρωματικές γωνίες (δύο γωνίες των οποίων το άθροισμα είναι $\pi/2$) έχουν ίδιο βεληνεκές (όχι όμως και ίδια τροχιά όπως φαίνεται από το Σχήμα 3.8.) Το μέγιστο βεληνεκές (για δεδομένη αρχική ταχύτητα) το πετυχαίνουμε όταν το $\sin(2\theta)$ είναι μέγιστο, δηλαδή ίσο με τη μονάδα και άρα για γωνία $\theta = \pi/4$ και ισούται με v^2/g .

Μέγιστο ύψος

Το ύψος γίνεται μέγιστο (για δεδομένη αρχική ταχύτητα) στο μέσο της τροχιάς δηλαδή όταν $x = \sin(2\theta)/2 = \sin\theta \cos\theta$. Αντικαθιστώντας στην (3.62) βρίσκουμε ²

$$y_{max} = \frac{\sin^2\theta}{2} \quad (3.65)$$

και αποκαθιστώντας τις μονάδες

$$y_{max} = \frac{v^2}{2g} \sin^2\theta \quad (3.66)$$

Το μέγιστο ύψος το πετυχαίνουμε λοιπόν για $\theta = \pi/2$ (κατακόρυφη βολή).

3.3.4 Πρόβλημα 4: Μήκος τροχιάς βλήματος*

|| Να υπολογιστεί το μήκος της τροχιάς που διανύει βλήμα μάζας m κατά ||
|| την πλάγια βολή υπό γωνία θ και αρχική ταχύτητα v_0 . ||

Το μήκος s της τροχιάς που διανύει το σώμα δίνεται από τον τύπο

$$s = \int_0^{x_{max}} dx' \sqrt{1 + \left(\frac{dy(x')}{dx'}\right)^2} = \int_0^{\sin(2\theta)} dx \sqrt{1 + \left(\tan\theta - \frac{x}{\cos^2\theta}\right)^2} \quad (3.67)$$

Το ολοκλήρωμα υπολογίζεται θέτοντας $\omega = \tan\theta - \frac{x}{\cos^2\theta}$ που συνεπάγεται $d\omega = -dx/\cos^2\theta$

$$\begin{aligned} s &= -\cos^2\theta \int_{\tan\theta}^{-\tan\theta} d\omega \sqrt{1 + \omega^2} = \cos^2\theta \int_{-\tan\theta}^{\tan\theta} d\omega \sqrt{1 + \omega^2} \\ &= 2\cos^2\theta \int_0^{\tan\theta} d\omega \sqrt{1 + \omega^2} \end{aligned} \quad (3.68)$$

²Το μέγιστο ύψος θα μπορούσε να υπολογιστεί κατευθείαν από την (3.60) ξεκινώντας από το γεγονός ότι σε αυτό η ταχύτητα στον άξονα τον y μηδενίζεται. Παραγωγίζοντας την (3.60) ως προς το χρόνο βρίσκουμε τη χρονική στιγμή στην οποία η ταχύτητα μηδενίζεται και ύστερα αντικαθιστώντας στην (3.60) βρίσκουμε το μέγιστο ύψος.

Υπολογίζουμε το άριστο ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned}
 I &= \int d\omega \sqrt{1+\omega^2} = \omega \sqrt{1+\omega^2} - \int d\omega \frac{\omega^2}{\sqrt{1+\omega^2}} \\
 &= \omega \sqrt{1+\omega^2} - \int d\omega \left(\frac{\omega^2+1-1}{\sqrt{1+\omega^2}} \right) \\
 &= \omega \sqrt{1+\omega^2} - \int d\omega \frac{1+\omega^2}{\sqrt{1+\omega^2}} + \int d\omega \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}} \\
 &= \omega \sqrt{1+\omega^2} - \int d\omega \sqrt{1+\omega^2} + \int d\omega \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}} \Rightarrow \\
 2I &= \omega \sqrt{1+\omega^2} + \int d\omega \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}} = \omega \sqrt{1+\omega^2} + \operatorname{arcsinh}\omega \quad (3.69)
 \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποίησαμε την (Α'.31). Αντικαθιστώντας (3.69) στην (3.68) παίρνουμε

$$\begin{aligned}
 s &= \cos^2 \theta \left[\omega \sqrt{1+\omega^2} + \operatorname{arcsinh}\omega \right]_0^{\tan \theta} \\
 &= \cos^2 \theta \tan \theta \sqrt{1+\tan^2 \theta} + \cos^2 \theta \operatorname{arcsinh}(\tan \theta) \quad (3.70)
 \end{aligned}$$

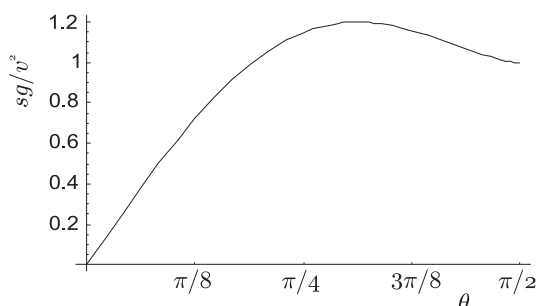
Θεωρώντας $0 \leq \theta \leq \pi/2$ έχουμε $\sqrt{1+\tan^2 \theta} = 1/\cos \theta$ το οποίο απλοποιεί την έκφραση σε

$$s = \sin \theta + \cos^2 \theta \operatorname{arcsinh}(\tan \theta) \quad (3.71)$$

και αποκαθιστώντας τις διαστάσεις

$$s = \frac{v^2}{g} (\sin \theta + \cos^2 \theta \operatorname{arcsinh}(\tan \theta)) \quad (3.72)$$

Η γραφική αναπαράσταση του μήκους της τροχιάς συναρτήσει της γωνίας πα-



Σχήμα 3.9: Γραφική αναπαράσταση του μήκους της τροχιάς συναρτήσει της γωνίας στην πλάγια βολή.

ρουσιάζεται στο Σχήμα 3.9. Παρατηρούμε ότι η τροχιά που διανύει το βλήμα

γίνεται μέγιστη για συγκεκριμένη γωνία βολής $\tilde{\theta}$ (περίπου ίση με ένα σε ακτίνια). Η γωνία αυτή μπορεί να προσδιοριστεί από το μηδενισμό της πρώτης παραγώγου

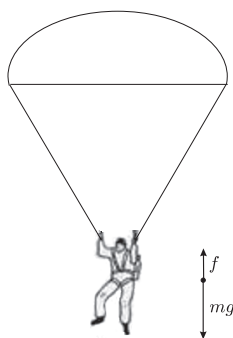
$$\begin{aligned} \frac{ds}{d\theta} &= \cos\theta - 2 \operatorname{arcsinh}(\tan\theta) \cos\theta \sin\theta + \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2\theta}} = 0 \Rightarrow \\ &-2 \cos\theta (-1 + \operatorname{arcsinh}(\tan\theta) \sin\theta) = 0 \Rightarrow \\ &\sin\theta \operatorname{arcsinh}(\tan\theta) = 1 \end{aligned} \quad (3.73)$$

Επιλύοντας αριθμητικά βρίσκουμε ότι αυτή η γωνία είναι $\tilde{\theta} \approx 56.47^\circ$. Το μήκος της μέγιστης τροχιάς (\tilde{s}), υπολογίζεται αντικαθιστώντας $\operatorname{arcsinh}(\tan\theta) = 1/\sin\theta$ από την (3.73) στην (3.72) και ισούται με

$$\tilde{s} = \frac{v^2}{g} \left(\sin\tilde{\theta} + \cos^2\tilde{\theta}/\sin\tilde{\theta} \right) = \frac{v^2}{g \sin\tilde{\theta}} \approx 1.20 \frac{v^2}{g} \quad (3.74)$$

3.3.5 Πρόβλημα 5: Πτώση Αλεξιπτωτιστή

Αλεξιπτωτιστής μάζας m πέφτει από ένα αεροπλάνο με κλειστό το αλεξίπτωτο. Όταν φτάνει σε ύψος h πάνω από το έδαφος και ενώ έχει αρχική ταχύτητα μέτρου v_0 (κατά μήκος του κατακόρυφου άξονα) ανοίγει το αλεξίπτωτο. Η αντίσταση του αέρα ισούται με $f = -k v$ όπου k μια σταθερά με κατάλληλες διαστάσεις και v η ταχύτητα του αλεξιπτωτιστή. Να υπολογιστεί η ταχύτητα και το ύψος στο οποίο βρίσκεται ο αλεξιπτωτιστής συναρτήσει του χρόνου. Να υπολογιστεί ο χρόνος που χρειάζεται για να φτάσει στο έδαφος.



Σχήμα 3.10: Πτώση αλεξιπτωτιστή και δυνάμεις που ενεργούν.

Οι δυνάμεις που ενεργούν στον αλεξιπτωτιστή είναι το βάρος του $B = -mg$ και η αντίσταση του αέρα $f = -k v$. Η συνολική δύναμη είναι δηλαδή $F = -m g - k v$ και εξαρτάται μόνο από την ταχύτητα³ Γράφουμε λοιπόν τον

³Στην κίνηση ενός σώματος μέσα σε ένα ρευστό, η αντίσταση του ρευστού δίνεται προσεγγιστικά από $f = -D v^2$ για μεγάλες ταχύτητες και $f = -k v$ για μικρές ταχύτητες όπου οι

δεύτερο νόμο στην μορφή (3.2)

$$m \frac{dv}{dt} = -mg - kv \quad (3.75)$$

και ολοκληρώνοντας παίρνουμε την μορφή (3.48)

$$m \int_{-v_0}^v \frac{dv'}{mg + kv'} = - \int_0^t dt' \quad (3.76)$$

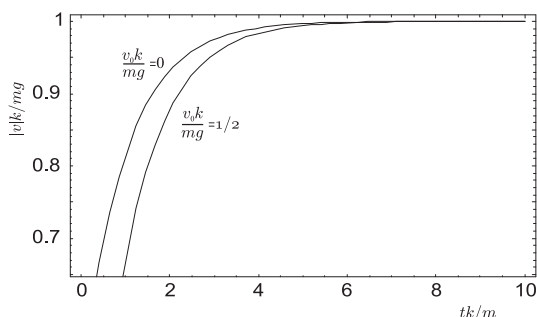
Χρησιμοποιώντας διαστατική ανάλυση μπορούμε να θέσουμε $m = g = k = 1$. Οι διαστάσεις των μεγεθών αυτών είναι

$$[m] = M, [g] = \frac{L}{T^2}, [k] = \frac{M}{T} \quad (3.77)$$

(το τελευταίο είναι συνέπεια του γεγονότος ότι το kv έχει διαστάσεις δύναμης). Η εξίσωση (3.76) παίρνει την μορφή

$$\begin{aligned} \int_{-v_0}^v \frac{dv'}{1+v'} &= - \int_0^t dt' \Rightarrow \left[\ln(1+v') \right]_{-v_0}^v = -t \Rightarrow \\ \ln \left(\frac{1+v}{1-v_0} \right) &= -t \Rightarrow \frac{1+v}{1-v_0} = e^{-t} \Rightarrow \\ v &= e^{-t}(1-v_0) - 1 \end{aligned} \quad (3.78)$$

Η αποκατάσταση των μονάδων μπορεί να γίνει ως εξής: Χρειαζόμαστε μονάδες



Σχήμα 3.11: Το μέτρο της ταχύτητας του αλεξιπτωτιστή συναρτήσει του χρόνου για αρχικές ταχύτητες $v_0 = 0$ και $v_0 = \frac{1}{2} \frac{mg}{k}$.

χρόνου (για να κάνουμε τον εκθέτη αδιάστατο) και μονάδες ταχύτητας (για να κάνουμε το δεύτερο μέλος να έχει ίδιες μονάδες με το πρώτο). Οι μονάδες αυτές μπορούν να κατασκευαστούν από τα μεγέθη (3.77)

$$T = \frac{[m]}{[k]}, V = \frac{[m][g]}{[k]} \quad (3.79)$$

συντελεστές D, k εξαρτώνται από το σχήμα του σώματος και το ρευστό. Στην περίπτωση του αλεξιπτωτιστή όσο το αλεξίπτωτο είναι κλειστό ισχύει ο πρώτος τύπος ενώ όταν ανοίγει το αλεξίπτωτο ισχύει ο δεύτερος.

Αποκαθιστώντας στην (3.78) βρίσκουμε

$$v = \exp\left(-\frac{k}{m}t\right) \left(\frac{mg}{k} - v_0\right) - \frac{mg}{k} \quad (3.80)$$

Παρατηρούμε ότι μετά την πάροδο αρκετού χρόνου ($t \rightarrow \infty$) ο πρώτος όρος μηδενίζεται ⁴ και η ταχύτητα πηγαίνει στην οριακή τιμή $v = -v_f$

$$v_f = \frac{mg}{k} \quad (3.81)$$

η οποία εξαρτάται μόνο από την μάζα του αλεξιπτωτιστή και τις σταθερές g και k . Η παρατήρηση αυτή επιβεβαιώνεται και από τη γραφική αναπαράσταση του Σχήματος 3.11. Η τελική ταχύτητα v_f θα μπορούσε να υπολογιστεί εύκολα και με άλλο τρόπο: Το σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα όταν η συνολική δύναμη που ενεργεί σε αυτό είναι μηδέν και άρα $mg = kv_f$.

Το ύψος συναρτήσει του χρόνου υπολογίζεται από την (3.78)

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= e^{-t}(1 - v_0) - 1 \Rightarrow \\ \int_h^y dy' &= (1 - v_0) \int_0^t dt' e^{-t'} - \int_0^t dt' \Rightarrow \\ y &= h + (v_0 - 1)(e^{-t} - 1) - t \end{aligned} \quad (3.82)$$

και μετά την αποκατάσταση των μονάδων ⁵

$$y = h + \frac{m}{k} \left(v_0 - \frac{mg}{k}\right) \left(\exp\left(-\frac{k}{m}t\right) - 1\right) - \frac{mg}{k}t \quad (3.83)$$

Ο χρόνος πτώσης μπορεί να υπολογιστεί από την (3.82) θέτοντας $y = 0$

$$h + (v_0 - 1)(e^{-t} - 1) - t = 0 \quad (3.84)$$

Η γενική λύση της εξίσωσης που προκύπτει δεν είναι και τόσο εύκολη ⁶ μπορούμε όμως να την λύσουμε προσεγγιστικά υποθέτοντας ότι ο χρόνος είναι αρκετά μεγάλος ώστε το εκθετικό να μηδενίζεται και η (3.84) συνεπάγεται

$$t \sim h + (1 - v_0)$$

⁴Σε μια ρεαλιστική περίπτωση $k/m \sim 1.6/sec$ και μετά την παρέλευση μερικών δευτερολέπτων το εκθετικό μηδενίζεται.

⁵Η αποκατάσταση των μονάδων έγινε ως εξής: Πολλαπλασιάσαμε το χρόνο στο όρισμα του εκθετικού με $\frac{k}{m}$ ($[k/m] = 1/T$) έτσι ώστε το όρισμα να γίνει αδιάστατο. Έπειτα, πολλαπλασιάσαμε την μονάδα η οποία αφαιρείται από το v_0 με $\frac{mg}{k}$ ($[mg/k] = L/T$) έτσι ώστε να αποκτήσει μονάδες ταχύτητας και τέλος πολλαπλασιάσαμε όλον τον παράγοντα που περιέχει το v_0 με $\frac{m}{k}$ ($[m/k] = T$) για να αποκτήσει μονάδες μήχους.

⁶Η λύση στην γενική περίπτωση γίνεται ως εξής: Είναι γνωστό ότι η λύση της εξίσωσης $z = we^w$ είναι μια γενίκευση του λογαρίθμου που ονομάζεται συνάρτηση του Lambert ή Productlog και συμβολίζεται συνήθως με το $W(z)$. Η συνάρτηση αυτή μπορεί να υπολογιστεί με κάποιο υπολογιστικό πακέτο όπως το Mathematica. Για να φέρουμε την (3.84) σε αυτή τη

και αποκαθιστώντας τις μονάδες

$$t \sim \frac{hk}{mg} - \frac{v_0}{g}$$

Σε μια ρεαλιστική πτώση ένας αλεξιπτωτιστής μάζας $m = 75\text{Kgr}$ με κλειστό αλεξιπτωτο αναπτύσσει ταχύτητα $v_0 = 50\text{m/sec}$. Μετά το άνοιγμα του αλεξιπτωτου ο συντελεστής αντίστασης του αέρα παίρνει τυπικές τιμές $k = 130\text{Kgr/sec}$ και τελική ταχύτητα του αλεξιπτωτιστή είναι (θεωρούμε $g = 9.81\text{m/sec}^2$)

$$v_f = \frac{mg}{k} \approx 5.7\text{m/sec}$$

Αν υποθέσουμε ότι το άνοιγμα του αλεξιπτωτου γίνεται σε ύψος $h = 400\text{m}$ έχουμε χρόνο πτώσης

$$t \approx 65.6\text{sec}$$

3.3.6 Πρόβλημα 6: Παράξενη δύναμη

Σώμα μάζας m κινείται κατά μήκος του άξονα x υπό την επίδραση δύναμης της μορφής $F = kx$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα βρίσκεται στη θέση $x = 0$ και έχει αρχική ταχύτητα v_0 . Να βρεθεί η ταχύτητα και η θέση του σώματος συναρτήσει του χρόνου για $t > 0$.

Η δύναμη εδώ εξαρτάται μόνο από την θέση. Μπορώ να ολοκληρώσω τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα ακολουθώντας τις (3.49), (3.50). Γράφουμε δηλαδή το δεύτερο νόμο ως

$$\begin{aligned} m v \frac{dv}{dx} = kx &\Rightarrow m v dv = kx dx \Rightarrow m \int_{v_0}^v v dv' = k \int_0^x x dx' \Rightarrow \\ \frac{m}{2} (v^2 - v_0^2) = \frac{1}{2} k x^2 &\Rightarrow mv^2 = mv_0^2 + kx^2 \Rightarrow v = \pm \sqrt{v_0^2 + kx^2/m} \end{aligned} \quad (3.85)$$

Από τις δύο ρίζες μόνο η θετική είναι συμβατή με την αρχική συνθήκη, ότι δηλαδή $v(x = 0) = v_0$. Χρησιμοποιώντας διαστατική ανάλυση μπορούμε να

μορφή αλλάζουμε μεταβλητή $t = t' + h - v_0 + 1$. Η (3.84) παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} (v_0 - 1) \exp(-t' - h + v_0) = t' &\Rightarrow (v_0 - 1) \exp(-h + v_0 - 1) = t' e^{t'} \Rightarrow \\ t' = W((v_0 - 1) \exp(-h + v_0 - 1)) \end{aligned}$$

και άρα

$$t = h - v_0 + 1 + W((v_0 - 1) \exp(-h + v_0 - 1))$$

αποκαθιστώντας τις μονάδες

$$t = \frac{hk}{mg} - \frac{v_0}{g} + \frac{m}{k} \left[1 + W \left(\left(\frac{v_0 k}{mg} - 1 \right) \exp \left(-\frac{hk^2}{m^2 g} + \frac{v_0 k}{mg} - 1 \right) \right) \right].$$

θέσουμε $m = v_0 = k = 1$ και η εξίσωση για την μετατόπιση x γράφεται

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{1+x^2} \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = dt \Rightarrow \int_0^x \frac{dx'}{\sqrt{1+x'^2}} = \int_0^t dt \Rightarrow \quad (3.86)$$

$$\operatorname{arcsinh} x = t \Rightarrow x = \sinh t$$

και μετά την αποκατάσταση των διαστάσεων

$$x = v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} \sinh \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \quad (3.87)$$

Εναλλακτικά το πρόβλημα αυτό θα μπορούσε να επιλυθεί ως εξής: Η διαφορική που προκύπτει από το 2ο Νόμο είναι

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = kx \Rightarrow x''(t) - \frac{k}{m} x(t) = 0 \quad (3.88)$$

Η οποία είναι γραμμική διαφορική 2ης τάξης η οποία όπως γνωρίζουμε από τη θεωρία διαφορικών έχει γενική λύση

$$x(t) = A e^{\rho_1 t} + B e^{\rho_2 t} \quad (3.89)$$

όπου ρ_1, ρ_2 οι ρίζες της $\rho^2 - \frac{k}{m} = 0 \Rightarrow \rho_1 = +\sqrt{\frac{k}{m}}, \rho_2 = -\sqrt{\frac{k}{m}}$, επομένως

$$x(t) = A e^{\sqrt{\frac{k}{m}} t} + B e^{-\sqrt{\frac{k}{m}} t} \quad (3.90)$$

Οι τις αρχικές συνθήκες απαιτούν

$$\left. \begin{aligned} x(0) = 0 &\Rightarrow A + B = 0 \\ \dot{x}(0) = v_0 &\Rightarrow \sqrt{\frac{k}{m}} A - \sqrt{\frac{k}{m}} B = v_0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A = -B = \frac{v_0}{2} \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (3.91)$$

οπότε η λύση παίρνει τη μορφή

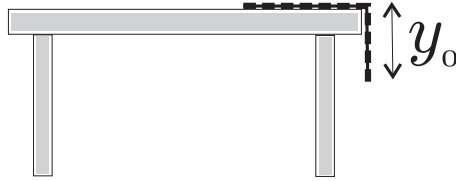
$$x(t) = v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} \frac{1}{2} \left(e^{\sqrt{\frac{k}{m}} t} - e^{-\sqrt{\frac{k}{m}} t} \right) \Rightarrow$$

$$x(t) = v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} \sinh \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \quad (3.92)$$

3.3.7 Πρόβλημα 7: Η αλυσίδα που πέφτει

Μια αλυσίδα μήκους ℓ και γραμμικής πυκνότητας ρ βρίσκεται πάνω σε τραπέζι έτσι ώστε τη χρονική στιγμή $t = 0$ ένα τμήμα της y_0 να κρέμεται από το τραπέζι όπως στο Σχήμα 3.12. Η αλυσίδα αφήνεται να ολισθήσει και θεωρούμε ότι η τριβή ολίσθησης είναι μηδέν. Να προσδιοριστεί συναρτήσει του χρόνου το μήκος της αλυσίδας που κρέμεται από το τραπέζι, η ταχύτητα της αλυσίδας καθώς και ο συνολικός χρόνος που χρειάζεται η αλυσίδα για να εγκαταλείψει το τραπέζι.

Οι δυνάμεις που ενεργούν στην αλυσίδα είναι το βάρος και η αντίδραση του τραπέζιού. Η αντίδραση και το βάρος του τμήματος που βρίσκεται στο τραπέζι αλληλοεξουδετερώνονται, συνεπώς η αλυσίδα κινείται υπό την επίδραση του βάρους του κάθετου τμήματος, το οποίο όμως εξαρτάται από το χρόνο. Αν την χρονική στιγμή t το κρεμασμένο τμήμα της αλυσίδας έχει μήκος $y(t)$, η δύναμη που ενεργεί σε αυτήν είναι $B(t) = \rho g y(t)$ (θεωρήσαμε τα θετικά του άξονα των y να είναι προς τα κάτω). Η συνολική μάζα της αλυσίδας είναι $m = \rho l$. Μπορούμε να εκμεταλλευτούμε το γεγονός ότι ο χρόνος δεν εμφανίζεται εκπεφρασμένα στην έκφραση της δύναμης και να εφαρμόσουμε τη μέθοδο που αναπτύξαμε στην Ενότητα 3.3γ. Εισάγουμε την ταχύτητα της αλυσίδας $v(t) = \dot{y}(t)$ και γράφουμε το δεύτερο νόμο στην μορφή



Σχήμα 3.12: Αλυσίδα τοποθετείται σε τραπέζι έτσι ώστε ένα τμήμα της να κρέμεται από το τραπέζι και αφήνεται να ολισθήσει.

$$\begin{aligned} \rho l v \frac{dv}{dy} = \rho g y &\Rightarrow \ell v dv = g dy y \Rightarrow \ell \int_0^v v' dv' = g \int_{y_0}^y y' dy' \Rightarrow \\ \frac{v^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{g}{l} (y^2 - y_0^2) &\Rightarrow v = \sqrt{\frac{g}{l}} \sqrt{y^2 - y_0^2} \end{aligned} \quad (3.93)$$

όπου απορρίψαμε την αρνητική ρίζα καθώς αυτή αντιστοιχεί, στο σύστημα συντεταγμένων που επιλέξαμε, σε κίνηση της αλυσίδας προς τα πάνω. Η διαστατική ανάλυση μας επιτρέπει να θέσουμε ⁷ $g/l = y_0 = 1$ και η (3.93) παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} = \sqrt{y^2 - 1} &\Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{y^2 - 1}} = dt \\ \int_0^y \frac{dy'}{\sqrt{y'^2 - 1}} = \int_0^t dt' &\Rightarrow \left[\operatorname{arccosh}(y') \right]_0^y = t \Rightarrow \\ \operatorname{arccosh}(y) = t &\Rightarrow y = \cosh(t) \end{aligned} \quad (3.94)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την (Α'.32). Μετά την αποκατάσταση των διαστάσεων

$$y(t) = y_0 \cosh \left(\sqrt{\frac{g}{l}} t \right) \quad (3.95)$$

⁷ Δεν θα μπορούσαμε να θέσουμε ταυτόχρονα $l = 1$ και $y_0 = 1$ γιατί και τα δύο μεγέθη έχουν μονάδες μήκους.

Ο χρόνος t_s για τον οποίο η αλυσίδα βρίσκεται σε επαφή με το τραπέζι μπορεί να υπολογιστεί από την (3.95) θέτοντας ⁸

$$y(t_s) = \ell \Rightarrow \ell = y_0 \cosh \left(\sqrt{\frac{g}{l}} t \right) \Rightarrow t_s = \sqrt{\frac{l}{g}} \operatorname{arccosh} \left(\frac{\ell}{y_0} \right) \quad (3.96)$$

Η ταχύτητα συναρτήσει του χρόνου υπολογίζεται από την παράγωγο της (3.95)

$$v(t) = y_0 \sqrt{\frac{g}{l}} \sinh \left(\sqrt{\frac{g}{l}} t \right) \quad (3.97)$$

Η ταχύτητα την στιγμή που η αλυσίδα χάνει την επαφή με το τραπέζι μπορεί να υπολογιστεί από την (3.97) ως $v_s = v(t_s)$. Μπορεί επίσης να υπολογιστεί πιο εύκολα από την (3.93) θέτοντας $y = \ell$

$$v_s = \sqrt{\frac{g}{l}} \sqrt{\ell^2 - y_0^2} = \sqrt{g\ell} \sqrt{1 - \left(\frac{y_0}{\ell}\right)^2} \quad (3.98)$$

3.3.8 Πρόβλημα 8: Κατακόρυφη βολή με αντίσταση αέρα

Σώμα μάζας m εκτοξεύεται, από το επίπεδο του εδάφους, κατακόρυφα προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα v_0 . Αν η δύναμη της αντίστασης του αέρα δίνεται είναι $f = -\alpha v^2$ όπου α θετική σταθερά, να υπολογιστούν (α) η ταχύτητα του σώματος συναρτήσει του ύψους στο οποίο βρίσκεται (β) το μέγιστο ύψος που φτάνει το σώμα.

Οι δυνάμεις που ενεργούν στο σώμα είναι το βάρος του και η αντίσταση του αέρα και οι δύο με φορά προς τα αρνητικά του άξονα των y . Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα δίνει

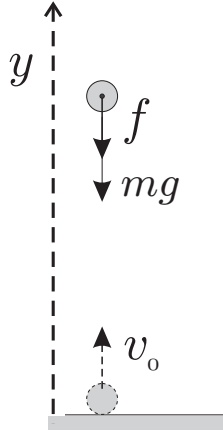
$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -mg - \alpha v^2 \quad (3.99)$$

Έχουμε εξάρτηση της δύναμης από την ταχύτητα όμως δεν ζητείται η θέση συναρτήσει του χρόνου αλλά η ταχύτητα συναρτήσει της θέσης. Σε αυτή την περίπτωση εργαζόμαστε όπως στην Ενότητα Ενότητα 3.3γ, απαλείφουμε δηλαδή το χρόνο από την (3.99) χρησιμοποιώντας την (3.49)

$$m v \frac{dv}{dx} = -mg - \alpha v^2 \quad (3.100)$$

⁸Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα (Α.16) η σχέση αυτή μπορεί να γραφεί και ως

$$t_s = \sqrt{\frac{l}{g}} \ln \left(\frac{\ell + \sqrt{\ell^2 - y_0^2}}{y_0} \right)$$



Σχήμα 3.13: Κατακόρυφη βολή με αντίσταση αέρα.

Χρησιμοποιώντας διαστατική ανάλυση μπορούμε να θέσουμε $m = g = \alpha = 1$

$$\begin{aligned}
 v \frac{dv}{dy} &= -1 - v^2 \Rightarrow \int_{v_0}^v \frac{v' dv'}{1 + v'^2} = - \int_0^y dy' \Rightarrow \\
 \frac{1}{2} \int_{v_0}^v \frac{dv'^2}{1 + v'^2} &= - \int_0^y dy' \Rightarrow \frac{1}{2} \ln(1 + v'^2) \Big|_{v_0}^v = -y' \Big|_0^y \Rightarrow \\
 \ln(1 + v^2) - \ln(1 + v_0^2) &= -2y \Rightarrow \ln \frac{1 + v^2}{1 + v_0^2} = -2y \Rightarrow \\
 \frac{1 + v^2}{1 + v_0^2} &= e^{-2y} \Rightarrow v = \sqrt{(1 + v_0^2) e^{-2y} - 1} \quad (3.101)
 \end{aligned}$$

Αποκαθιστώντας τις διαστάσεις ($M = [m]$, $L = [m][\alpha]^{-1}T = [m]^{\frac{1}{2}} [\alpha]^{-\frac{1}{2}} [g]^{-\frac{1}{2}}$) βρίσκουμε

$$v = \sqrt{\frac{mg}{a}} \sqrt{\left(\frac{mg}{a} + v_0^2\right) e^{-\frac{2\alpha}{m}y} - \frac{mg}{a}} \quad (3.102)$$

Στο μέγιστο ύψος η ταχύτητα μηδενίζεται, οπότε

$$\begin{aligned}
 v = 0 &\Rightarrow \left(\frac{mg}{a} + v_0^2\right) e^{-\frac{2\alpha}{m}y} = \frac{mg}{a} \Rightarrow \\
 e^{+\frac{2\alpha}{m}y} &= 1 + \frac{mgv_0^2}{\alpha} \Rightarrow y = \frac{m}{2\alpha} \ln \left(1 + \frac{\alpha v_0^2}{mg}\right) \quad (3.103)
 \end{aligned}$$

3.4 Ο δεύτερος νόμος σε πολικές συντεταγμένες

Υπάρχουν προβλήματα κίνησης στο επίπεδο στα οποία η μορφή των δυνάμεων είναι τέτοια ώστε η επίλυσή τους να είναι πιο εύκολη σε πολικές συντεταγμένες.

Για το σκοπό αυτό είναι χρήσιμο να εκφράσουμε τον δεύτερο νόμο

$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{F} \quad (3.104)$$

σε πολικές συντεταγμένες. Στην πράξη αυτό σημαίνει να εκφράσουμε τη δύναμη \vec{F} συναρτήσει της ακτινικής F_r και της γωνιακής συνιστώσας F_θ . Οι καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y) συνδέονται με τις πολικές (r, θ) με τις σχέσεις⁹

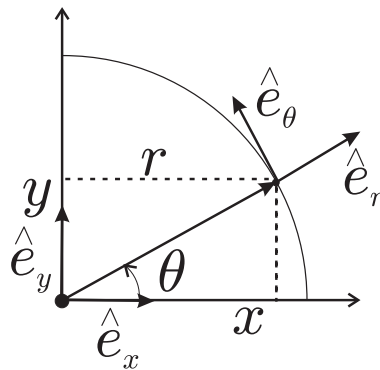
$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \end{aligned} \quad (3.105)$$

Το μοναδιαία διανύσματα σε πολικές συντεταγμένες είναι

$$\begin{aligned} \hat{e}_r &= \cos \theta \hat{e}_x + \sin \theta \hat{e}_y \\ \hat{e}_\theta &= -\sin \theta \hat{e}_x + \cos \theta \hat{e}_y \end{aligned} \quad (3.106)$$

και άρα η δύναμη, δηλαδή το δεύτερο μέλος της (3.104), γράφεται ως

$$\vec{F} = F_r \hat{e}_r + F_\theta \hat{e}_\theta \quad (3.107)$$



Σχήμα 3.14: Πολικές και καρτεσιανές συντεταγμένες και αντίστοιχα μοναδιαία διανύσματα στις δύο διαστάσεις.

Για να εκφράσουμε το πρώτο μέλος της (3.104) χρειάζεται να υπολογίσουμε την δεύτερη παράγωγο του διανύσματος θέσης $\vec{r} = r \hat{e}_r$ σε πολικές συντεταγμένες. Σε αυτό το σημείο χρειάζεται λίγη προσοχή γιατί, σε αντίθεση με τα

⁹Ο αντίστροφος μετασχηματισμός είναι

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan \frac{y}{x}$$

καρτεσιανά μοναδιαία διανύσματα, τα πολικά εξαρτώνται από το χρόνο και κατά συνέπεια έχουν μη μηδενική χρονική παράγωγο. Χρησιμοποιώντας την (3.106)

$$\begin{aligned}\dot{\hat{e}}_r &= -\sin\theta\dot{\theta}\hat{e}_x + \cos\theta\dot{\theta}\hat{e}_y = \dot{\theta}\hat{e}_\theta \\ \dot{\hat{e}}_\theta &= -\cos\theta\dot{\theta}\hat{e}_x - \sin\theta\dot{\theta}\hat{e}_y = -\dot{\theta}\hat{e}_r\end{aligned}\quad (3.108)$$

και χρησιμοποιώντας την (3.108) υπολογίζουμε την πρώτη παράγωγο της θέσης

$$\dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}(r\hat{e}_r) = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\hat{e}}_r = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta \quad (3.109)$$

η οποία μας επιτρέπει να διαχωρίσουμε την ταχύτητα σε ακτινική και γωνιακή συνιστώσα

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = v_r\hat{e}_r + v_\theta\hat{e}_\theta \quad (3.110)$$

με

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\theta = r\dot{\theta} \quad (3.111)$$

Ανάλογα υπολογίζουμε τη δεύτερη παράγωγο

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{r}} &= \frac{d}{dt}\dot{\vec{r}} = \ddot{r}\hat{e}_r + \dot{r}\dot{\hat{e}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\hat{e}_\theta + r\ddot{\theta}\hat{e}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\hat{e}}_\theta \\ &= \ddot{r}\hat{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\hat{e}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\hat{e}_\theta + r\ddot{\theta}\hat{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\hat{e}_r \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{e}_\theta\end{aligned}\quad (3.112)$$

Αντικαθιστώντας τις (3.109) και (3.107) στην (3.104) παίρνουμε το νόμο του Νεύτωνα σε πολικές συντεταγμένες

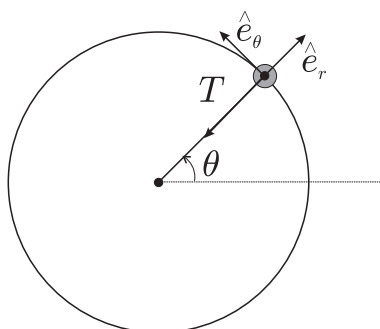
$$\begin{aligned}m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) &= F_r \\ m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) &= F_\theta\end{aligned}\quad (3.113)$$

3.4.1 Πρόβλημα 1: Κυκλική κίνηση

Σώμα μάζας m δεμένο με σχοινί εκτελεί κυκλική κίνηση με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω σε κύκλο ακτίνας R . Να υπολογιστεί η ταχύτητα και η επιτάχυνση του καθώς και η τάση του σχοινιού.

Η μόνη δύναμη που ενεργεί στο σώμα είναι η τάση του σχοινιού κατά μήκος της ακτινικής διεύθυνσης $\vec{F} = -T\hat{e}_r$. Η γωνιακή ταχύτητα είναι σταθερή άρα $\dot{\theta} = \omega$ και $\ddot{\theta} = 0$. Η ακτινική απόσταση r παραμένει σταθερή $r = R$, κατά συνέπεια $\dot{r} = \ddot{r} = 0$. Με αυτές τις συνθήκες δεύτερη εξίσωση του 2ου νόμου σε πολικές συντεταγμένες (3.113) ικανοποιείται τετριμμένα ($0 = 0$), ενώ η πρώτη εξίσωση δίνει

$$-m r \dot{\theta}^2 = -T \Rightarrow T = m R \omega^2 \quad (3.114)$$



Σχήμα 3.15: Σώμα εκτελεί κυκλική κίνηση με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω .

Η ταχύτητα του σώματος σύμφωνα με τις (3.110), (3.111) είναι

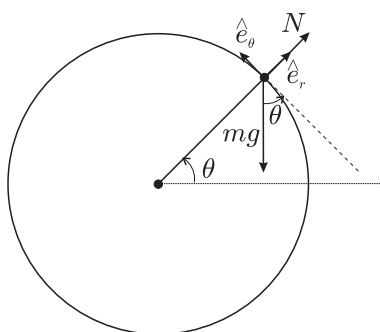
$$\vec{v} = R\dot{\theta}\hat{e}_\theta = \omega R\hat{e}_\theta \Rightarrow v = |\vec{v}| = \omega R \quad (3.115)$$

Από τις (3.114), (3.115) βρίσκουμε το γνωστό τύπο της κεντρομόλου δύναμης

$$T = m \frac{v^2}{R} \quad (3.116)$$

3.4.2 Πρόβλημα 2: Κίνηση πάνω σε σφαίρα

Σωματίδιο μάζας m βρίσκεται στην κορυφή ακίνητης σφαίρας ακτίνας R . Σε χρόνο $t = 0$ το σωματίδιο αρχίζει να γλυστρά προς τα κάτω. Αγνοώντας τις τριβές σε ποια γωνία και με ποια ταχύτητα το σωματίδιο θα εγκαταλείψει την σφαίρα. Θεωρείστε ότι η κίνηση λαμβάνει χώρα χωρίς περιστροφή.



Σχήμα 3.16: Σωματίδιο μάζας m αφήνεται να κινηθεί από την κορυφή της σφαίρας προς τα κάτω.

Θεωρούμε μια τομή της σφαίρας στο επίπεδο κίνησης του σωματιδίου όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.16. Οι δυνάμεις οι οποίες ενεργούν στο σωματίδιο

είναι το βάρος του $B = mg$ και η αντίδραση του επιπέδου N . Σε πολικές συντεταγμένες οι δυνάμεις που ενεργούν στο σώμα είναι

$$(r) : F_r = N - mg \sin \theta \quad (3.117)$$

$$(\theta) : F_\theta = -mg \cos \theta \quad (3.118)$$

και επιπλέον επειδή $r = R = \text{σταθερό}$ όσο το σωματίδιο ακουμπάει στη σφαίρα $\dot{r} = \ddot{r} = 0$.

Αντικαθιστώντας στον 2ο νόμο (3.113)

$$-mR\dot{\theta}^2 = N - mg \sin \theta \quad (3.119)$$

$$mR\ddot{\theta} = -mg \cos \theta \quad (3.120)$$

Η πρώτη εξίσωση (3.119) προσδιορίζει την αντίδραση της σφαίρας N ενώ η δεύτερη (3.120) μπορεί να λυθεί με μέθοδο ανάλογη της εξίσωσης (3.49). Γράφουμε δηλαδή $\dot{\theta} = \theta' d\theta/d\theta$ και η (3.120) παίρνει τη μορφή

$$mR\dot{\theta} \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = -mg \cos \theta \Rightarrow \frac{R}{2} d\dot{\theta}^2 = -g \cos \theta d\theta \Rightarrow \quad (3.121)$$

$$\frac{R}{2} \int_0^{\dot{\theta}} d\dot{\theta}'^2 = -g \int_{\pi/2}^{\theta} d\theta' \cos \theta' \Rightarrow \frac{R}{2} \dot{\theta}^2 = -g \sin \theta \Big|_{\pi/2}^{\theta} \Rightarrow \quad (3.122)$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R} (1 - \sin \theta) \quad (3.123)$$

Αντικαθιστώντας στην (3.119) βρίσκουμε

$$N = mg(3 \sin \theta - 2) \quad (3.124)$$

Την στιγμή που το σώμα εγκαταλείπει τη σφαίρα η αντίδραση N μηδενίζεται

$$N = 0 \Rightarrow \sin \theta = \frac{2}{3} \Rightarrow \theta \approx 41.81^\circ \quad (3.125)$$

Για αυτή τη γωνία η (3.123) δίνει

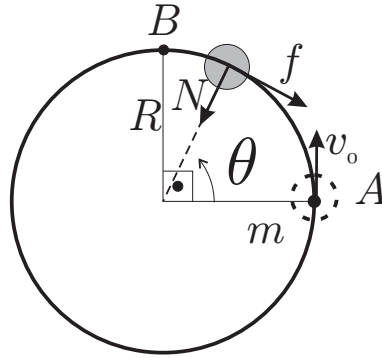
$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R} \left(1 - \frac{2}{3}\right) \Rightarrow \dot{\theta} = \sqrt{\frac{2g}{3R}} \Rightarrow v = R\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2gR}{3}} \quad (3.126)$$

3.4.3 Πρόβλημα 3: Κίνηση σε κυκλική στεφάνη με αντίσταση αέρα

Σώμα μάζας m μπορεί να κινείται χωρίς τριβές σε οριζόντια κυκλική στεφάνη ακτίνας R όπως στο σχήμα. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα εκτοξεύεται, με αρχική ταχύτητα μέτρου v_0 , από το σημείο A, όπως στο σχήμα. Το μέτρο της αντίστασης του αέρα είναι $k\vec{v}$ όπου k γνωστή θετική σταθερά και v το μέτρο της ταχύτητας του σώματος. Δεν υπάρχει βαρύτητα.

(i) Να υπολογιστεί η δύναμη (οριζόντια συνιστώσα) που ασκεί η στεφάνη στο σώμα ως συνάρτηση του χρόνου.

(ii) Να βρεθεί ο χρόνος που θα διαρκέσει η μετάβαση του σώματος από το σημείο A στο σημείο B. Σχολιάστε τυχόν περιορισμούς στις παραμέτρους του προβλήματος.



Σχήμα 3.17: Σωματίδιο μάζας m κινείται σε κυκλική στεφάνη με αντίσταση αέρα.

(i) Όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.17 στο σώμα ενεργεί η αντίδραση της στεφάνης $-N\hat{e}_r$ και η αντίσταση του αέρα όπως στο σχήμα. Η ταχύτητα του σώματος έχει μόνο τροχιακή συνιστώσα $\vec{v} = R\dot{\theta}\hat{e}_\theta$. Θα χρησιμοποιήσουμε το 2ο νόμο του Νεύτωνα σε πολικές συντεταγμένες δηλαδή την (3.113). Εδώ έχουμε $r = R \Rightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0$ και $F_r = -N$, $F_\theta = -kR\dot{\theta}$. Επομένως

$$-mR\dot{\theta}^2 = -N \quad (3.127)$$

$$mR\ddot{\theta} = -kR\dot{\theta} \quad (3.128)$$

Από την (3.128)

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= -\frac{k}{m}\dot{\theta} \Rightarrow \frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}} = -\frac{k}{m} \Rightarrow \frac{d\dot{\theta}}{\dot{\theta}} = -\frac{k}{m} dt \Rightarrow \int_{\dot{\theta}_0}^{\dot{\theta}} \frac{d\dot{\theta}}{\dot{\theta}} = -\frac{k}{m} \int_0^t dt \Rightarrow \\ \ln \dot{\theta} \Big|_{\dot{\theta}_0}^{\dot{\theta}} &= -\frac{k}{m} t \ln \frac{\dot{\theta}}{\dot{\theta}_0} = -\frac{k}{m} t \Rightarrow \dot{\theta} = \dot{\theta}_0 e^{-\frac{k}{m} t} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{v_0}{R} e^{-\frac{k}{m} t} \quad (3.129) \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $v_0 = \dot{\theta}_0 R$. Αντικαθιστώντας στην (3.127) βρίσκουμε

$$N = \frac{m v_0^2}{R} e^{-\frac{2k}{m} t} \quad (3.130)$$

(ii) Ολοκληρώνοντας την (3.128) βρίσκουμε

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta' = \frac{v_0}{R} \int_0^{\tau} dt e^{-\frac{k}{m} t} \Rightarrow \frac{\pi}{2} = -\frac{v_0 m}{k R} e^{-\frac{k}{m} t} \Big|_0^{\tau} \Rightarrow \frac{\pi}{2} = \frac{v_0 m}{k R} (1 - e^{-\frac{k}{m} \tau}) \Rightarrow$$

$$e^{-\frac{k}{m} \tau} = 1 - \frac{k R \pi}{2 v_0 m} \Rightarrow \tau = -\frac{m}{k} \ln \left(1 - \frac{k R \pi}{2 v_0 m} \right) \quad (3.131)$$

Για να υπάρχει λύση θα πρέπει $1 - \frac{k R \pi}{2 v_0 m} \geq 0$, διαφορετικά το σώμα δεν φτάνει ποτέ στο Β.

Κεφάλαιο 4

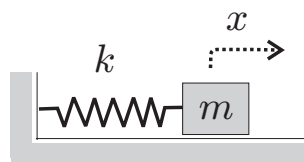
ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

4.1 Εισαγωγή

Σκοπός αυτής της ενότητας είναι η μελέτη των συζευγμένων ταλαντώσεων μηχανικών συστημάτων. Θα ξεκινήσουμε από την παρουσίαση των απλούστερων συστημάτων μηχανικών ταλαντώσεων και την παρουσίαση των συνήθων προσεγγίσεων που χρησιμοποιούμε για την επίλυσή τους και ακολούθως θα προχωρήσουμε στη μελέτη συστημάτων που περιλαμβάνουν συζευγμένους αρμονικούς ταλαντωτές. Βασικό στοιχείο της παρουσίασης αποτελούν οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης οι οποίοι συνδέουν το φυσικό πρόβλημα των συζευγμένων ταλαντωτών με το μαθηματικό πρόβλημα της εύρεσης ιδιοτιμών και ιδιοανυσμάτων συμμετρικών πινάκων.

4.2 Απλός Αρμονικός Ταλαντωτής

Το απλούστερο είδος ταλάντωσης προκύπτει όταν η δύναμη είναι ανάλογη της απόστασης. Ένα τέτοιο παράδειγμα αποτελεί ο ταλαντωτής του Σχήματος 4.1 όπου ισχύει ο νόμος του Hooke $F = -kx$, με x την απόσταση από το σημείο ισορροπίας. Η εξίσωση κίνησης της μάζας m γράφεται



Σχήμα 4.1: Απλός αρμονικός ταλαντωτής.

$$m \ddot{x} = -kx \rightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (4.1)$$

όπου $\omega = \sqrt{k/m}$. Η εξίσωση (4.1) είναι μια ομογενής γραμμική διαφορική και κατά συνέπεια επιδέχεται λύσεις της μορφής ¹

$$x(t) = A e^{\rho t} \quad (4.2)$$

όπου A και ρ αυθαίρετες σταθερές. Αντικαθιστώντας στην (4.1) παίρνουμε

$$A \rho^2 e^{\rho t} + A \omega^2 e^{\rho t} = 0 \rightarrow \rho = \pm i \omega \quad (4.3)$$

Η γενική λύση της εξίσωσης (4.1) δίνεται από

$$x(t) = A e^{+i \omega t} + B e^{-i \omega t} \quad (4.4)$$

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των τριγωνομετρικών συναρτήσεων (βλ Παράρτημα Α) η λύση μπορεί να γραφτεί ισοδύναμα στις παρακάτω μορφές

$$x(t) = A_1 \cos(\omega t) + B_1 \sin(\omega t) \quad (4.5)$$

$$x(t) = A_2 \sin(\omega t + \phi_1) \quad (4.6)$$

$$x(t) = A_3 \cos(\omega t + \phi_2) \quad (4.7)$$

όπου τα $A_1, A_2, A_3, B_1, \phi_1, \phi_2$ είναι σταθερές (χρησιμοποιήσαμε δείκτες για αν δείξουμε ότι πρόκειται για διαφορετικές σταθερές σε κάθε λύση) οι οποίες προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες. Αν για παράδειγμα γνωρίζουμε ότι τη χρονική στιγμή $t = 0$ έχουμε $x(0) = 0, \dot{x}(0) = v$, αντικαθιστώντας στην (4.6) παίρνουμε $\phi_1 = 0, A_2 = \frac{v}{\omega}$ και

$$x(t) = \frac{v}{\omega} \sin(\omega t) \quad (4.8)$$

4.3 Το απλό εκκρεμές

Το απλό εκκρεμές αποτελείται από μια μάζα m δεμένη στο άκρο μιας αβαρούς μπάρας (μήκους ℓ) όπως στο Σχήμα 4.2. Όταν η μάζα απομακρυνθεί από το σημείο ισορροπίας και αφεθεί, το σύστημα εκτελεί ταλαντώσεις. Σε πολικές συντεταγμένες οι δυνάμεις που ενεργούν στη μάζα είναι

¹Η γενική λύση μια ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης της μορφής

$$\frac{d^n x}{dx^n} + c_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dx^{n-1}} + \dots + c_1 \frac{dx}{dx} + c_0 = 0$$

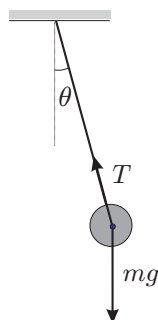
βρίσκεται ως εξής: Αντικαθιστούμε στην διαφορική τη δοκιμαστική λύση $x(t) = A e^{\rho t}$ και η διαφορική ανάγεται στην πολυωνυμική εξίσωση

$$\rho^n + c_{n-1} \rho^{n-1} + \dots + c_1 \rho + c_0 = 0$$

η οποία έχει ως n λύσεις $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$. Η γενική λύση της διαφορικής είναι ο γραμμικός συνδυασμός όλων των επιμέρους λύσεων

$$x(t) = A_1 e^{\rho_1 t} + A_2 e^{\rho_2 t} + \dots + A_n e^{\rho_n t}$$

όπου A_1, A_2, \dots, A_n αυθαίρετες σταθερές.



Σχήμα 4.2: Το απλό εκκρεμές.

$$F_r = m g \cos \theta - T \quad (4.9)$$

$$F_\theta = -m g \sin \theta \quad (4.10)$$

Χρησιμοποιώντας τον 2ο νόμο του Νεύτωνα σε πολικές συντεταγμένες (3.113) βρίσκουμε τις εξισώσεις κίνησης του συστήματος (εδώ $r = \ell$ και $\dot{r} = \ddot{r} = 0$)

$$-m \ell \dot{\theta}^2 = m g \cos \theta - T \quad (4.11)$$

$$m \ell \ddot{\theta} = -m g \sin \theta \quad (4.12)$$

Η πρώτη εξίσωση (4.11) προσδιορίζει την τάση του νήματος, ενώ η δεύτερη (4.12) προσδιορίζει τη χρονική εξέλιξη της γωνίας $\theta(t)$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0 \quad (4.13)$$

Η εξίσωση αυτή για μικρές γωνίες θ , όπου² $\sin \theta \sim \theta$, ανάγεται στη γραμμική διαφορική

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \theta = 0 \quad (4.14)$$

Αυτή συμπίπτει με την εξίσωση του αρμονικού ταλαντωτή (4.1) με λύση

$$\theta(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad , \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \quad (4.15)$$

Αν για παράδειγμα θεωρήσουμε ότι για αρχικές συνθήκες $\theta(0) = 9^\circ = \frac{\pi}{20}$ και $\dot{\theta}(0) = 0$ βρίσκουμε $\theta(t) = \frac{\pi}{20} \cos\left(\frac{g}{\ell} t\right)$.

Στη γενική περίπτωση η (4.13) δεν ανάγεται σε γραμμική διαφορική και δεν μπορούμε να την επιλύσουμε με την παραπάνω μέθοδο. Χρησιμοποιώντας

²Σύμφωνα με το ανάπτυγμα Taylor για $\theta \ll 1$ έχουμε

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{6} + \frac{\theta^5}{120} + \dots$$

Εδώ κρατήσαμε μόνο τον πρώτο όρο του αναπτύγματος.

αλλαγή μεταβλητής $\frac{d^2\theta}{dt^2} = \dot{\theta} \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = \frac{1}{2} \frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta}$ παίρνει τη μορφή

$$\frac{1}{2} \frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta} = -\frac{g}{\ell} \sin \theta \quad (4.16)$$

Ανεξάρτητα από τις αρχικές συνθήκες αν το εκκρεμές δεν έχει αρκετή ενέργεια για να κάνει μια πλήρη περιστροφή θα υπάρχει μια γωνία θ_{max} στην οποία φτάνει το εκκρεμές και σταματάει στιγμιαία και άρα $\dot{\theta} = 0$. Η λύση έχει απλούστερη μορφή όταν εκφραστεί συναρτήσει αυτής της γωνίας. Θεωρούμε δηλαδή ως αρχικές συνθήκες $\theta(0) = \theta_{max}$ και $\dot{\theta}(0) = 0$

$$\begin{aligned} \int_0^{\dot{\theta}} d\dot{\theta}'^2 &= -2 \int_{\theta_{max}}^{\theta} d\theta' \sin \theta' \Rightarrow \\ \dot{\theta}^2 &= +\frac{2g}{\ell} (\cos \theta - \cos \theta_{max}) \Rightarrow \\ \frac{d\theta}{dt} &= \pm \sqrt{\frac{2g}{\ell}} \sqrt{(\cos \theta - \cos \theta_{max})} \Rightarrow \\ \int_{\theta_{max}}^{\theta} \frac{d\theta'}{\sqrt{\cos \theta' - \cos \theta_{max}}} &= \pm \sqrt{\frac{2g}{\ell}} \int_0^t dt' = \pm \sqrt{\frac{2g}{\ell}} t \end{aligned} \quad (4.17)$$

Το πρόβλημα έχει αναχθεί σε μια ολοκλήρωση, όμως το αποτέλεσμα δεν εκφράζεται συναρτήσει στοιχειωδών συναρτήσεων. Βεβαίως το πρόβλημα μπορεί να λυθεί αριθμητικά, δεδομένων των αρχικών συνθηκών.

Απλούστερος, είναι ο υπολογισμός της περιόδου T της ταλάντωσης, η οποία, λόγω συμμετρίας, ισούται με το τετραπλάσιο του χρόνου που θα χρειαστεί το εκκρεμές για να πάει από το $\theta = 0$ στο $\theta = \theta_{max}$ (στην τροχιά αυτή η ταχύτητα είναι πάντα θετική και έτσι διαλέγουμε $\dot{\theta} > 0$)

$$\begin{aligned} T &= 4 \sqrt{\frac{\ell}{2g}} \int_0^{\theta_{max}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_{max}}} = \\ &= 4 \sqrt{\frac{\ell}{2g}} \int_0^{\theta_{max}} \frac{d\theta}{\sqrt{2} \sqrt{\sin^2(\theta_{max}/2) - \sin^2(\theta/2)}} = \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$= 4 \sqrt{\frac{\ell}{2g}} \int_0^{\theta_{max}} \frac{d\theta}{\sqrt{2} \sqrt{k^2 - \sin^2(\theta/2)}} \quad (4.19)$$

όπου κάναμε χρήση της ταυτότητας $\cos \theta = 1 - 2 \sin^2(\theta/2)$ και εισάγαμε

$$k = \sin(\theta_{max}/2) \quad (4.20)$$

Εισάγοντας τη νέα μεταβλητή ϕ η οποία ορίζεται ως

$$\sin(\theta/2) = k \sin \phi$$

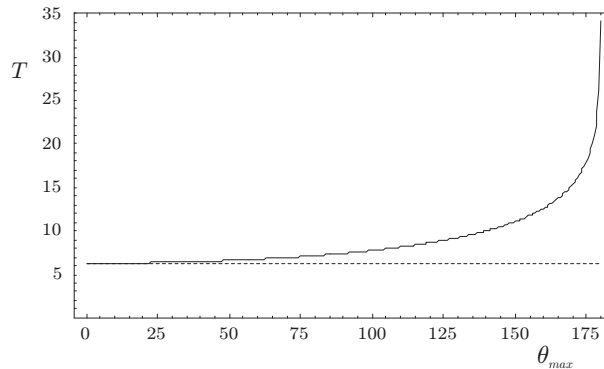
και

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cos(\theta/2) d\theta &= k \cos \phi d\phi \Rightarrow \\ d\theta &= \frac{2k \cos \phi d\phi}{\cos(\theta/2)} \\ &= \frac{2k \cos \phi d\phi}{\sqrt{1 - 2\sin^2(\theta/2)}} = \frac{2k \cos \phi d\phi}{\sqrt{1 - 2k^2 \sin^2 \phi}} \end{aligned}$$

η περίοδος εκφράζεται ως

$$\begin{aligned} T &= 4\sqrt{\frac{\ell}{2g}} \int_0^{\pi/2} \frac{2k \cos \phi d\phi}{\sqrt{1 - 2k \sin \phi}} \times \frac{1}{\sqrt{2k^2 (1 - \sin^2 \phi)}} \\ &= 4\sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Το ολοκλήρωμα της τελευταίας σχέσης είναι ελλειπτικό ολοκλήρωμα πρώτου είδους. Μπορούμε να το υπολογίσουμε αριθμητικά για διάφορες γωνίες (θ_{max}). Τα αποτελέσματα του αριθμητικού υπολογισμού της περιόδου για διάφορες τιμές της γωνίας θ_{max} παρουσιάζονται στο Σχήμα 4.3. Εάν επιθυμούμε μια



Σχήμα 4.3: Η περίοδος του απλού εκκρεμούς συναρτήσει της μέγιστης γωνίας θ_{max} (σε μοίρες). Εδώ έχουμε θέσει $g = \ell = 1$. Με τη διακεκομμένη γραμμή σημειώνεται η προσεγγιστική (σταθερή) τιμή της περιόδου.

προσεγγιστική έκφραση από την (4.21) μπορούμε να αναπτύξουμε κατά Taylor γύρω από το σημείο $k = 0$

$$(1 - k^2 \sin^2 \phi)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} k^2 \sin^2 \phi + \frac{3}{8} k^4 \sin^4 \phi + \dots \quad (4.22)$$

και αντικαθιστώντας στην (4.21) παίρνουμε

$$\begin{aligned}
 T &= 4\sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\pi/2} d\phi \left(1 - \frac{1}{2} k^2 \sin^2 \phi + \frac{3}{8} k^4 \sin^4 \phi + \dots \right) \\
 &= 4\sqrt{\frac{\ell}{g}} \left(\frac{\pi}{2} + k^2 \frac{\pi}{8} + k^4 \frac{9\pi}{128} + \dots \right) \\
 &= 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \left(1 + \frac{k^2}{4} + \frac{9k^4}{64} + \dots \right) \tag{4.23}
 \end{aligned}$$

όπου κάναμε χρήση της (A'.35). Ο πρώτος όρος δίνει το συνήθη τύπο για την περίοδο του απλού εκκρεμούς (που ισχύει μόνο για μικρές γωνίες ταλάντωσης). Το k σχετίζεται με τη μέγιστη γωνία σύμφωνα με την (4.20).

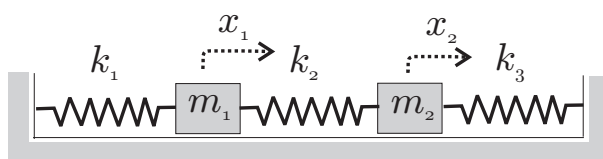
4.4 Συζευγμένες ταλαντώσεις

Πολύ ενδιαφέρουσα από φυσικής και μαθηματικής σκοπιάς είναι η μελέτη συστημάτων συζευγμένων ταλαντωτών. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελούν σειρές μαζών συνδεδεμένες με ελατήρια. Οι εξισώσεις κίνησης των συστημάτων αυτών ανάγονται σε συστήματα ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι λύσεις στις οποίες όλες οι συνιστώσες του συστήματος κινούνται με την ίδια συχνότητα, οι οποίες ονομάζονται *κανονικοί τρόποι ταλάντωσης*.

4.4.1 Πρόβλημα 1: Δύο μάζες τρία ελατήρια

Θεωρούμε το σύστημα του Σχήματος 4.4 όπου δύο μάζες $m_1 = m_2 = m$ συνδέονται με τρία ιδανικά ελατήρια σταθερών σύζευξης $k_1 = k_2 = k_3 = k$. Τα δύο ακραία ελατήρια στερεώνονται στον τοίχο. Το σύστημα τίθεται σε ταλάντωση και μας ζητείται να προσδιοριστεί η κίνηση της κάθε μάζας συναρτήσει του χρόνου.

Θεωρούμε ότι η μάζα m_1 μετατοπίζεται κατά x_1 από τη θέση ισορροπίας και



Σχήμα 4.4: Δύο μάζες m_1, m_2 συνδέονται με ελατήρια σταθερών k_1, k_2, k_3 . Με x_1, x_2 συμβολίζουμε τις μετατοπίσεις των μαζών από τη θέση ισορροπίας.

η μάζα m_2 κατά x_2 . Εφαρμόζοντας το 2ο νόμο του Νεύτωνα, βρίσκουμε τις εξισώσεις κίνησης της κάθε μάζας

$$(m_1) : m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - k_2 (x_1 - x_2) \quad (4.24)$$

$$(m_2) : m_2 \ddot{x}_2 = -k_3 x_2 + k_2 (x_1 - x_2) \quad (4.25)$$

Αντικαθιστώντας τα δεδομένα του προβλήματος ($k_1 = k_2 = k, m_1 = m_2 = m$) το σύστημα παίρνει τη μορφή

$$\ddot{x}_1 = -2\omega_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_2 \quad (4.26)$$

$$\ddot{x}_2 = \omega_0^2 x_1 - 2\omega_0^2 x_2 \quad (4.27)$$

με $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

Υπάρχουν δύο μέθοδοι επίλυσης του παραπάνω συστήματος:

α) Προσπάθεια αποσύζευξης των εξισώσεων με απλούς αλγεβρικούς χειρισμούς. Η μέθοδος αυτή έχει το πλεονέκτημα της απλότητας αλλά μπορεί να εφαρμοστεί μόνο σε ειδικές περιπτώσεις όπως αυτή εδώ. Παρατηρούμε ότι το

άθροισμα και η διαφορά των (4.26), (4.27) δίνουν

$$\frac{d^2}{dx^2}(x_1 + x_2) = -\omega_0^2(x_1 + x_2) \quad (4.28)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(x_1 - x_2) = -3\omega_0^2(x_1 - x_2) \quad (4.29)$$

οι οποίες εισάγοντας τις νέες μεταβλητές

$$x_+ = x_1 + x_2, \quad x_- = x_1 - x_2 \quad (4.30)$$

γράφονται ως

$$\ddot{x}_+ = -\omega_0^2 x_+ \quad (4.31)$$

$$\ddot{x}_- = -3\omega_0^2 x_- \quad (4.32)$$

οι οποίες είναι πλέον ανεξάρτητες γραμμικές διαφορικές με λύση

$$x_+ = C_+ \cos(\omega_0 t + \phi_+) \quad (4.33)$$

$$x_- = C_- \cos(\sqrt{3}\omega_0 t + \phi_-) \quad (4.34)$$

όπου C_+, C_-, ϕ_+, ϕ_- αυθαίρετες σταθερές. Επαναφέροντας τις αρχικές μεταβλητές από την (4.30) παίρνουμε τη γενική λύση του προβλήματος

$$x_1 = \frac{x_+ + x_-}{2} = C_+ \cos(\omega_0 t + \phi_+) + C_- \cos(\sqrt{3}\omega_0 t + \phi_-) \quad (4.35)$$

$$x_2 = \frac{x_+ - x_-}{2} = C_+ \cos(\omega_0 t - \phi_+) - C_- \cos(\sqrt{3}\omega_0 t + \phi_-) \quad (4.36)$$

όπου απορροφήσαμε έναν παράγοντα 2 στις αυθαίρετες σταθερές. Αν μας δωθούν αρχικές συνθήκες όπως για παράδειγμα η θέση και η ταχύτητα των μαζών για μια δεδομένη χρονική στιγμή προσδιορίζουμε τις σταθερές C_+, C_- και ϕ_+, ϕ_- .

Παρατηρούμε ότι υπάρχουν ειδικές λύσεις πχ $C_+ = 0$ ή $C_- = 0$ για τις οποίες και οι δύο μάζες κινούνται με την ίδια συχνότητα. Αυτές οι λύσεις ονομάζονται *κανονικοί τρόποι ταλάντωσης* και είναι

$$\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad x_1 = x_2 = C_+ \cos(\omega_0 t + \phi_+) \quad (4.37)$$

$$\omega = \sqrt{3}\omega_0 = \sqrt{\frac{3k}{m}}, \quad x_1 = -x_2 = C_- \cos(\sqrt{3}\omega_0 t + \phi_-) \quad (4.38)$$

Στον πρώτο κανονικό τρόπο ταλάντωσης με γωνιακή συχνότητα $\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ οι δύο μάζες εκτελούν αρμονική ταλάντωση με ίσα πλάτη ενώ στο δεύτερο με γωνιακή συχνότητα $\omega = \sqrt{3}\omega_0 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$ οι δύο μάζες δύο μάζες εκτελούν αρμονική ταλάντωση με αντίθετα πλάτη.

β) Η δεύτερη μέθοδος επίλυσης βασίζεται στην αναγωγή του συστήματος των συζευγμένων διαφορικών σε πρόβλημα ιδιοτιμών. Έχει το πλεονέκτημα ότι μπορεί να εφαρμοστεί σε όλες τις περιπτώσεις συζευγμένων γραμμικών διαφορικών. Το σύστημα (4.26), (4.27) γράφεται σε μορφή πίνακα ως

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\omega_0^2 & \omega_0^2 \\ \omega_0^2 & -2\omega_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (4.39)$$

ή σε συμπαγή μορφή

$$\ddot{X} = \Omega X \quad (4.40)$$

με

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

και

$$\Omega = \begin{pmatrix} -2\omega_0^2 & \omega_0^2 \\ \omega_0^2 & -2\omega_0^2 \end{pmatrix} \quad (4.42)$$

Αντικαθιστώντας τη δοκιμαστική λύση

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} e^{\rho t} \quad (4.43)$$

η (4.39) γράφεται

$$\rho^2 \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} e^{\rho t} = \begin{pmatrix} -2\omega_0^2 & \omega_0^2 \\ \omega_0^2 & -2\omega_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} e^{\rho t} \quad (4.44)$$

Η οποία ανάγεται στο πρόβλημα ιδιοτιμών

$$\begin{pmatrix} -2\omega_0^2 - \rho^2 & \omega_0^2 \\ \omega_0^2 & -2\omega_0^2 - \rho^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

το οποίο έχει λύσεις όταν

$$\det \begin{vmatrix} -2\omega_0^2 - \rho^2 & \omega_0^2 \\ \omega_0^2 & -2\omega_0^2 - \rho^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \quad (4.46)$$

$$(2\omega_0^2 + \rho^2)^2 - \omega_0^4 = 0 \Rightarrow \rho^4 - 4\rho^2\omega_0^2 - 3\omega_0^4 = 0 \quad (4.47)$$

Οι ρίζες της τελευταίας εξίσωσης είναι

$$\rho^2 = -\omega_0^2 \Rightarrow \rho = +i\omega_0, -i\omega_0 \quad (4.48)$$

$$\rho^2 = -3\omega_0^2 \Rightarrow \rho = +i\sqrt{3}\omega_0, -i\sqrt{3}\omega_0 \quad (4.49)$$

Αντικαθιστώντας τις λύσεις στην 4.45 παίρνουμε

$$(i) \rho^2 = -\omega_0^2$$

$$\begin{pmatrix} -\omega_0^2 & \omega_0^2 \\ \omega_0^2 & -\omega_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -\omega_0^2 C_1 + \omega_0^2 C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = C_1 \quad (4.50)$$

$$(ii) \rho^2 = -3\omega_0^2$$

$$\begin{pmatrix} \omega_0^2 & \omega_0^2 \\ \omega_0^2 & \omega_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow +\omega_0^2 C_1 + \omega_0^2 C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -C_1 \quad (4.51)$$

Οι δύο λύσεις λοιπόν είναι:

$$\text{Για } \rho^2 = -\omega^2$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\omega_0 t} + C_1' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i\omega_0 t} \\ &= \begin{pmatrix} C_1 e^{i\omega_0 t} + C_1' e^{-i\omega_0 t} \\ C_1 e^{i\omega_0 t} - C_1' e^{-i\omega_0 t} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.52)$$

$$= \begin{pmatrix} A_1 \cos(\omega_0 t + \phi_1) \\ A_1 \cos(\omega_0 t + \phi_1) \end{pmatrix} \quad (4.53)$$

Ομοίως για $\rho^2 = -3\omega^2$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= D_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{i\sqrt{3}\omega_0 t} + D_1' \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-i\sqrt{3}\omega_0 t} \\ &= \begin{pmatrix} D_1 e^{i\sqrt{3}\omega_0 t} + D_1' e^{-i\sqrt{3}\omega_0 t} \\ D_1 e^{i\sqrt{3}\omega_0 t} - D_1' e^{-i\sqrt{3}\omega_0 t} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.54)$$

$$= \begin{pmatrix} A_2 \cos(\sqrt{3}\omega_0 t + \phi_2) \\ A_2 \cos(\sqrt{3}\omega_0 t + \phi_2) \end{pmatrix} \quad (4.55)$$

Προσδιορίζοντας δηλαδή τα ιδιοδιανύσματα και τις ιδιοτιμές του πίνακα Ω βρήκαμε τις γωνιακές συχνότητες και τα πλάτη των κανονικών τρόπων ταλάντωσης. Η γενική λύση του προβλήματος είναι ο γραμμικός συνδυασμός των δύο κανονικών τρόπων ταλάντωσης

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A_1 \cos(\omega_0 t + \phi_1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + A_2 \cos(\sqrt{3}\omega_0 t + \phi_2) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ή

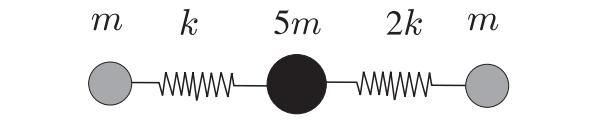
$$x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \phi_1) + A_2 \cos(\sqrt{3}\omega_0 t + \phi_2) \quad (4.56)$$

$$x_2 = A_1 \cos(\omega_0 t + \phi_1) - A_2 \cos(\sqrt{3}\omega_0 t + \phi_2) \quad (4.57)$$

σε συμφωνία με το αποτέλεσμα της μεθόδου (α).

4.4.2 Πρόβλημα 2: Τριατομικό μόριο

Ένα μόριο αποτελείται από τρία άτομα μαζών $m_1 = m_3 = m$ και $m_2 = 5m$. Υποθέστε ότι σε ένα κλασικό ανάλογο το μόριο μπορεί να περιγραφεί με το σύστημα μαζών-ελατηρίων του σχήματος όπου οι σταθερές των ελατηρίων είναι $k_1 = k$ και $k_2 = 2k$. (i) Να γραφτούν οι εξισώσεις κίνησης των τριών μαζών. (ii) Να προσδιοριστούν οι γωνιακές συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης του συστήματος και να ερμηνευθούν φυσικά τυχόν ειδικές τιμές.



Σχήμα 4.5: Μηχανικό ανάλογο τριατομικού μορίου αποτελούμενο τρεις μάζες $m_1 = m_3 = m, m_2 = 5m$ και δύο ιδανικά ελατήρια σταθερών $k_1 = k, k_2 = 2k$.

Θεωρούμε ότι οι τρεις μάζες $m_1 = m, m_2 = M, m_3 = m$ μετατοπίζονται προς τα δεξιά κατά διαστήματα x_1, x_2 και x_3 αντίστοιχα. Εφαρμόζοντας το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για κάθε μάζα βρίσκουμε τις εξισώσεις κίνησης

$$\begin{aligned} m \ddot{x}_1 &= -k x_1 + k x_2 \\ 5m \ddot{x}_2 &= k x_1 - k x_2 - 2k x_2 + 2k x_3 \\ m \ddot{x}_3 &= 2k x_2 - 2k x_3 \end{aligned}$$

Διαιρώντας με τις μάζες

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -\omega_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_2 \\ \ddot{x}_2 &= \frac{1}{5} \omega_0^2 x_1 - \frac{3}{5} \omega_0^2 x_2 + \frac{2}{5} \omega_0^2 x_3 \\ \ddot{x}_3 &= 2\omega_0^2 x_2 - 2\omega_0^2 x_3 \end{aligned}$$

όπου εισάγαμε $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

Σε μορφή πίνακα και θέτοντας $\omega_0 = 1$ οι εξισώσεις κίνησης γράφονται

$$\frac{d}{dt^2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (4.58)$$

Αντικαθιστώντας στην (4.58) τη δοκιμαστική λύση

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} e^{\rho t}$$

καταλήγουμε στο πρόβλημα ιδιοτιμών

$$\begin{pmatrix} -1 - \rho^2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} - \rho^2 & \frac{2}{5} \\ 0 & 2 & -2 - \rho^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = 0$$

Το οποίο έχει λύσεις όταν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο μηδενίζεται

$$-\frac{14\rho^2}{5} - \frac{18\rho^4}{5} - \rho^6 = 0 \Rightarrow \rho^2(14 + 18\rho^2 + 5\rho^4) = 0 \Rightarrow \quad (4.59)$$

$$\rho^2 = 0, \quad -\frac{9 + \sqrt{11}}{5}, \quad -\frac{9 - \sqrt{11}}{5}$$

Αποκαθιστώντας τις διαστάσεις βρίσκουμε τις συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης του συστήματος ($\omega = \sqrt{-\rho^2}$)

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{(9 + \sqrt{11})k}{5m}}, \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{(9 - \sqrt{11})k}{5m}}$$

Η μηδενική συχνότητα (μηδενικός τρόπος ταλάντωσης) αντιστοιχεί στη δυνατότητα του συστήματος να εκτελεί μεταφορική κίνηση χωρίς να ταλαντώνεται.

4.4.3 Πρόβλημα 3: Ελατήρια σε κύκλο

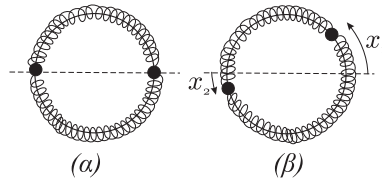
Δυο ιδανικά ελατήρια σταθεράς k είναι περασμένα σε στεφάνι και συνδέονται με δύο δακτυλίδια μάζας $m_1 = m_2 = m$ έκαστο τα οποία είναι επίσης περασμένα στο στεφάνι όπως στο Σχήμα 4.6α. Οι τριβές θεωρούνται αμελητέες.

- (α'). Να βρεθούν οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης του συστήματος.
- (β'). Σε χρόνο $t = 0$ η μάζες μετατοπίζονται από τη θέση ισορροπίας όπως στο Σχήμα 1β κατά $x_1(0) = 2m$, $x_2(0) = 1m$ και αφήνονται ελεύθερες. Να υπολογιστεί συναρτήσει του χρόνου η θέση και η ταχύτητα της κάθε μάζας. Να γίνει πρόχειρη γραφική παράσταση των παραπάνω μεγεθών (μια για τις θέσεις των δύο σωμάτων και μια για τις ταχύτητες).
- (γ'). Στο προηγούμενο ερώτημα εξετάστε αν υπάρχει χρονική στιγμή για την οποία κάποια από τις δύο μάζες περνάει από τα αρχικό σημείο ισορροπίας της $x_1 = 0$, $x_2 = 0$.

(α) Έστω ότι μετατοπίζεται η πρώτη μάζα κατά μήκος x_1 και η δεύτερη κατά μήκος x_2 από τη θέση ισορροπίας (τα οποία μετρώνται κατά φορά αντίθετη των δεικτών του ωρολογίου). Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα για τις δύο μάζες γράφεται

$$m \ddot{x}_1 = -2k(x_1 - x_2) \quad (4.60)$$

$$m \ddot{x}_2 = -2k(x_2 - x_1) \quad (4.61)$$



Σχήμα 4.6: Δύο ιδανικά ελατήρια σταθερών $k_1 = k_2 = k$ περασμένα σε στεφάνι συνδέονται με δακτυλίδια μαζών $m_1 = m_2 = m$.

Το παραπάνω σύστημα διαφορικών μπορεί να επιλυθεί ως εξής: Προσθέτοντας κατά μέλη τις (4.60), (4.61) παίρνουμε

$$\begin{aligned} m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) &= 0 \\ \Rightarrow \frac{d^2}{dt^2}(x_1 + x_2) &= 0 \\ \Rightarrow x_1 + x_2 &= At + B \end{aligned} \quad (4.62)$$

Ομοίως αφαιρώντας τις (4.60), (4.61) παίρνουμε

$$\begin{aligned} m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) &= -4k(x_1 - x_2) \\ \Rightarrow \frac{d^2}{dt^2}(x_1 - x_2) &= -\left(\frac{2k}{m}\right)^2(x_1 - x_2) \\ \Rightarrow x_1 - x_2 &= C \cos(\omega t + \phi) \end{aligned} \quad (4.63)$$

όπου $\omega = 2k/m$. Επιλύοντας το σύστημα (4.62),(4.63) ως προς x_1, x_2 παίρνουμε

$$x_1 = At + B + C \cos(\omega t + \phi) \quad (4.64)$$

$$x_2 = At + B - C \cos(\omega t + \phi) \quad (4.65)$$

όπου απορροφήσαμε έναν παράγοντα $1/2$ στις αυθαίρετες σταθερές A, B, C . Οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης είναι οι

$$x_+ = At + B, \quad \omega = 0 \quad (4.66)$$

$$x_- = C \cos(\omega t + \phi), \quad \omega = \frac{2k}{m} \quad (4.67)$$

Ο πρώτος αντιστοιχεί σε ολίσθηση του συστήματος πάνω στο στεφάνι χωρίς ταλάντωση και χωρίς να μεταβάλλεται η απόσταση των δύο μαζών.

(β) Οι αρχικές συνθήκες είναι

$$x_1(0) = 2, \quad x_2(0) = 1, \quad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0 \quad (4.68)$$

Χρησιμοποιώντας την γενική λύση (4.64),(4.65) οι συνθήκες για μηδενισμό των ταχυτήτων σε χρόνο $t = 0$ συνεπάγονται

$$\dot{x}_1(0) = A - C\omega \sin \phi = 0 \quad (4.69)$$

$$\dot{x}_2(0) = A + C\omega \sin \phi = 0 \quad (4.70)$$

και άρα

$$A = \phi = 0$$

Έπειτα οι συνθήκες για τις θέσεις συνεπάγονται

$$x_1(0) = B + C = 2 \quad (4.71)$$

$$x_2(0) = B - C = 1 \quad (4.72)$$

και άρα

$$B = \frac{3}{2}, C = \frac{1}{2}$$

Η γενική λύση λοιπόν είναι για τις θέσεις (σε m)

$$x_1(t) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\omega t) \quad (4.73)$$

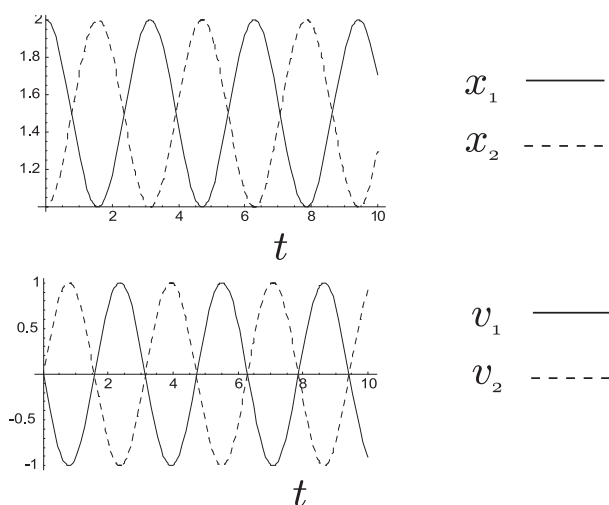
$$x_2(t) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\omega t) \quad (4.74)$$

και για τις ταχύτητες (σε m/sec)

$$v_1(t) = \dot{x}_1(t) = -\sin(2\omega t) \quad (4.75)$$

$$v_2(t) = \dot{x}_2(t) = \sin(2\omega t) \quad (4.76)$$

Οι γραφικές παραστάσεις δίνονται στο Σχήμα 4.7.



Σχήμα 4.7: Γραφικές παραστάσεις των θέσεων και ταχυτήτων των δύο μαζών για $x_1 = 2m$, $x_2 = 1m$, $k = 1Nt/m$, $m = 1Kgr$.

(γ) Παρατηρούμε ότι επειδή το συνημίτονο παίρνει τιμές από -1 έως $+1$ δεν είναι δυνατόν να περάσει καμία μάζα από το αρχικό σημείο ισορροπίας της $x_1 = 0$ ή $x_2 = 0$. Για την ακρίβεια υπάρχουν άπειρα σημεία ισορροπίας και αυτό εκφράζει η ύπαρξη του τρόπου ταλάντωσης μηδενικής συχνότητας. Στην συγκεκριμένη περίπτωση τα δακτυλίδια ταλαντώνονται γύρω από τα σημεία $x_1 = 3/2$ και $x_2 = 3/2$.

Κεφάλαιο 5

ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ ΚΑΙ ΟΡΜΗΣ

5.1 Εισαγωγή

Οι διατηρούμενες ποσότητες παίζουν πολύ σημαντικό ρόλο στην Φυσική. Στα πλαίσια της Κλασικής Μηχανικής θα μελετήσουμε σε αυτό το κεφάλαιο τους δύο πιο σημαντικούς νόμους διατήρησης: Την διατήρηση της ορμής και την διατήρηση της ενέργειας. Θα διαπιστώσουμε ότι αυτοί οι νόμοι διατήρησης είναι απόρροια των νόμων του Νεύτωνα. Θα δούμε επίσης την χρησιμότητά τους στην εύκολη και γρήγορη επίλυση προβλημάτων Κλασικής Μηχανικής.

5.2 Διατήρηση ενέργειας στην μία διάσταση

Θεωρούμε ένα σώμα μάζας m το οποίο κινείται κατά μήκος του άξονα των x υπό την επίδραση δύναμης η οποία εξαρτάται μόνο από την θέση $F = F(x)$. Χρησιμοποιώντας την αλλαγή μεταβλητής (3.49) ο δεύτερος νόμος παίρνει την μορφή

$$m v \frac{dv}{dx} = F(x) \quad (5.1)$$

Υποθέτουμε τώρα ότι το σώμα μετακινείται από τη θέση x_0 στην θέση x . Χωρίζοντας τις μεταβλητές και ολοκληρώνοντας η σχέση (5.1) μπορεί να γραφτεί στην μορφή

$$m \int v dv = E + \int_{x_0}^x dx' F(x') \quad (5.2)$$

όπου E μια σταθερά ολοκλήρωσης. Πραγματοποιώντας την ολοκλήρωση στο πρώτο μέρος και εισάγοντας την συνάρτηση

$$V(x) = - \int_{x_0}^x dx' F(x') \quad (5.3)$$

η εξίσωση (5.2) παίρνει την μορφή

$$\frac{1}{2} m v^2 + V(x) = E \quad (5.4)$$

που είναι γνωστή ως *διατήρηση της ενέργειας*. Ο πρώτος όρος ονομάζεται *Κινητική Ενέργεια* ο δεύτερος *Δυναμική Ενέργεια* ή *Δυναμικό* και η σταθερά E ονομάζεται *Συνολική Ενέργεια* του σώματος. Το E όπως και το V εξαρτώνται βέβαια από την αρχική θέση x_0 , και για αυτό μόνο οι διαφορές ενεργειών και δυναμικού έχουν φυσικό νόημα καθώς αυτές δεν εξαρτώνται από το x_0 . Μπορούμε δηλαδή να διαλέξουμε το x_0 όπως επιθυμούμε και αυτή την ελευθερία θα την χρησιμοποιήσουμε συχνά στην επίλυση προβλημάτων. Εξετάζουμε την κίνηση του σωματιδίου από τη θέση x_0 στη θέση x_1 ανεξάρτητα από τη στη θέση x_0 στη θέση x_2 η διατήρηση της ενέργειας (5.4) δίνει

$$\frac{1}{2} m v(x_2)^2 + V(x_2) = E \quad (5.5)$$

$$\frac{1}{2} m v(x_1)^2 + V(x_1) = E \quad (5.6)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις δύο τελευταίες εξισώσεις παίρνουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m v(x_2)^2 - \frac{1}{2} m v(x_1)^2 &= V(x_1) - V(x_2) \\ &= \int_{x_0}^{x_2} dx' F(x') - \int_{x_0}^{x_1} dx' F(x') \\ &= \int_{x_1}^{x_2} dx' F(x') \end{aligned} \quad (5.7)$$

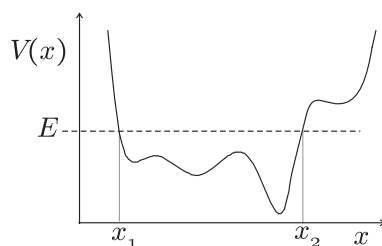
Ορίζοντας το αριστερό μέρος να είναι το έργο,

$$W = \int_{x_1}^{x_2} dx' F(x') \quad (5.8)$$

έχουμε αποδείξει το *Θεώρημα Έργου-Ενέργειας*:

Η μεταβολή στην κινητική ενέργεια ενός σωματιδίου το οποίο κινείται από το σημείο x_1 στο σημείο x_2 ισούται με το έργο το οποίο παρήγαγε η δύναμη που ενήργησε επάνω του στο ίδιο διάστημα.

Το δυναμικό είναι χρήσιμη έννοια καθώς μας προσφέρει μια εποπτική εικόνα της κίνησης ενός σωματιδίου ακόμη και σε περιπτώσεις που η δύναμη που ενεργεί σε αυτό είναι πολύπλοκη. Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα ένα σωματίδιο συνολικής ενέργειας E στο δυναμικό του Σχήματος 5.1. Τα σημεία



Σχήμα 5.1: Σωματίδιο ολικής ενέργειας E σε δυναμικό $V(x)$. Το σωματίδιο βρίσκεται εγκλωβισμένο στην περιοχή $x_1 \leq x \leq x_2$.

όπου $V(x) = E$ έχουμε $v = 0$ όπως εύκολα συμπεραίνουμε από την (5.4), είναι δηλαδή σημεία αναστροφής της ταχύτητας. Το σωματίδιο λοιπόν βρίσκεται εγκλωβισμένο στην περιοχή $x_1 \leq x \leq x_2$.

Ο ορισμός (5.3) συνεπάγεται

$$F(x) = -\frac{dV(x)}{dx} \quad (5.9)$$

Δεδομένου λοιπόν ενός δυναμικού μπορούμε πάντα να υπολογίζουμε την δύναμη. Το αντίστροφο πρόβλημα δεν είναι πάντα επιλύσιμο αναλυτικά καθώς η αναλυτική ολοκλήρωση (5.3) μπορεί να μην είναι δυνατή. Το δυναμικό εξαρτάται μόνο από το αρχικό και το τελικό σημείο της τροχιάς και όχι από τον τρόπο με τον οποίο το σωματίδιο κινήθηκε από το ένα στο άλλο σημείο (αν για παράδειγμα πήγε πιο γρήγορα ή πιο αργά). Είναι προφανές ότι αυτό ισχύει όσο η δύναμη στην (5.3) είναι συνάρτηση μόνο της θέσης. Μια τέτοια δύναμη ονομάζεται *διατηρητική* ή *συντηρητική*¹. Όπως θα δούμε αργότερα σε περισσότερες από μια διαστάσεις δεν αρκεί η δύναμη να είναι συνάρτηση μόνο της θέσης για να έχουμε διατηρητικό πεδίο αλλά χρειάζεται και μια πρόσθετη συνθήκη.

5.2.1 Πρόβλημα 1: Η ενέργεια απλού αρμονικού ταλαντωτή

|| Να προσδιοριστεί η κινητική και δυναμική ενέργεια του απλού αρμονικού ταλαντωτή συναρτήσει του χρόνου. Ναδειχθεί ότι το άθροισμά τους διατηρείται. ||

Η δύναμη στον απλό αρμονικό ταλαντωτή είναι $F = -kx$ όπου x η απόσταση από τη θέση ισορροπίας. Κατά συνέπεια

$$V(x) = -k \int_0^x dx' x' = -\frac{1}{2}kx^2 \quad (5.10)$$

¹Από μετάφραση του αγγλικού όρου conservative force καθώς αυτή η δύναμη διατηρεί την ενέργεια conserves energy.

όπου θεωρήσαμε το αρχικό σημείο να είναι η θέση ισορροπίας $x_0 = 0$. Η γενική λύση της εξίσωσης κίνησης του αρμονικού ταλαντωτή ($\ddot{x} = -kx$) είναι $x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$ όπου $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Η ταχύτητα είναι $v(t) = \dot{x}(t) = A\omega \cos(\omega t + \phi)$. Η κινητική λοιπόν και δυναμική ενέργεια συναρτήσει του χρόνου δίνονται από

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \phi) \quad (5.11)$$

$$V = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega t + \phi) \quad (5.12)$$

Η συνολική ενέργεια είναι

$$E = E_k + V = \frac{k}{2} A^2 (\cos^2(\omega t + \phi) + \sin^2(\omega t + \phi)) = \frac{k A^2}{2} \quad (5.13)$$

και προφανώς δεν εξαρτάται από το χρόνο άρα διατηρείται.

5.2.2 Πρόβλημα 2: Δυναμικό βαρύτητας κοντά στην επιφάνεια της γης

|| Να προσδιοριστεί το δυναμικό της βαρύτητας της γης σε περιοχές κοντά ||
|| στην επιφάνειά της. ||

Έστω ένα σώμα μάζας m σε ύψος y πάνω από την επιφάνεια της γης. Η δύναμη που ασκεί η γη στο σώμα δίνεται από τον νόμο της παγκόσμιας έλξης

$$F = -\frac{G M m}{(R + y)^2} \quad (5.14)$$

όπου M η μάζα της γης, R η ακτίνα της γης και G η σταθερά του Νεύτωνα. Το δυναμικό θα δίνεται από

$$V(y) = \int_0^y dy' \frac{G M m}{(R + y')^2} = G M m \left[-\frac{1}{R + y'} \right]_0^y \quad (5.15)$$

όπου θεωρήσαμε ως σημείο αναφοράς την επιφάνεια της γης ($y = 0$). Συνεχίζοντας τις πράξεις και θεωρώντας $y/R \ll 1$ έχουμε

$$\begin{aligned} V(y) &= -G M m \left(\frac{1}{R + y} - \frac{1}{R} \right) = -G M m \frac{1}{R} \left(\left(1 + \frac{y}{R}\right)^{-1} - 1 \right) \\ &= -G M m \frac{1}{R} \left(1 - \frac{y}{R} - 1 \right) + \dots = \frac{G M}{R^2} m y \\ &= m g y \end{aligned} \quad (5.16)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το ανάπτυγμα Taylor (Α'.40) και τον ορισμό της επιτάχυνσης της βαρύτητας $g = G M/R^2$.

5.2.3 Πρόβλημα 3: Ταχύτητα πρόσκρουσης

Σώμα εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω από ύψος h με αρχική ταχύτητα v_0 . Να βρεθεί η ταχύτητα v_f με την οποία θα πέσει στο έδαφος. Ποια θα είναι η τιμή της v_f αν εκτοξευθεί προς τα κάτω με την ίδια αρχική ταχύτητα;

Εφαρμόζοντας της διατήρηση της ενέργειας κατά την στιγμή της εκτόξευσης και τη στιγμή της πρόσκρουσης στο έδαφος έχουμε

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + m g h = \frac{1}{2} m v_f^2 \quad (5.17)$$

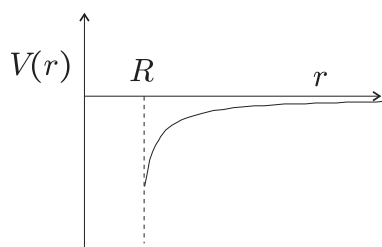
Επιλύοντας ως προς v_f βρίσκουμε

$$v_f = \sqrt{v_0^2 + 2 g h} \quad (5.18)$$

όπου θεωρήσαμε ότι το σημείο αναφοράς (μηδέν) της δυναμικής ενέργειας είναι το έδαφος. Ο νόμος διατήρησης (5.17) δεν εξαρτάται από την φορά της ταχύτητας και κατά συνέπεια η τελική ταχύτητα είναι και στις δύο περιπτώσεις η ίδια.

5.2.4 Πρόβλημα 4: Ταχύτητα διαφυγής

Με ποια ταχύτητα πρέπει να εκτοξευθεί ένα σώμα μάζας m από την επιφάνεια της γης έτσι ώστε να διαφύγει από το βαρυτικό πεδίο της γης; Η δύναμη που ασκείται στο σώμα είναι η παγκόσμια έλξη



Σχήμα 5.2: Γραφική αναπαράσταση του βαρυτικού δυναμικού της γης.

$$F = -\frac{G M m}{r^2} \quad (5.19)$$

Το αντίστοιχο δυναμικό δίνεται από

$$V(r) = \int_{r_0}^r \frac{dr'}{r'^2} = G M m \left[-\frac{1}{r'} \right]_{r_0}^r = G M m \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right) \quad (5.20)$$

Διαλέγουμε το σημείο αναφοράς $r_0 = +\infty$ έτσι ώστε η συνεισφορά του αντίστοιχου όρου στο δυναμικό να μηδενίζεται και η τελευταία εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$V(r) = -\frac{G M m}{r} \quad (5.21)$$

Μια γραφική αναπαράσταση του δυναμικού παρουσιάζεται στο Σχήμα 5.2. Το σώμα εκτοξεύεται από την επιφάνεια της γης $r = R$ με ταχύτητα v και για να διαφύγει πρέπει να φτάσει μέχρι το άπειρο τουλάχιστον με μηδενική ταχύτητα. Εφαρμόζοντας τη διατήρηση της ενέργειας

$$\frac{1}{2} m v^2 + V(R) = 0 + V(\infty) \Rightarrow \frac{1}{2} m v^2 - \frac{G M m}{R} = 0 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2G M}{R}} \quad (5.22)$$

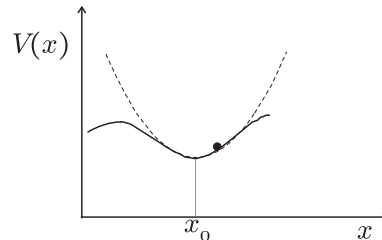
και αντικαθιστώντας την σταθερά $g = G M/R^2$

$$v = \sqrt{2 g R} \quad (5.23)$$

Η αριθμητική τιμή για τη γη είναι $v = 11.3 \text{ Km/s}$.

5.3 Μικρές Ταλαντώσεις

Θεωρούμε ένα σώμα το οποίο ισορροπεί στο τοπικό ελάχιστο ενός δυναμικού, για παράδειγμα στο δεύτερο τοπικό ελάχιστο x_0 του δυναμικού του Σχήματος 5.1. Το σώμα μετακινείται ελαφρώς από τη θέση ισορροπίας και ύστερα αφήνεται ελεύθερο. Προφανώς το σώμα θα αρχίσει να εκτελεί μικρές ταλαντώσεις γύρω από το σημείο x_0 . Αναπτύσσοντας το δυναμικό σε σειρά Taylor γύρω



Σχήμα 5.3: Λεπτομέρεια του δυναμικού του Σχήματος 5.1 στην περιοχή του σημείου x_0 . Με διακεκομμένη γραμμή η προσέγγιση $\frac{V'(x_0)}{2}(x - x_0)^2$.

από το ελάχιστο έχουμε ²

$$V(x) = V(x_0) + \frac{1}{2} V''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots \quad (5.24)$$

όπου λάβαμε υπόψιν το μηδενισμό της πρώτης παραγώγου στο ελάχιστο $V'(x_0) = 0$. Η δύναμη που ασκείται στο σώμα είναι σύμφωνα με την (5.9)

$$F(x) = -\frac{dV}{dx} = -V''(x_0)(x - x_0) \quad (5.25)$$

²Εδώ χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $V'(x) = \frac{dV}{dx}$.

όπου $x - x_0$ η μετατόπιση από τη θέση ισορροπίας. Συγκρίνοντας με την δύναμη στον αρμονικό ταλαντωτή συμπεραίνουμε ότι η γωνιακή συχνότητα ταλάντωσης είναι

$$\omega = \sqrt{\frac{V''(x_0)}{m}} \quad (5.26)$$

5.3.1 Πρόβλημα 1: Διατομικό μόριο

Η δυναμική ενέργεια που αντιστοιχεί στην δύναμη μεταξύ δύο ατόμων σε ένα διατομικό μόριο εκφράζεται προσεγγιστικά από την συνάρτηση

$$U(r) = U_0 \left[\left(\frac{R_0}{r} \right)^{12} - 2 \left(\frac{R_0}{r} \right)^6 \right] \quad (5.27)$$

όπου r η απόσταση μεταξύ των ατόμων. Να βρεθεί η δύναμη μεταξύ των δύο ατόμων. Να βρεθεί το σημείο ισορροπίας και να υπολογιστεί η συχνότητα ταλαντώσεων των ατόμων αν το μόριο έχει ανηγμένη μάζα m . Να υπολογιστεί η ενέργεια διάσπασης του μορίου.

Η δύναμη μεταξύ των ατόμων δίνεται από

$$F = -\frac{dU}{dr} = \frac{12U_0}{R_0} \left[\left(\frac{R_0}{r} \right)^{13} - \left(\frac{R_0}{r} \right)^7 \right] \quad (5.28)$$

Στο σημείο ισορροπίας η δύναμη μηδενίζεται

$$\left(\frac{R_0}{r} \right)^{13} - \left(\frac{R_0}{r} \right)^7 = 0 \Rightarrow r = R_0 \quad (5.29)$$

Στο σημείο αυτό η δεύτερη παράγωγος δίνεται από

$$\frac{d^2U(R_0)}{dr^2} = \frac{12U_0}{R_0^2} (13 - 7) = \frac{72U_0}{R_0^2} > 0 \quad (5.30)$$

και κατά συνέπεια πρόκειται για τοπικό ελάχιστο, και άρα σημείο ισορροπίας. Η συχνότητα των ταλαντώσεων γύρω από το σημείο αυτό δίνεται από την (5.27)

$$\omega = \frac{6}{R_0} \sqrt{\frac{2U_0}{m}} \quad (5.31)$$

Για να διασπαστεί ένα μόριο πρέπει να το φέρουμε από το σημείο ισορροπίας $r = R_0$ στο $r = +\infty$. Η διαφορά δυναμικής ενέργειας είναι η ενέργεια διάσπασης

$$U_e = U(\infty) - U(R_0) = -U_0 \quad (5.32)$$

όπου θέσαμε $U(\infty) = 0$.

5.4 Διατήρηση ενέργειας στις τρεις διαστάσεις

Η διατήρηση της ενέργειας στην περίπτωση που έχουμε κίνηση στις τρεις διαστάσεις αποδεικνύεται επίσης από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα. Εδώ όμως υπάρχει μια μικρή διαφορά στον ορισμό του δυναμικού και αντίστοιχα μιας διατηρητικής δύναμης. Θεωρούμε και πάλι μια δύναμη η οποία εξαρτάται μόνο από τη θέση

$$\begin{aligned}\vec{F}(\vec{r}) = m \vec{a} &\Rightarrow \vec{F}(\vec{r}) = m \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \vec{F}(\vec{r}) \cdot \vec{v} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} \\ &\Rightarrow \vec{F}(\vec{r}) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{m}{2} \frac{d\vec{v}^2}{dt} \Rightarrow \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \frac{m}{2} dv^2\end{aligned}\quad (5.33)$$

όπου $v^2 = |\vec{v}|^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$. Ολοκληρώνοντας την τελευταία σχέση για ένα σύστημα το οποίο μετακινείται από τη θέση \vec{r}_0 στη θέση \vec{r} παίρνουμε

$$\frac{1}{2} m v^2 + V(\vec{r}) = E \quad (5.34)$$

όπου το δυναμικό δίνεται από τη σχέση

$$V(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' \quad (5.35)$$

Στις τρεις όμως διαστάσεις δεν αρκεί η δύναμη να είναι απλώς συνάρτηση της θέσης για να είναι το δυναμικό καλώς ορισμένο (δηλαδή ανεξάρτητο από το δρόμο) αλλά μπορούμε να αποδείξουμε το παρακάτω θεώρημα: *Αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι το δυναμικό καλώς ορισμένο είναι $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$.* Μια δύναμη λοιπόν στις τρεις διαστάσεις ονομάζεται διατηρητική μόνο όταν $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$. Από τον ορισμό του δυναμικού (5.35) η δύναμη σε αυτή την περίπτωση δίνεται από

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V(\vec{r}) \quad (5.36)$$

5.4.1 Πρόβλημα 1: Διατηρητική δύναμη ;

Να εξεταστεί για ποια τιμή της παραμέτρου a η δύναμη

$$\vec{F} = (y + az, ax + z, ax + y)$$

είναι διατηρητική. Να βρεθεί για αυτή την τιμή της παραμέτρου το δυναμικό.

Σύμφωνα με το Παράρτημα (Α'.45) η περιστροφή της \vec{F} δίνεται από

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) &= \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y + az & ax + z & ax + y \end{vmatrix} \\ &= \hat{e}_x(1 - 1) - \hat{e}_y(a - a) + \hat{e}_z(a - 1) \\ &= \hat{e}_z(a - 1)\end{aligned}\quad (5.37)$$

Η δύναμη είναι λοιπόν διατηρητική για $a = 1$. Το δυναμικό δίνεται από

$$\begin{aligned}V(x, y, z) &= - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' \\ &= - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} ((y + z) dx + (x + z) dy + (x + y) dz)\end{aligned}\quad (5.38)$$

όπου, λόγω της ανεξαρτησίας από το δρόμο, η ολοκλήρωση μπορεί να πραγματοποιηθεί πάνω σε οποιαδήποτε καμπύλη ενώνει το \vec{r}_0 με το \vec{r} . Θα μπορούσαμε για παράδειγμα να κινηθούμε στο δρόμο $C = (x_0, y_0, z_0) \rightarrow (x, y_0, z_0) \rightarrow (x, y, z_0) \rightarrow (x, y, z)$. Το δυναμικό δίνεται από

$$\begin{aligned}V(x, y, z) &= (y_0 + z_0) \int_{x_0}^x dx + (x + z_0) \int_{y_0}^y dy + (x + y) \int_{z_0}^z dz \\ &= yz + x(y + z) - y_0 z_0 - x_0(y_0 + z_0)\end{aligned}\quad (5.39)$$

5.4.2 Πρόβλημα 2: Κεντρική Δύναμη

|| Να εξεταστεί αν μια κεντρική δύναμη, δηλαδή μια δύναμη της μορφής $\vec{F} = f(r) \hat{r}$ είναι διατηρητική. ||

Σύμφωνα με το Παράρτημα (Α'.45) η περιστροφή της \vec{F} δίνεται από

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) = \begin{vmatrix} \hat{e}_r & r \hat{e}_\phi & r \sin \phi \hat{e}_\theta \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial \theta} \\ f(r) & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0\quad (5.40)$$

5.4.3 Πρόβλημα 3: Μέγιστο ύψος βολής

|| Χρησιμοποιώντας την διατήρηση της ενέργειας υπολογίστε το μέγιστο ύψος στο οποίο μπορεί να φτάσει το βλήμα ενός κανονίου το οποίο εκτοξεύεται υπό γωνία θ με το οριζόντιο επίπεδο και με αρχική ταχύτητα v_0 . (βλ. Σχήμα 3.7) ||

Θεωρώντας το σημείο αναφοράς της δυναμικής ενέργειας στο έδαφος, η ενέργεια του βλήματος κατά τη στιγμή της εκτόξευσης είναι

$$E_i = \frac{1}{2} m v_0^2\quad (5.41)$$

Το σώμα εκτελεί ομαλή κίνηση κατά τον οριζόντιο άξονα (αφού δεν ασκούνται δυνάμεις κατά την διεύθυνση αυτή) με ταχύτητα $v_0 \cos \theta$. Τη στιγμή κατά την οποία το σώμα βρίσκεται στο μέγιστο ύψος h η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητάς του είναι μηδέν και η οριζόντια $v_0 \cos \theta$. Η συνολική του ενέργεια είναι λοιπόν

$$E_f = \frac{1}{2} m v_0^2 \cos^2 \theta + m g h \quad (5.42)$$

Η διατήρηση της ενέργειας συνεπάγεται

$$E_i = E_f \quad (5.43)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 \cos^2 \theta + m g h \quad (5.44)$$

$$\Rightarrow h = \frac{m}{2g} (1 - \cos^2 \theta) \quad (5.45)$$

$$\Rightarrow h = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \theta \quad (5.46)$$

το οποίο είναι το αποτέλεσμα που βρήκαμε στην (3.66) μετά από επίλυση του δεύτερου νόμου και μελέτη της τροχιάς του βλήματος.

5.5 Διατήρηση ορμής

Ας υποθέσουμε ότι δύο σώματα A και B . Σύμφωνα με τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα αν το σώμα A ασκεί στο σώμα B δύναμη F_{BA} τότε το σώμα B ασκεί στο σώμα A δύναμη

$$F_{AB} = -F_{BA} \quad (5.47)$$

Ο νόμος αυτός έχει σημαντικές συνέπειες για την ορμή. Σύμφωνα με το



Σχήμα 5.4: Δύο σώματα μαζών m_1 και m_2 ασκούν δυνάμεις το ένα στο άλλο.

δεύτερο νόμο

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (5.48)$$

και κατά συνέπεια

$$\vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt \quad (5.49)$$

Εφαρμόζοντας τον την (5.49) για κάθε σώμα χωριστά

$$\vec{p}_A(t_2) - \vec{p}_A(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} dt \vec{F}_{AB} \quad (5.50)$$

$$\vec{p}_B(t_2) - \vec{p}_B(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} dt \vec{F}_{BA} \quad (5.51)$$

Όμως σύμφωνα με την (5.47) $F_{AB} = -F_{BA}$ και άρα

$$\begin{aligned}\vec{p}_A(t_2) - \vec{p}_A(t_1) &= \vec{p}_B(t_2) - \vec{p}_B(t_1) \Rightarrow \\ \vec{p}_A(t_1) + \vec{p}_B(t_1) &= \vec{p}_A(t_2) + \vec{p}_B(t_2)\end{aligned}\quad (5.52)$$

Η τελευταία σχέση δεν είναι τίποτε άλλο από την διατήρηση της ορμής καθώς μας πληροφορεί ότι η συνολική ορμή του συστήματος είναι ανεξάρτητη του χρόνου. Η παραπάνω απόδειξη μπορεί να γενικευτεί εύκολα σε συστήματα με περισσότερα σωματίδια.

5.6 Το σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας

Η ορμή, όπως και η θέση και η ταχύτητα ενός σώματος ορίζεται πάντα σε ένα σύστημα αναφοράς. Αν υποθέσουμε ότι έχουμε ένα σύνολο N σωματιδίων σε ένα σύστημα S με συνολική ορμή

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i$$

τότε σε ένα σύστημα S' το οποίο κινείται με ταχύτητα u ως προς το S η ταχύτητα του κάθε σωματιδίου θα είναι

$$\vec{v}'_i = \vec{v}_i - \vec{u}$$

και άρα η συνολική ορμή θα είναι

$$\vec{P}' = \sum_{i=1}^N \vec{p}'_i = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}'_i = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i - u \sum_{i=1}^N m_i$$

Παρατηρούμε ότι υπάρχει ένα μοναδικό σύστημα S' στο οποίο η συνολική ορμή μηδενίζεται, αυτό κινείται με ταχύτητα

$$\vec{u} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i}{\sum_{i=1}^N m_i}$$

Το σύστημα αυτό είναι το σύστημα του κέντρου μάζας, δηλαδή το σύστημα που κινείται μαζί με το κέντρο μάζας η θέση του οποίου ορίζεται ως

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i}$$

Η συνολική ορμή λοιπόν μηδενίζεται στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας. Η ιδιότητα αυτή είναι πολύ χρήσιμη στην επίλυση προβλημάτων.

5.7 Κρούσεις

Στα προβλήματα κρούσεων γνωρίζουμε συνήθως τις αρχικές ταχύτητες δύο η περισσότερων σωμάτων τα οποία συγκρούονται και μας ζητάται να υπολογίσουμε τις ταχύτητες των σωμάτων μετά την σύγκρουση. Τα προβλήματα κρούσεων επιλύονται κατά κανόνα εφαρμόζοντας τα θεωρήματα διατήρησης της ορμής και ενέργειας για το σύστημα πριν και μετά την κρούση. Οι κρούσεις μπορεί να είναι ελαστικές οπότε η συνολική ενέργεια παραμένει σταθερή ή μη ελαστικές οπότε ένα συνήθως γνωστό ποσοστό της αρχικής ενέργειας του συστήματος χάνεται κατά την σύγκρουση.

5.7.1 Πρόβλημα 1: Κρούση με ακίνητη σφαίρα

Σφαίρα μάζας m_1 και ταχύτητας v_1 συγκρούεται ελαστικά με ακίνητη σφαίρα μάζας m_2 . Να υπολογιστούν οι ταχύτητες των σφαιρών μετά την κρούση. Τι συμβαίνει στην περίπτωση $m_1 = m_2$.

Θα λύσουμε το πρόβλημα εφαρμόζοντας τα θεωρήματα διατήρησης ορμής και ενέργειας σε δύο συστήματα αναφοράς (α) Σύστημα εργαστηρίου (β) Σύστημα κέντρου μάζας.

(α) Εργαζόμαστε στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου. Οι αρχικές ταχύτητες των σφαιρών είναι v_1 και $v_2 = 0$ και οι τελικές ταχύτητες V_1 και V_2 . Η διατήρηση ενέργειας γράφεται



Σχήμα 5.5: Οι δύο σφαίρες στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου.

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2 \quad (5.53)$$

και η διατήρηση της ορμής

$$m_1 v_1 = m_1 v_2 + m_2 V_2 \quad (5.54)$$

Η (5.53), (5.54) μπορούν να ξαναγραφούν ως

$$m_1 (v_1^2 - v_2^2) = m_2 V_2^2 \quad (5.55)$$

$$m_1 (v_1 - v_2) = m_2 V_2 \quad (5.56)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις δύο τελευταίες εξισώσεις παίρνουμε³

$$v_1 + v_2 = V_2 \quad (5.57)$$

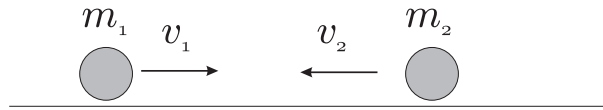
³Η διαίρεση δεν θα ήταν επιτρεπτή αν η δεύτερη εξίσωση μηδενίζεται. Αυτό συμβαίνει όμως μόνο όταν $v_1 = V_1$ και $V_2 = 0$ το οποίο δεν είναι αποδεκτό καθώς τα σώματα διατηρούν τις αρχικές τους ταχύτητες (δεν συμβαίνει κρούση).

η οποία μαζί με την (5.54) αποτελούν σύστημα ως προς v_2, V_2 . Επιλύοντας βρίσκουμε

$$v_2 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad (5.58)$$

$$V_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad (5.59)$$

(β) Θα επιλύσουμε το ίδιο πρόβλημα στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας. Η ταχύτητα του κέντρου μάζας δίνεται από την (5.6)



Σχήμα 5.6: Οι δύο σφαίρες στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου.

$$u = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad (5.60)$$

και οι αρχικές ταχύτητες των δύο μαζών σε αυτό είναι σύμφωνα με την (5.6)

$$v'_1 = v_1 - u = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad (5.61)$$

$$v'_2 = v_2 - u = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad (5.62)$$

Η συνολική ορμή πριν την κρούση είναι μηδέν και το ίδιο θα ισχύει και μετά την κρούση

$$m_1 V'_1 + m_2 V'_2 = 0 \Rightarrow \frac{V'_1}{V'_2} = -\frac{m_2}{m_1} \quad (5.63)$$

πράγμα που απαιτεί ο λόγος των ταχυτήτων δηλαδή παραμένει ίδιος όσο ήταν και πριν την κρούση. Για να παραμείνει ο λόγος ίδιος πρέπει να συμβαίνει ένα από τα ακόλουθα (1) είτε και οι δύο ταχύτητες να αυξηθούν ταυτόχρονα είτε να μειωθούν πράγμα αδύνατον γιατί τότε δεν θα διατηρούνταν η ενέργεια (2) να παραμείνουν ίδιες όμως αυτό σημαίνει ότι δεν έχουμε σύγκρουση (3) να αλλάζουν και οι δύο πρόσημο

$$V'_1 = -v'_1, \quad V'_2 = -v'_2 \quad (5.64)$$

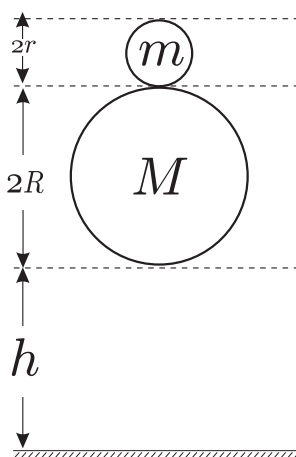
που είναι και η μόνη αποδεκτή λύση. Μεταφράζοντας στο σύστημα συντεταγμένων του εργαστηρίου η τελευταία σχέση γράφεται

$$V_1 = V'_1 + u = -v'_1 + \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad (5.65)$$

$$V_2 = V'_2 + u = -v'_2 + \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad (5.66)$$

5.7.2 Πρόβλημα 2: Ένα πείραμα επίδειξης

Δύο μπάλες μαζών m και M ακτινών r και R αφήνονται να πέσουν ελεύθερα από ύψος h (μετρούμενο από το κάτω μέρος της μπάλας M) τοποθετημένες η μία πάνω στη άλλη όπως στο σχήμα. Να υπολογιστεί η ταχύτητα της κάθε μπάλας αμέσως μετά την πρόσκρουση στο έδαφος καθώς και το ύψος που θα φτάσει η κάθε μία. Να εξεταστεί το όριο $m \ll M$. Υποθέστε ελαστικές κρούσεις.



Σχήμα 5.7: Το σύστημα το δύο μπαλών εκτελεί ελεύθερη πτώση από ύψος h .

Το σύστημα των δύο μπαλών φτάνει στο έδαφος με κοινή ταχύτητα v_0 η οποία μπορεί να υπολογιστεί από την διατήρηση της (δυναμικής) ενέργειας. Επιλέγοντας την μπάλα μάζας M έχουμε ⁴

$$M g (h + R) = \frac{1}{2} M v_0^2 + M g R \quad (5.67)$$

και άρα

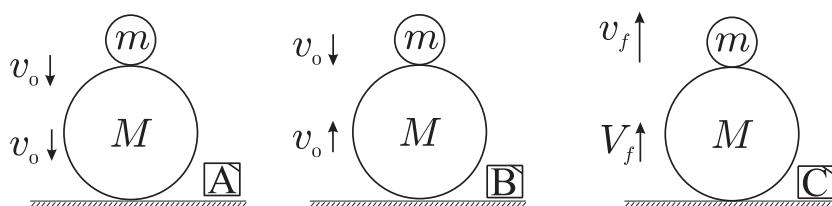
$$v_0 = \sqrt{2 g h} \quad (5.68)$$

Η πρόσκρουση στο έδαφος μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελείται από σε τρία διαδοχικά στιγμιότυπα όπως στο σχήμα

A: Η μπάλα M συγκρούεται με το έδαφος με ταχύτητα v_0 και ανακλάται ελαστικά με την ίδια ταχύτητα ενώ η m συνεχίζει να κινείται προς τα κάτω με v_0 .

B: Οι δύο μπάλες συγκρούονται μεταξύ τους.

C: Μετά την σύγκρουση η μπάλα M αποκτάει ταχύτητα V_f και η μπάλα m ταχύτητα v_f .



Σχήμα 5.8: Τα τρία στιγμιότυπα: της ανάκλασης της πρώτης μπάλας από έδαφος (A), λίγο πριν την σύγκρουση των δύο μπαλών (B) και αμέσως μετά την σύγκρουση (C).

Εφαρμογή του νόμου διατήρησης της ορμής κατά τα στιγμιότυπα B και C δίνει

$$M v_0 - m v_0 = M V_f + m v_f \quad (5.69)$$

ενώ η διατήρηση της ενέργειας

$$\frac{1}{2} M v_0^2 + \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} M V_f^2 + \frac{1}{2} m v_f^2 \quad (5.70)$$

Μπορούμε να λύσουμε την (5.69) ως προς V_f και αντικαθιστώντας στην (5.70) να πάρουμε μια εξίσωση 4ου βαθμού ως προς v_f . Μπορούμε όμως να αποφύγουμε την επίλυση της τεταρτοβάθμιας ξαναγράφοντας τις εξισώσεις (5.69) και (5.70) ως

$$M (v_0 - V_f) = m (v_f + v_0) \quad (5.71)$$

$$M (v_0^2 - V_f^2) = m (v_f^2 - v_0^2) \quad (5.72)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις δύο τελευταίες εξισώσεις (αφού αναπτύξουμε σε παράγοντες τις διαφορές τετραγώνων στην δεύτερη) παίρνουμε ⁵

$$V_f + v_0 = v_f - v_0 \quad (5.73)$$

Ύστερα προσδιορίζουμε τις άγνωστες τελικές ταχύτητες επιλύοντας το σύστημα (5.69), (5.73) ως προς v_f, V_f

$$v_f = v_0 \frac{3M - m}{m + M}, \quad V_f = v_0 \frac{M - 3m}{m + M} \quad (5.74)$$

όπου το v_0 δίνεται από την (5.68). Έστω h_f και H_f τα ύψη που θα φτάσουν αντίστοιχα οι μπάλες m, M μετά την κρούση (εδώ μετράμε το ύψος από το κέντρο μάζας της κάθε μπάλας). Από την διατήρηση της ενέργειας για την κάθε μπάλα χωριστά έχουμε

$$m g (2R + r) + \frac{1}{2} m v_f^2 = m g h_f \quad (5.75)$$

$$M g R + \frac{1}{2} M V_f^2 = M g H_f \quad (5.76)$$

⁴Επιλέξαμε το σημείο αναφοράς της δυναμικής ενέργειας στο έδαφος.

⁵Η διαίρεση επιτρέπεται καθώς η λύση $V_f = -v_f = v_0$ απορρίπτεται ως μη φυσικά αποδεκτή.

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις για τις τελικές ταχύτητες (5.74) και την v_0 (5.68) παίρνουμε τις εκφράσεις για το τελικό ύψος των κέντρων μάζας των δύο μπαλών

$$h_f = \left(\frac{3M - m}{m + M} \right)^2 h + 2R + r \quad (5.77)$$

$$H_f = \left(\frac{M - 3m}{m + M} \right)^2 h + R \quad (5.78)$$

Αφού εισάγουμε για ευκολία τις αδιάστατες μεταβλητές

$$k = \frac{3M - m}{m + M}, \quad K = \frac{M - 3m}{m + M} \quad (5.79)$$

Εξετάζουμε τώρα δύο ενδιαφέρουσες οριακές περιπτώσεις: (α) $m = M$ εδώ παίρνουμε $k = 1$ και $K = -1$ που οδηγεί σε

$$h_f = h + 2R + r, \quad H_f = 0$$

και (β) $m \ll M$ που οδηγεί σε $k = 3, K = 1$

$$h_f = 9h + 2R + r, \quad H_f = h + R$$

Στη δεύτερη περίπτωση παρατηρούμε ότι η μικρότερη μπάλα ανεβαίνει σε ύψος περίπου 9 φορές μεγαλύτερο από αυτό από το οποίο την αφήσαμε να πέσει.

Άσκηση Να επαναληφθεί το παραπάνω παράδειγμα για ένα σύστημα τριών μπαλών, με μάζες $m_3 \ll m_2 \ll m_1$ οι οποίες βρίσκονται η μια πάνω στην άλλη (η m_3 βρίσκεται πιο πάνω απ' όλες) και πέφτουν από ύψος h . Να υπολογιστεί η τελική ταχύτητα και το ύψος που φτάνει η μπάλα m_3 . Θεωρήστε ελαστικές κρούσεις και αμελητέες ακτίνες σε σχέση με το ύψος.

Άσκηση* Να γενικευθεί η παραπάνω άσκηση για ένα σύστημα n μπαλών, με μάζες $m_n \ll m_{n-1} \ll \dots \ll m_2 \ll m_1$ οι οποίες βρίσκονται η μια πάνω στην άλλη (η m_n βρίσκεται πιο πάνω απ' όλες) και πέφτουν από ύψος h και να υπολογιστεί η τελική ταχύτητα της μπάλας m_n . Πόσες μπάλες χρειαζόμαστε για να φτάσει η ταχύτητα αυτή την ταχύτητα διαφυγής στην περίπτωση που $h = 50m$;

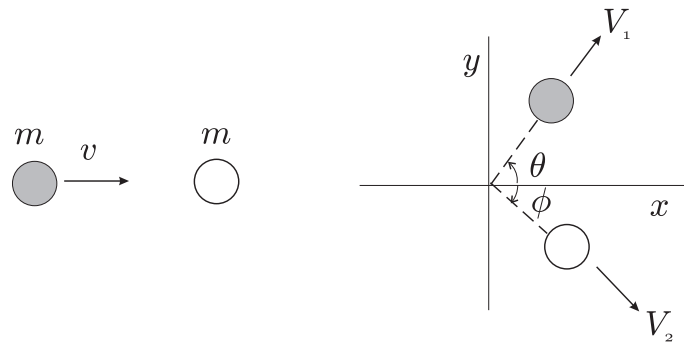
5.7.3 Πρόβλημα 3: Μπιλιάρδο

Μια μπάλα του μπιλιάρδου αρχικής ταχύτητας v συγκρούεται με ακίνητη μπάλα. Μετά την σύγκρουση η μπάλα με αρχική ταχύτητα v σχεδιάζεται σε γωνία θ όπως στο Σχήμα 5.9. Να υπολογιστεί η γωνία στην οποία σχεδιάζεται η αρχικά ακίνητη μπάλα καθώς και οι τελικές ταχύτητες των δύο μπαλών.

Έστω $v_1 = v$ και $v_2 = 0$ οι αρχικές ταχύτητες των μπαλών και V_1 και V_2 οι τελικές. Η διατήρηση της ορμής στους δύο άξονες συνεπάγεται

$$(x) : m v = m V_1 \cos \theta + m V_2 \cos \phi \quad (5.80)$$

$$(y) : 0 = m V_1 \sin \theta - m V_2 \sin \phi \quad (5.81)$$



Σχήμα 5.9: Οι δύο μπάλες του μπιλιάρδου πριν και μετά την σύγκρουση.

και η διατήρηση της ενέργειας

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m V_1^2 + \frac{1}{2} m V_2^2 \quad (5.82)$$

η οποία γράφεται και ως

$$v^2 = V_1^2 + V_2^2 \quad (5.83)$$

Οι τρεις εξισώσεις (5.80)-(5.83) αποτελούν σύστημα με αγνώστους τα V_1 , V_2 , ϕ . Οι εξισώσεις αυτές μπορούν να λυθούν ως εξής. Στην (5.80) φέρνουμε το $V_1 \cos \theta$ στο πρώτο μέλος και υψώνουμε στο τετράγωνο

$$\begin{aligned} v^2 + V_1^2 \cos^2 \theta - 2 v V_1 \cos \theta &= V_2^2 \cos^2 \phi \Rightarrow \\ v^2 + V_1^2 - V_1^2 \sin^2 \theta - 2 v V_1 \cos \theta &= V_2^2 \cos^2 \phi \Rightarrow \\ v^2 + V_1^2 - 2 v V_1 \cos \theta &= V_2^2 \cos^2 \phi + V_1^2 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

Και χρησιμοποιώντας την (5.81)

$$v^2 - 2 v V_1 \cos \theta = V_2^2 \cos^2 \phi + V_2^2 \sin^2 \phi \Rightarrow$$

και χρησιμοποιώντας την (5.83)

$$2 V_1^2 + V_2^2 - 2 v V_1 \cos \theta = V_2^2 \Rightarrow V_1 = v \cos \theta \quad (5.84)$$

και χρησιμοποιώντας την (5.83) βρίσκουμε επίσης

$$V_2 = v \sin \theta \quad (5.85)$$

Ύστερα αντικαθιστώντας τις V_1 και V_2 στην (5.81) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \sin \theta \cos \theta &= \sin \theta \sin \phi \Rightarrow \cos \theta = \sin \phi \Rightarrow \\ \theta &= \frac{\pi}{2} - \phi \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{2} - \theta \end{aligned} \quad (5.86)$$

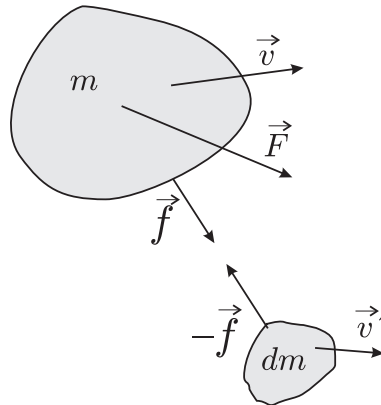
Οι δύο μπάλες λοιπόν σκεδάζονται σχηματίζοντας ορθή γωνία μεταξύ τους.

5.8 Συστήματα μεταβλητής μάζας

5.8.1 Εισαγωγή

Μια ιδιαίτερη κατηγορία προβλημάτων αποτελούν τα συστήματα μεταβλητής μάζας. Με μια πρώτη ματιά τα προβλήματα αυτά φαίνονται να μπορούν να επιλυθούν με άμεση εφαρμογή του 2ου νόμου του Νεύτωνα (3.1). Η προσέγγιση αυτή είναι σωστή μόνο στις περιπτώσεις όπου η εισερχόμενη ή εξερχόμενη μάζα στο υπό μελέτη σύστημα έχει μηδενική ταχύτητα. Στη γενική περίπτωση η ταχύτητα αυτή δεν είναι μηδενική με αποτέλεσμα να ασκείται μια πρόσθετη δύναμη στο σύστημα.

Για να μελετήσουμε τη γενική περίπτωση θεωρούμε ένα σώμα μάζας m το οποίο κινείται με ταχύτητα \vec{v} και στο οποίο ενεργεί μια εξωτερική δύναμη \vec{F} . Έστω ότι το σώμα κερδίζει μια μικρή ποσότητα μάζας dm η οποία είχε ταχύτητα \vec{v}' πριν προσκολληθεί σε αυτό. Μετά την προσκόλληση τα m και dm έχουν κοινή ταχύτητα $\vec{v} + d\vec{v}$. Κατά την προσκόλληση το κάθε σώμα ασκεί στο άλλο δύναμη \vec{f} σύμφωνα με τον 3ο νόμο (βλ Σχήμα 5.10). Η μεταβολή



Σχήμα 5.10: Αναπαράσταση γενικού συστήματος μεταβλητής μάζας.

της ορμής του σώματος μάζας m θα είναι

$$d\vec{p} = m (\vec{v} + d\vec{v}) - m \vec{v} \quad (5.87)$$

και σύμφωνα με το 2ο νόμο

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{p}}{dt} &= \vec{F} + \vec{f} \Rightarrow \\ (\vec{F} + \vec{f}) dt &= m (\vec{v} + d\vec{v}) - m \vec{v} \Rightarrow \\ (\vec{F} + \vec{f}) dt &= m d\vec{v} \end{aligned} \quad (5.88)$$

όπου αναπτύξαμε το δεύτερο μέρος της εξίσωσης αγνοώντας τα διαφορικά

ανώτερης τάξης ($dm d\vec{v}$). Προχωρώντας ανάλογα για την μάζα dm έχουμε

$$\begin{aligned} -\vec{f} dt &= dm (\vec{v} + d\vec{v}) - dm \vec{v}' \Rightarrow \\ -\vec{f} dt &= dm (\vec{v} - \vec{v}') \end{aligned} \quad (5.89)$$

Μπορούμε να απαλείψουμε τη δύναμη \vec{f} προσθέτοντας τις (5.88), (5.89)

$$\vec{F} dt = dm (\vec{v} - \vec{v}') + m d\vec{v} \quad (5.90)$$

και διαιρώντας με dt παίρνουμε

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + (\vec{v}' - \vec{v}) \frac{dm}{dt} \quad (5.91)$$

Η παραπάνω εξίσωση αποτελεί την γενική εξίσωση που διέπει την κίνηση ενός συστήματος μεταβλητής μάζας όπου ο ρυθμός μεταβολής της μάζας $\frac{dm}{dt}$ είναι θετικός όταν το σύστημα κερδίζει μάζα και αρνητικός όταν χάνει. Επίσης οι ταχύτητες μετρούνται ως προς τον ακίνητο παρατηρητή και ως εκ τούτου η διαφορά $\vec{v}' - \vec{v}$ είναι η σχετική ταχύτητα της εισρέουσας ή εκβαλλόμενης μάζας ως προς το σύστημα μάζας m . Η εξίσωση (5.91) μπορεί να γραφεί επίσης ως

$$\begin{aligned} m \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \frac{dm}{dt} &= \vec{F} + \vec{v}' \frac{dm}{dt} \Rightarrow \\ \frac{d(m\vec{v})}{dt} &= \vec{F} + \vec{v}' \frac{dm}{dt} \end{aligned} \quad (5.92)$$

Στη μορφή αυτή είναι ξεκάθαρο ότι ο 2ος νόμος του Νεύτωνα παραμένει αναλλοίωτος όταν αρχική/τελική ταχύτητα της εισρέουσας/εκβαλλόμενης μάζας είναι μηδενική.

5.8.2 Πρόβλημα 1: Η κίνηση του πυραύλου

Πύραυλος κινείται εκτοξεύοντας αέριο με ταχύτητα u σχετική με αυτόν και με σταθερό ρυθμό έτσι ώστε η χρονική μεταβολή της μάζας του να είναι $\frac{dm}{dt} = -b$ ($b > 0$). Να προσδιοριστεί η ταχύτητα του πυραύλου συναρτήσει του χρόνου.

Θα εφαρμόσουμε την εξίσωση (5.91). Αν υποθέσουμε ότι ο πύραυλος κινείται μακριά από πηγές βαρύτητας η εξωτερικό δύναμη που ασκείται σε αυτόν μηδενίζεται, $\vec{F} = 0$. Επίσης μας δίνεται ότι η σχετική ταχύτητα των αερίων είναι $v' - v = -u$ (η \vec{u} έχει αντίθετη φορά από την \vec{v}). Κατά συνέπεια η εξίσωση κίνησης του πυραύλου είναι

$$m \frac{dv}{dt} = -u \frac{dm}{dt} \quad (5.93)$$

η οποία συνεπάγεται

$$m dv = -u dm \Rightarrow dv = -u \frac{dm}{m} \Rightarrow \int_{v_1}^{v_2} dv = -u \int_{m_1}^{m_2} \frac{dm}{m} \quad (5.94)$$

$$\Rightarrow v_2 - v_1 = u \ln \frac{m_1}{m_2} \quad (5.95)$$

Σε περίπτωση που η αρχική μάζα είναι $m_1 = M$ και η αρχική ταχύτητα $v_1 = 0$ η μάζα τη χρονική στιγμή t είναι $m = M - bt$ και άρα

$$v(t) = u \ln \frac{M}{M - bt} \quad (5.96)$$

Η ταχύτητα φαίνεται να απειρίζεται για $t = M/b$ όταν δηλαδή τελειώνουν τα καύσιμα. Δεν έχουμε πετύχει τον τέλειο πύραυλο, αλλά ο απειρισμός της ταχύτητας είναι αποτέλεσμα του μηδενισμού της μάζας του πυραύλου ο οποίος λανθασμένα υποθέσαμε ότι αποτελείται μόνο από καύσιμα. Στην πραγματικότητα τα καύσιμα τελειώνουν πριν μηδενιστεί η μάζα και έτσι δεν υπάρχει απειρισμός. Αν κάνουμε μια πιο ρεαλιστική υπόθεση, για παράδειγμα ότι ο πύραυλος αποτελείται κατά 99% από καύσιμα, τότε η τελική του ταχύτητα είναι

$$v = u \ln \frac{M}{M/100} = u \ln 100 \approx 4.6 u \quad (5.97)$$

Κεφάλαιο 6

ΚΕΝΤΡΙΚΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ

6.1 Εισαγωγή

Με τον όρο κεντρικό δυναμικό αναφερόμαστε σε μια κατηγορία δυναμικών η οποία εξαρτάται μόνο από την απόσταση $V(r)$. Τα δυναμικά αυτά παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον επειδή περιγράφουν πληθώρα φυσικών προβλημάτων, όπως είναι η κίνηση των πλανητών. Παρά τη γενικότητά τους τα κεντρικά δυναμικά επιπλέον επιτρέπουν την αναλυτική μελέτη και εξαγωγή ενδιαφερόντων συμπερασμάτων σχετικά με την κίνηση σωμάτων. Στο κεντρικό δυναμικό η ανάλυση γίνεται σε σφαιρικές συντεταγμένες όπου η απόσταση r αποτελεί την μια από αυτές. Η δύναμη υπολογίζεται από την (5.36)

$$\vec{F} = -\nabla V(r) = -\frac{dV(r)}{dr} \hat{e}_r = -V'(r) \hat{e}_r \quad (6.1)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την σχέση (Α'.44). Η κίνηση σε κεντρικό δυναμικό παρουσιάζει μερικά ενδιαφέρουσες ιδιότητες οι οποίες αποδεικνύονται πολύ εύκολα (α) Η ενέργεια διατηρείται (β) Η στροφορμή διατηρείται (γ) Η κίνηση λαμβάνει χώρα σε ένα επίπεδο.

Διατήρηση Ενέργειας

Η κεντρική δύναμη είναι διατηρητική όπως δείξαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, για αυτό εξάλλου και το δυναμικό είναι καλώς ορισμένο η ενέργεια λοιπόν διατηρείται.

Διατήρηση Στροφορμής

Η στροφορμή σώματος μάζας m το οποίο κινείται σε κεντρικό δυναμικό

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (6.2)$$

Η χρονική της μεταβολή δίνεται από

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \times (m\vec{v}) + \vec{r} \times \vec{F} = 0 + r F(r) \hat{e}_r \times \hat{e}_r = 0$$

Η στροφορμή λοιπόν σε κεντρικό δεν εξαρτάται από το χρόνο και άρα διατηρείται.

Κίνηση στο επίπεδο

Το διάνυσμα θέσης ενός σωματιδίου σε κεντρικό δυναμικό μαζί με το διάνυσμα της ταχύτητας ορίζουν ένα επίπεδο. Έστω $\vec{r}(t)$ και $\vec{v}(t)$ η θέση και η ταχύτητα του σωματιδίου τη χρονική στιγμή t . Το κάθετο διάνυσμα σε αυτό το επίπεδο βρίσκεται στη διεύθυνση $\vec{\eta}(t) = \vec{r}(t) \times \vec{v}(t)$. Η χρονική μεταβολή αυτού του διανύσματος δίνεται από

$$\frac{d\vec{\eta}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{r}(t) \times \vec{v}(t)) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \times \vec{v}(t) + \frac{1}{m} \vec{r} \times \frac{d\vec{p}(t)}{dt} = \quad (6.3)$$

$$\vec{v}(t) \times \vec{v}(t) + \frac{F(r)}{m} \vec{r}(t) \times \hat{e}_r = 0 + \frac{F(r)}{m} r \hat{e}_r \times \hat{e}_r \quad (6.4)$$

κατά συνέπεια

$$\vec{\eta}(t) = \vec{\eta}(0) \quad (6.5)$$

και το επίπεδο κίνησης είναι πάντα το ίδιο.

6.2 Εξισώσεις κίνησης

Η κίνηση σε κεντρικό δυναμικό λαμβάνει χώρα σε ένα επίπεδο. Μπορούμε λοιπόν να διαλέξουμε το σύστημα συντεταγμένων μας κατάλληλα έτσι ώστε το επίπεδο της κίνησης να συμπίπτει με το επίπεδο $x - y$. Με αυτόν τον τρόπο το πρόβλημα του κεντρικού δυναμικού από τρισδιάστατο ανάγεται σε διδιάστατο. Το κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων σε αυτή την περίπτωση είναι οι πολικές συντεταγμένες r, θ καθώς η μία από αυτές συμπίπτει με την απόσταση. Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα σε πολικές συντεταγμένες έχει ήδη μελετηθεί στην ενότητα 3.4 και στην περίπτωση του κεντρικού δυναμικού $F_r = f(r) = V'(r), F_\theta = 0$, γράφεται ως

$$m (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) = -V'(r) \quad (6.6)$$

$$m (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) = 0 \quad (6.7)$$

Η δεύτερη εξίσωση (6.7) μπορεί να γραφτεί ως

$$m \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) = 0 \quad (6.8)$$

Η στροφορμή όμως γράφεται

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m \vec{r} \times (\dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta) = m r^2 \dot{\theta} \hat{e}_r \times \hat{e}_\theta = m r^2 \dot{\theta} \hat{e}_z \quad (6.9)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την έκφραση της ταχύτητας σε πολικές συντεταγμένες από τις (3.110), (3.111)

$$\vec{v} = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta \quad (6.10)$$

Το μέτρο λοιπόν της στροφορμής είναι $L = m r^2 \dot{\theta}$ και η εξίσωση (6.7) δεν είναι τίποτε άλλο από τη διατήρηση της στροφορμής

$$\frac{dL}{dt} = 0 \Rightarrow m \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\theta}) = 0 \Rightarrow L = m r^2 \dot{\theta} = \text{σταθερά} \quad (6.11)$$

και μας επιτρέπει να επιλύσουμε για την παράγωγο της γωνίας θ

$$\dot{\theta} = \frac{L}{m r^2} \quad (6.12)$$

Αντικαθιστώντας την τελευταία σχέση στην (6.6) παίρνουμε μια διαφορική εξίσωση για το r

$$m \left(\ddot{r} - r \frac{L^2}{m^2 r^4} \right) = -V'(r) \quad (6.13)$$

ή

$$m \ddot{r} = \frac{L^2}{m r^3} - V'(r) \quad (6.14)$$

Το πρόβλημα λοιπόν του κεντρικού δυναμικού ανάγεται σε μονοδιάστατο πρόβλημα αν χρησιμοποιήσουμε ως δυναμικό το ονομαζόμενο ενεργό δυναμικού του οποίου η παράγωγος δίνει το δεύτερο μέλος της παραπάνω εξίσωσης (ενεργή δύναμη)

$$m \ddot{r} = -V'_{eff}(r) \quad (6.15)$$

$$V_{eff}(r) = \frac{L^2}{2m r^2} + V(r) \quad (6.16)$$

Παρατηρούμε δηλαδή ότι στην εικόνα του ενεργού δυναμικού, εμφανίζεται σε μικρές αποστάσεις μια απωστική δύναμη η οποία μάλιστα απειρίζεται καθώς το r τείνει στο μηδέν. Είναι ακριβώς αυτή η δύναμη που φαίνεται να εμποδίζει τη γη και τους άλλους πλανήτες να πέσουν πάνω στον ήλιο κόντρα στη δύναμη της παγκόσμιας έλξης. Βέβαια δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι δεν πρόκειται για κάποια νέα δύναμη αλλά είναι αποτέλεσμα του γεγονότος ότι το σύστημα αναφοράς στο οποίο θα ίσχυε το ενεργό δυναμικό είναι μη αδρανειακό. Δεν παύει όμως να είναι μια χρήσιμη εικόνα στη μελέτη του κεντρικού δυναμικού.

Ολοκληρώνοντας την (6.14) ή ισοδύναμα γράφοντας την διατήρηση της ενέργειας οι δύο εξισώσεις κίνησης παίρνουν τη μορφή

$$m r^2 \dot{\theta} = L \quad (6.17)$$

$$\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2m r^2} + V(r) = E \quad (6.18)$$

Η δεύτερη μπορεί να επιλυθεί ως προς \dot{r}

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} \sqrt{E - V(r) - \frac{L^2}{2m r^2}}} \quad (6.19)$$

και ολοκληρώνοντας

$$\int_{r_0}^r \frac{dr'}{\sqrt{E - V(r') - \frac{L^2}{2mr'^2}}} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}} \int_{t_0}^t dt' = \pm \sqrt{\frac{2}{m}}(t - t_0) \quad (6.20)$$

Για δεδομένο $V(r)$ το πρώτο μέλος της (6.20) μπορεί, τουλάχιστον θεωρητικά, να ολοκληρωθεί και μετά να επιλυθεί ως προς $r(t)$. Ύστερα με αντικατάσταση στην (6.17) μπορεί να προσδιοριστεί η $\theta(t)$ και έτσι να επιλυθεί πλήρως το πρόβλημα του κεντρικού δυναμικού. Στην πράξη βέβαια η τελευταία ολοκλήρωση είναι δυνατή αναλυτικά μόνο για ειδικές κατηγορίες δυναμικών.

6.2.1 Πρόβλημα 1: Εύρεση τροχιών σε δυναμικό $1/r^2$

|| Σώμα μάζας m βρίσκεται υπό την επίδραση δυναμικού $V(r) = \frac{\delta}{2r^2}$, όπου δ μια σταθερά. Αν αρχικά το σώμα έχει στροφορμή L και ενέργεια E να ||
|| προσδιοριστεί η θέση του σωματιδίου συναρτήσει του χρόνου. ||

Χρησιμοποιώντας διαστατική ανάλυση μπορούμε να θέσουμε $m = L = E = 1$ ¹. Αντικαθιστώντας το δυναμικό στην (6.19) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \pm \sqrt{2} \sqrt{1 - \frac{\delta}{2r^2} - \frac{1}{2r^2}} = \pm \frac{1}{r} \sqrt{2r^2 - (1 + \delta)} \Rightarrow \\ \int_{r_0}^r \frac{r' dr'}{\sqrt{2r'^2 - (1 + \delta)}} &= \pm \int_{t_0}^t dt' \Rightarrow \int_{r_0}^r \frac{dr'^2}{2\sqrt{2r'^2 - (1 + \delta)}} = \pm(t - t_0) \Rightarrow \\ \frac{\sqrt{2r'^2 - (1 + \delta)}}{2} \Big|_{r_0}^r &= \pm(t - t_0) \Rightarrow \\ \sqrt{2r^2 - (1 + \delta)} &= \pm 2(t - t_0) + \sqrt{2r_0^2 - (1 + \delta)} \end{aligned} \quad (6.21)$$

Για να αποφύγουμε τις πολύπλοκες εκφράσεις μπορούμε τώρα να θεωρήσουμε ότι μετράμε το χρόνο έτσι ώστε η αρχική στιγμή να έχει την τιμή $t_0 = \pm \sqrt{r_0^2 - (1 + \delta)}/2$ (διαλέγουμε μία τιμή ανάλογα με το πρόσημο του \dot{r}). Τότε παίρνουμε

$$\sqrt{2r^2 - (1 + \delta)} = \pm 2t \Rightarrow r = \sqrt{2t^2 + \frac{(1 + \delta)}{2}} \quad (6.22)$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (6.17) παίρνουμε

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2t^2 + (1 + \delta)/2} \Rightarrow \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta' = \int_{t_0}^t \frac{dt'}{2t'^2 + (1 + \delta)/2} \quad (6.23)$$

¹Όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε εύκολα η επιλογή αυτή αντιστοιχεί σε μέτρηση του μήκους σε μονάδες $[L]/\sqrt{[m][E]}$ και του χρόνου σε μονάδες $[L]/[E]$.

Στο σημείο αυτό διακρίνουμε δύο περιπτώσεις

(α) $\delta = -1$ που μετά την αποκατάσταση των μονάδων αντιστοιχεί σε $\delta = -L^2/m$. Σε αυτή την ειδική περίπτωση η (6.23) γράφεται

$$\theta - \theta_0 = \int_{t_0}^t \frac{dt'}{2t'^2} \Rightarrow \theta = -\frac{1}{2t} + \theta_0 + \frac{1}{2t_0} \quad (6.24)$$

με κατάλληλη επιλογή των αξόνων $\theta_0 = -1/(2t_0)$ μπορούμε να γράψουμε την λύση ως

$$r(t) = \sqrt{2}t, \quad \theta(t) = -\frac{1}{2t} \quad (6.25)$$

Η εξίσωση τροχιάς (δηλαδή η καμπύλη $r(\theta)$ προκύπτει απαλείφοντας το χρόνο από την (6.25))

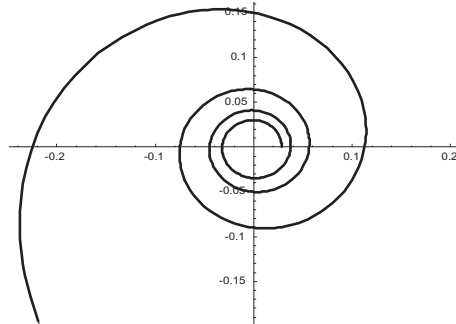
$$r = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\theta} \quad (6.26)$$

η οποία είναι μια ειδική μορφή της Σπειροειδούς του Αρχιμήδη η οποία φαίνεται στο Σχήμα 6.1.

Μετά την αποκατάσταση των διαστάσεων η λύση (6.25) γράφεται ως

$$r(t) = \sqrt{\frac{2E}{m}} t, \quad \theta(t) = -\frac{L}{E} \frac{1}{2t} \quad (6.27)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι σε την περίπτωση αυτή είναι ότι το σώμα φαίνεται να εκτελεί κίνηση με σταθερή ταχύτητα κατά μήκος της ακτινικής συνιστώσας.



Σχήμα 6.1: Σπειροειδής τροχιά για $V = -\frac{L^2}{m} \frac{1}{r^2}$.

(β) $\delta + 1 > 0$ που μετά την αποκατάσταση των μονάδων αντιστοιχεί σε $\delta > -L^2/m$. Σε αυτή την περίπτωση η (6.23) γράφεται

$$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \frac{dt'}{t'^2 + (1+\delta)/4}$$

$$\theta = \theta_0 + \frac{1}{\sqrt{1+\delta}} \arctan \frac{2t'}{\sqrt{1+\delta}} \Big|_{t_0}^t$$

και με κατάλληλη επιλογή του θ_0 έχουμε

$$\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\delta}} \arctan \frac{2t}{\sqrt{1+\delta}} \quad (6.28)$$

ενώ από την (6.22) έχουμε

$$r = \sqrt{2t^2 + \frac{(1+\delta)}{2}} \quad (6.29)$$

(γ) $\delta + 1 < 0$ που μετά την αποκατάσταση των μονάδων αντιστοιχεί σε $\delta < -L^2/m$. Σε αυτή την περίπτωση η (6.23) γράφεται

$$\begin{aligned} \theta - \theta_0 &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \frac{dt'}{t'^2 - |1+\delta|/4} \\ \theta &= \theta_0 - \frac{1}{\sqrt{|1+\delta|}} \operatorname{arctanh} \frac{2t'}{\sqrt{|1+\delta|}} \Big|_{t_0}^t \end{aligned}$$

η οποία δίνει τελικά

$$\theta = -\frac{1}{\sqrt{|1+\delta|}} \operatorname{arctanh} \frac{2t}{\sqrt{|1+\delta|}} \quad (6.30)$$

$$r = \sqrt{2t^2 + \frac{(1+\delta)}{2}} \quad (6.31)$$

6.2.2 Πρόβλημα 2: Υπολογισμός δύναμης από τροχιά

Σώμα μάζας m και κινείται υπό την επίδραση κεντρικής δύναμης τέτοιας ώστε η τροχιά του να δίνεται από $r = k(1 + \cos \theta)$, όπου k γνωστή σταθερά. Δίνεται ότι για $t = 0$ στροφορμή του σώματος ισούται με L . Να υπολογιστεί η δύναμη που ενεργεί στο σώμα.

α' μέθοδος: Σύμφωνα με τις (6.6), (6.12) η δύναμη δίνεται από

$$F_r = m (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \quad (6.32)$$

όπου

$$\dot{\theta} = \frac{L}{m r^2} \quad (6.33)$$

Για να βρούμε τη δύναμη συναρτήσει της απόστασης χρειάζεται να υπολογίσουμε το \ddot{r} και να τα αντικαταστήσουμε στην (6.32). Παραγωγίζοντας την εξίσωση τροχιάς

$$\dot{r} = -k \sin \theta \dot{\theta} = -k \sin \theta \frac{L}{m r^2} \quad (6.34)$$

και

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= -k \cos \theta \dot{\theta} \frac{L}{m r^2} + 2k \sin \theta \frac{L}{m r^3} \dot{r} \\ &= -k \cos \theta \frac{L^2}{m^2 r^4} - 2k^2 \sin^2 \theta \frac{L^2}{m^2 r^5} \end{aligned} \quad (6.35)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την (6.33) και την (6.34). Τα $\sin^2 \theta$ και $\cos \theta$ μπορούν να υπολογιστούν από την εξίσωση τροχιάς

$$r = k(1 + \cos \theta) \Rightarrow \cos \theta = \frac{r}{k} - 1 \quad (6.36)$$

και υψώνοντας στο τετράγωνο

$$\cos^2 \theta = \left(\frac{r}{k} - 1\right)^2 = 1 + \frac{r^2}{k^2} - 2\frac{r}{k} \Rightarrow \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = -\frac{r^2}{k^2} + 2\frac{r}{k}$$

Αντικαθιστώντας στην (6.35) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= -k \cos \theta \frac{L^2}{m^2 r^4} - 2k^2 \sin^2 \theta \frac{L^2}{m^2 r^5} \\ &= -k \left(\frac{r}{k} - 1\right) \frac{L^2}{m^2 r^4} - 2k^2 \left(-\frac{r^2}{k^2} + 2\frac{r}{k}\right) \frac{L^2}{m^2 r^5} \\ &= \frac{k L^2}{m^2 r^4} \left(1 - \frac{r}{k} + \frac{2r}{k} - 4\right) = \frac{k L^2}{m^2 r^4} \left(\frac{r}{k} - 3\right) \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στην (6.32) βρίσκουμε

$$F_r = \frac{k L^2}{m r^4} \left(\frac{r}{k} - 3\right) - r \frac{L^2}{m r^4} = -\frac{3k L^2}{m r^4}$$

β' μέθοδος: Χρησιμοποιώντας την εξίσωση διατήρησης της ενέργειας (6.18) παίρνουμε

$$V = E - \frac{1}{2} m \dot{r}^2 - \frac{L^2}{2m r^2} \quad (6.37)$$

Στην παραπάνω εξίσωση είναι άγνωστο το \dot{r} και η ενέργεια E . Το \dot{r} το υπολογίζουμε συναρτήσει του r την εξίσωση τροχιάς όπως στην (6.34). Υψώνοντας στο τετράγωνο την (6.34) και απαλείφοντας το $\cos \theta$ με τη βοήθεια της (6.36), παίρνουμε

$$\begin{aligned} \dot{r}^2 &= k^2 \sin^2 \theta \frac{L^2}{m^2 r^4} = k^2 (1 - \cos^2 \theta) \frac{L^2}{m^2 r^4} = k^2 \left[1 - \left(\frac{r}{k} - 1\right)^2\right] \frac{L^2}{m^2 r^4} = \\ &= k^2 \frac{r}{k} \left(2 - \frac{r}{k}\right) \frac{L^2}{m^2 r^4} = \frac{2k L^2}{m^3} \frac{1}{r^3} - \frac{L^2}{m^2} \frac{1}{r^2} \end{aligned} \quad (6.38)$$

Αντικαθιστώντας στην (6.37) παίρνουμε

$$V = E - \frac{k L^2}{m} \frac{1}{r^3} \quad (6.39)$$

Επομένως

$$F_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{3k L^2}{m^2} \frac{1}{r^4} \quad (6.40)$$

6.3 Η εξίσωση τροχιάς

Στις εξισώσεις κίνησης (6.6), (6.7) και (6.17), (6.18) οι συντεταγμένες $r(t), \theta(t)$ θεωρούνται ότι εκφράζονται συναρτήσει του χρόνου. Πολλές φορές όμως είναι χρήσιμο να απαλείψουμε το χρόνο για να πάρουμε την εξίσωση τροχιάς $r(\theta)$. Θα πρέπει λοιπόν να αντικαταστήσουμε τις χρονικές παραγώγους με παραγώγους ως προς τη γωνία, το οποίο μπορεί να γίνει εύκολα ως

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \frac{dr}{d\theta} = \frac{L}{m r^2} \frac{dr}{d\theta} \quad (6.41)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την (6.17). Με τη χρήση της τελευταίας σχέσης η εξίσωση (6.17) γράφεται

$$\frac{L^2}{2m r^4} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 = E - \frac{L^2}{2m r^2} - V(r) \Rightarrow \quad (6.42)$$

$$\left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \right)^2 = \frac{2m}{L^2} (E - V(r)) - \frac{1}{r^2} \quad (6.43)$$

Η τελευταία εξίσωση είναι μια διαφορική πρώτης τάξης ως προς $r(\theta)$ η λύση της οποίας δίνει την εξίσωση τροχιάς. Συνήθως όμως παίρνει απλούστερη μορφή αν εισάγουμε την μεταβλητή $u = 1/r$, καθώς

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \frac{1}{u} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \quad (6.44)$$

Αντικαθιστώντας στην (6.43) παίρνουμε

$$\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 = \frac{2m}{L^2} (E - V(1/u)) - u^2 \quad (6.45)$$

Αφού αντικαταστήσουμε το δυναμικό η λύση της παραπάνω εξίσωσης προσδιορίζει το $u(\theta)$ και επομένως το $r(\theta) = 1/u(\theta)$.

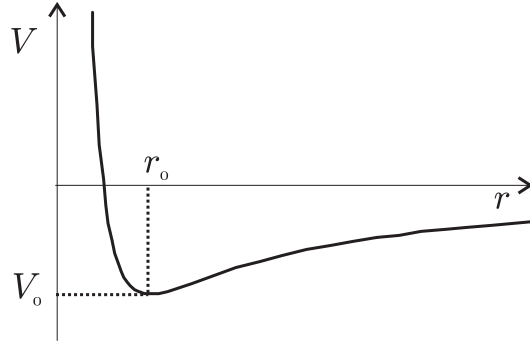
Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω και μετά από μια εκτεταμένη μαθηματική ανάλυση μπορούμε να αποδείξουμε το *Θεώρημα του Bertrand* σύμφωνα με το οποίο : Τα μόνα κεντρικά δυναμικά τα οποία επιδέχονται ευσταθείς κλειστές τροχιές είναι το $V(r) = -\frac{k}{r}$ (βαρυτικό, ηλεκτροστατικό), και το $V(r) = k r^2$ (αρμονικός ταλαντωτής).

6.4 Τροχιές σε βαρυτικό δυναμικό

Εξετάζουμε σε αυτή την ενότητα την κίνηση ενός σώματος μάζας m στο βαρυτικό δυναμικό το οποίο δημιουργεί ένα σώμα μάζας M . Για λόγους απλότητας θα περιοριστούμε στην περίπτωση $m \ll M$, προσέγγιση η οποία δεν απέχει από την πραγματικότητα όταν για παράδειγμα μελετάμε την κίνηση των πλανητών γύρω από τον ήλιο

$$V(r) = -\frac{G M m}{r} = -\frac{\alpha}{r} \quad (6.46)$$

όπου $\alpha = G M m$ μια σταθερά. Το ενεργό δυναμικό είναι $V_{eff} = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r}$ και απεικονίζεται γραφικά στο σχήμα 6.2. Παρουσιάζει ένα ελάχιστο στο σημείο



Σχήμα 6.2: Γραφική αναπαράσταση του ενεργού δυναμικού για κίνηση σε βαρυτικό πεδίο.

$$r_0 = \frac{L^2}{\alpha m} \quad (6.47)$$

Η τιμή του δυναμικού στο ελάχιστο είναι

$$V_0 = -\frac{\alpha^2 m}{2L^2} \quad (6.48)$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα την διαφορική (6.45) η οποία προσδιορίζει την εξίσωση τροχιάς, η οποία αντικαθιστώντας το δυναμικό $V = -\alpha/r = -\alpha u$ και το r_0 από την (6.47), γράφεται

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = \frac{2E}{\alpha r_0} - u^2 + \frac{2u}{r_0} \quad (6.49)$$

Συμπληρώνουμε το τετράγωνο στο δεύτερο μέλος προσθαφαιρώντας τον όρο $1/r_0^2$

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = \frac{2E}{\alpha r_0} - \left(y - \frac{1}{r_0}\right)^2 + \frac{1}{r_0^2} \quad (6.50)$$

και αλλάζοντας ξανά μεταβλητή $z = y - 1/r_0$ παίρνουμε την διαφορική

$$\left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2 = -z^2 + \frac{1}{r_0^2} \left(1 + \frac{2E r_0}{\alpha}\right) = -z^2 + \left(\frac{\epsilon}{r_0}\right)^2 \quad (6.51)$$

όπου εισάγαμε επίσης την σταθερά

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2E L^2}{m \alpha^2}} = \sqrt{1 - \frac{E}{V_0}} \quad (6.52)$$

και το V_0 ορίστηκε στην (6.48). Η σταθερά ϵ της οποίας η σημασία θα γίνει φανερό σύντομα, λόγω της μορφής του ενεργού δυναμικού (παρουσιάζει ελάχιστο στο V_0 και άρα $E > V_0$) παίρνει τιμές στην περιοχή $\epsilon \geq 0$. Παίρνοντας την τετραγωνική ρίζα και επιλέγοντας το θετικό πρόσημο η (6.51) ολοκληρώνεται

$$\int_{z_0}^z \frac{dz'}{\sqrt{\left(\frac{\epsilon}{r_0}\right)^2 - z'^2}} = \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta' \Rightarrow \arccos \frac{r_0 z'}{\epsilon} \Big|_{z_0}^z = \theta - \theta_0 \Rightarrow$$

$$\arccos \frac{r_0 z}{\epsilon} - \arccos \frac{r_0 z_0}{\epsilon} = \theta - \theta_0 \Rightarrow z = \frac{\epsilon}{r_0} \cos \left(\theta - \theta_0 + \arccos \frac{r_0 z_0}{\epsilon} \right)$$

Μπορούμε να απλοποιήσουμε την τελευταία σχέση αν χρησιμοποιήσουμε στην ελευθερία που έχουμε να επιλέξουμε τους άξονες (x, y) στο επίπεδο κίνησης έτσι ώστε $\theta_0 = \arccos \frac{r_0 z_0}{\epsilon}$ και κατά συνέπεια

$$z = \frac{\epsilon}{r_0} \cos \theta$$

και επαναφέροντας τις αρχικές μεταβλητές

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} = \frac{\epsilon}{r_0} \cos \theta$$

ή

$$r = \frac{r_0}{1 + \epsilon \cos \theta} \quad (6.53)$$

που είναι το ζητούμενο, δηλαδή η εξίσωση τροχιάς, σε πολικές συντεταγμένες.

6.5 Μελέτη εξίσωσης τροχιάς

Η εξίσωση τροχιάς για την κίνηση σώματος σε βαρυτικό δυναμικό $V(r) = -a/r$ που προέκυψε στην τελευταία ενότητα είναι

$$r = \frac{r_0}{1 + \epsilon \cos \theta} \quad (6.54)$$

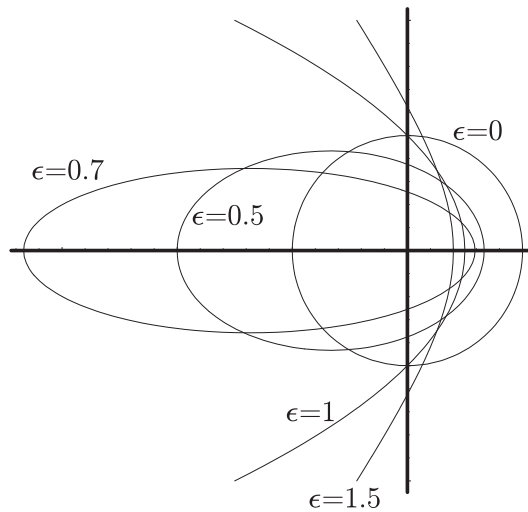
όπου $r_0 = \frac{L^2}{m\alpha}$ και $\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}} = \sqrt{1 - \frac{E}{V_0}} \geq 0$, δύο σταθερές οι οποίες σχετίζονται με τις δύο διατηρούμενες ποσότητες δηλαδή την ενέργεια και την στροφορμή. Η εξίσωση (6.54) είναι γνωστή στους μαθηματικούς ως εξίσωση κωνικής τομής σε πολικές συντεταγμένες. Οι κωνικές τομές είναι οι καμπύλες που παράγονται από την τομή ενός κώνου με ένα επίπεδο. Η παράμετρος ϵ ονομάζεται εκκεντρότητα της κωνικής τομής. Ανάλογα με την τιμή της εκκεντρότητας οι καμπύλες αυτές αντιστοιχούν σε έλλειψη, παραβολή ή υπερβολή. Επειδή οι καμπύλες αυτές είναι ευρύτερα γνωστές σε καρτεσιανές

συντεταγμένες μετατρέπουμε την εξίσωση τροχιάς σε αυτές ($r^2 = x^2 + y^2$, $\cos \theta = x/r$)

$$\begin{aligned} r + \epsilon r \cos \theta = r_0 &\Rightarrow r + \epsilon x = r_0 \Rightarrow r^2 = (r_0 - \epsilon x)^2 \\ &\Rightarrow x^2 + y^2 = r_0^2 + \epsilon^2 x^2 - 2r_0 \epsilon x \\ &\Rightarrow (1 - \epsilon^2)x^2 + y^2 + 2r_0 \epsilon x = r_0^2 \end{aligned} \quad (6.55)$$

Από αυτό το σημείο αναλύουμε ξεχωριστά τις διάφορες περιπτώσεις ανάλογα με τις τιμές του ϵ .

α) $\epsilon = 0$ *Κυκλικές τροχιές* Στην περίπτωση αυτή η ενέργεια ισούται με το ελάχιστο του ενεργού δυναμικού $E = V_0$. Η (6.55) απλοποιείται στην



Σχήμα 6.3: Τροχιές σε βαρυτικό δυναμικό. Κλειστές για $\epsilon = 0$ (κύκλος) $\epsilon = 0.5, 0.7$ (έλλειψη) και ανοιχτές $\epsilon = 1$ (παραβολή) και $\epsilon = 1.5$ (υπερβολή).

εξίσωση κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα r_0 .

$$x^2 + y^2 = r_0^2 \quad (6.56)$$

Η τροχιά παρουσιάζεται στο Σχήμα (6.3) για $\epsilon = 0$.

β) $0 < \epsilon < 1$ *Ελλειπτικές τροχιές* Η περίπτωση αυτή αντιστοιχεί σε αρνητικές ενέργειες $V_0 < E < 0$. Διαιρούμε την (6.55) με $(1 - \epsilon^2)$ και ύστερα συμπληρώνουμε το τετράγωνο στο πρώτο μέλος

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{r_0 \epsilon}{1 - \epsilon^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1 - \epsilon^2} - \frac{r_0^2 \epsilon^2}{(1 - \epsilon^2)^2} &= \frac{r_0^2}{1 - \epsilon^2} \\ \Rightarrow \left(x + \frac{r_0 \epsilon}{1 - \epsilon^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1 - \epsilon^2} &= \frac{r_0^2}{(1 - \epsilon^2)^2} \end{aligned}$$

και διαιρώντας με το δεξί μέλος

$$\frac{\left(x + \frac{r_0 \epsilon}{1 - \epsilon^2}\right)^2}{\left(\frac{r_0}{1 - \epsilon^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{r_0}{\sqrt{1 - \epsilon^2}}\right)^2} = 1 \quad (6.57)$$

πρόκειται δηλαδή για μια έλλειψη με κέντρο στο $(-x_0, 0)$ με $x_0 = r_0 \epsilon / (1 - \epsilon^2)$ και με ημιάξονες $a = r_0 / (1 - \epsilon^2)$ και $b = r_0 / \sqrt{1 - \epsilon^2}$. Η εστιακή απόσταση είναι $c = \sqrt{a^2 - b^2} = x_0$ και κατά συνέπεια η μία εστία συμπίπτει με την αρχή των αξόνων ενώ η άλλη βρίσκεται στο $-2x_0$. Ελλειπτικές τροχιές για $\epsilon = 0.5$ και $\epsilon = 0.7$ παρουσιάζονται στο Σχήμα 6.3.

$\gamma) \epsilon = 1$ Παραβολικές τροχιές Η περίπτωση αυτή αντιστοιχεί σε μηδενική ενέργεια $E = 0$. Η (6.55) ξαναγράφεται ως

$$y^2 + 2r_0 \epsilon x = r_0^2 \Rightarrow y^2 = 4\left(-\frac{r_0}{2}\right)\left(x - \frac{r_0}{2}\right) \quad (6.58)$$

Η εξίσωση αυτή περιγράφει μια παραβολή με εστιακή απόσταση $r_0/2$ και σημείο τομής με τον άξονα x στο $x_0 = r_0/2$. Κατά συνέπεια η εστία βρίσκεται στην αρχή των αξόνων. Η γραφική αναπαράσταση της τροχιάς, $\epsilon = 1$ παρουσιάζεται στο Σχήμα 6.3.

$\delta) \epsilon > 1$ Υπερβολικές τροχιές Η περίπτωση αυτή αντιστοιχεί σε θετικές ενέργειες $E > 0$. Ξεκινώντας από την (6.55) και συμπληρώνοντας το τετράγωνο αυτή παίρνει τη μορφή

$$\frac{\left(x - \frac{r_0 \epsilon}{\epsilon^2 - 1}\right)^2}{\left(\frac{r_0}{\epsilon^2 - 1}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{r_0}{\sqrt{\epsilon^2 - 1}}\right)^2} = 1 \quad (6.59)$$

Η καμπύλη αυτή περιγράφει μια υπερβολή με κέντρο στο $(x_0, 0)$ όπου $x_0 = r_0 \epsilon / (\epsilon^2 - 1)$, $a = r_0 / (\epsilon^2 - 1)$ και $b = r_0 / \sqrt{\epsilon^2 - 1}$ και εστιακή απόσταση $c = \sqrt{a^2 + b^2} = x_0$. Η εστία λοιπόν βρίσκεται στην αρχή των αξόνων. Μια υπερβολική τροχιές με $\epsilon = 1.5$ παρουσιάζεται στο Σχήμα 6.3.

Παρατηρούμε ότι για αρνητικές ενέργειες το σώμα είναι δέσμιο της βαρυτικής έλξης και εκτελεί κλειστές τροχιές ενώ για θετικές ενέργειες το σώμα είναι ελεύθερο και εκτελεί ανοικτές τροχιές.

6.6 Οι νόμοι του Kepler

Ο Kepler (1571-1630) έζησε πριν από τον Νεύτωνα (1643-1727). Χωρίς να γνωρίζει τους νόμους τους Νεύτωνα διατύπωσε χρησιμοποιώντας παρατηρησιακά δεδομένα τους νόμους κίνησης των πλανητών, οι οποίοι μπορούν να

αποδειχθούν χρησιμοποιώντας τους νόμους του Νεύτωνα. Οι τρεις νόμοι του Kepler είναι οι εξής

Πρώτος νόμος Όλοι οι πλανήτες ακολουθούν ελλειπτικές τροχιές με τον ήλιο ως εστία. Το νόμο αυτό τον έχουμε αποδείξει στην προηγούμενη ενότητα.

Δεύτερος νόμος Το εμβαδόν το οποίο καλύπτει το διάνυσμα θέσης ενός πλανήτη στην μονάδα του χρόνου είναι ανεξάρτητο από τη θέση της τροχιάς. Ο νόμος αυτός εκφράζει την διατήρηση της στροφορμής. Η στοιχειώδης επιφάνεια είναι $dA = r(rd\theta)/2 = r^2 d\theta/2$ και ο ρυθμός σάρωσης της επιφάνειας από το διάνυσμα θέσης είναι

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{L}{2m} \quad (6.60)$$

όπου στην τελευταία σχέση χρησιμοποιήσαμε την (6.12).

Τρίτος νόμος Το τετράγωνο της περιόδου ενός πλανήτη είναι ανάλογο του κύβου του μεγαλύτερου ημιάξονα της ελλειπτικής τροχιάς. Ολοκληρώνοντας την (6.60) για μια πλήρη περιστροφή

$$dA = \frac{L}{2m} dt \Rightarrow A = \frac{L}{2m} T \quad (6.61)$$

όπου A το εμβαδόν της έλλειψης το οποίο δίνεται από

$$\begin{aligned} A = \pi a b \Rightarrow A^2 &= \pi^2 a^2 b^2 = \pi^2 \frac{r_0^2}{(1-\epsilon^2)^2} \frac{r_0^2}{(1-\epsilon^2)} \\ &= \pi^2 \frac{r_0^4}{(1-\epsilon^2)^3} = \pi^2 r_0 a^3 \end{aligned} \quad (6.62)$$

Υψώνοντας την (6.61) στο τετράγωνο και αντικαθιστώντας το τελευταίο αποτέλεσμα

$$\begin{aligned} \pi^2 r_0 a^3 &= \frac{L^2}{4m^2} T^2 \Rightarrow \pi^2 \frac{L^2}{m a} a^3 = \frac{L^2}{4m^2} T^2 \\ \Rightarrow T^2 &= \frac{4\pi^2}{GM} a^3 \end{aligned} \quad (6.63)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τους ορισμούς των σταθερών r_0 και a .

Βιβλιογραφία

- [1] University Physics, Modern Physics 11th edition, Young, Freedman, Addison Wesley (2003).
- [2] Φυσική Μέρος Α, Halliday-Resnick, Γ. Α Πνευματικός, Αθήνα (1976).
- [3] D. Morin, Introduction to Classical Mechanics: With Problems and Solutions, Cambridge University Press.
- [4] R. Fitzpatrick, Classical Mechanics, διαθέσιμο online, <http://farside.ph.utexas.edu/teaching/301/lectures/lectures.html>.
- [5] Θεωρητική Μηχανική, Μ. R. Spiegel, ΕΣΠΙ, Αθήνα.
- [6] Classical Mechanics, Herbert Goldstein, Charles P. Poole, John L. Safko, Prentice Hall; 3 edition (January 15, 2002)
- [7] Problems and solutions on mechanics, Yung-kuo Lim , World Scientific (1994).
- [8] Mechanics (Course of Theoretical Physics), L. D. Landau, E. M. Lifshitz Butterworth-Heinemann; 3rd edition (1976).
- [9] Herbert Goldstein, Κλασσική Μηχανική, Εκδόσεις Πουρνάρα (ελληνική μετάφραση της πρώτης έκδοσης του [6]).
- [10] Ηλία Τριανταφυλλόπουλου, Κλασική Μηχανική, Εκδόσεις Συμεών.
- [11] Γεωργίου Λεοντάρη, Διανυσματική Ανάλυση, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων (2002).

Α'

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Α'.1 Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Α'.1.1 Τριγωνομετρικές ταυτότητες

Ξεκινώντας από την ταυτότητα

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad (\text{A'.1})$$

και διαιρώντας κατά μέλη με $\cos^2 \theta$ παίρνουμε το συνημίτονο σαν συνάρτηση της εφαπτομένης

$$\tan^2 \theta + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Rightarrow \cos^2 \theta = \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} \quad (\text{A'.2})$$

Διαιρώντας την (Α'.1) με $\sin^2 \theta$ παίρνουμε το ημίτονο σαν συνάρτηση της συνεφαπτομένης

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{1 + \cot^2 \theta} \quad (\text{A'.3})$$

Α'.1.2 Αναγωγή τριγωνομετρικών συναρτήσεων αθροισμάτων και διαφορών τόξων

Αρκετές φορές σε προβλήματα μηχανικής χρειάζονται οι τύποι αναγωγής μιας τριγωνομετρικής συνάρτησης του αθροίσματος ή της διαφοράς γωνιών σε τριγωνομετρικές συναρτήσεις των γωνιών. Τους τύπους αυτούς μπορούμε να τους παράγουμε εύκολα χρησιμοποιώντας γινόμενα εκθετικών. Ξεκινάμε από την φόρμουλα

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (\text{A'.4})$$

και την εφαρμόζουμε για το άθροισμα

$$e^{i(\theta+\phi)} = e^{i\theta} e^{i\phi} \quad (\text{A'.5})$$

και ύστερα αναπτύσσουμε τα δύο μέλη

$$\begin{aligned}\cos(\theta + \phi) + i \sin(\theta + \phi) &= (\cos \theta + i \sin \theta) (\cos \phi + i \sin \phi) \\ &= (\cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi) + i (\sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi)\end{aligned}\quad (\text{A'.6})$$

Εξισώνοντας το πραγματικό και το φανταστικό μέρος παίρνουμε

$$\sin(\theta + \phi) = \sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi \quad (\text{A'.7})$$

$$\cos(\theta + \phi) = \cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi \quad (\text{A'.8})$$

Θέτοντας $\phi \rightarrow -\phi$ και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι το συνημίτονο είναι άρτια συνάρτηση ($\cos(-\phi) = \cos(\phi)$) και το ημίτονο περιττή ($\sin(-\phi) = -\sin(\phi)$) υπολογίζουμε τις διαφορές

$$\sin(\theta - \phi) = \sin \theta \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \quad (\text{A'.9})$$

$$\cos(\theta - \phi) = \cos \theta \cos \phi + \sin \theta \sin \phi \quad (\text{A'.10})$$

Για τον υπολογισμό της εφαπτομένης του αθροίσματος διαιρούμε τις (A'.7), (A'.8) κατά μέλη

$$\begin{aligned}\tan(\theta + \phi) &= \frac{\sin(\theta + \phi)}{\cos(\theta + \phi)} = \frac{\frac{\sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi}{\cos \theta \cos \phi}}{\frac{\cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi}{\cos \theta \cos \phi}} \Rightarrow \\ \tan(\theta + \phi) &= \frac{\tan \theta + \tan \phi}{1 - \tan \theta \tan \phi}\end{aligned}\quad (\text{A'.11})$$

Επαναλαμβάνοντας την διαίρεση με τις (A'.9), (A'.10) παίρνουμε

$$\tan(\theta - \phi) = \frac{\tan \theta - \tan \phi}{1 + \tan \theta \tan \phi} \quad (\text{A'.12})$$

A'.2 Υπερβολικές συναρτήσεις

Οι υπερβολικές συναρτήσεις ορίζονται σε αναλογία με τις τριγωνομετρικές

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (\text{A'.13})$$

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \quad (\text{A'.14})$$

και μπορούμε εύκολα να δείξουμε χρησιμοποιώντας τους ορισμούς ότι ικανοποιούν ανάλογες ταυτότητες

$$\begin{aligned}\cosh^2 x - \sinh^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4} - \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4} = 1 \Rightarrow \\ \cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1\end{aligned}\quad (\text{A'.15})$$

Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς μπορούμε να εκφράσουμε τις αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις με λογαρίθμους. Για παράδειγμα το $\operatorname{arccosh}x$ μπορεί να εκφραστεί ως εξής: Έστω $y = \operatorname{arccosh}x$ τότε

$$\begin{aligned}\cosh y = x &\Rightarrow \frac{e^y + e^{-y}}{2} = x \Rightarrow e^y + \frac{1}{e^y} - 2x = 0 \Rightarrow e^{2y} - 2x e^y + 1 = 0 \Rightarrow \\ e^y &= x + \sqrt{x^2 - 1} \Rightarrow y = \ln \left(x \pm \sqrt{x^2 - 1} \right)\end{aligned}$$

Επιλέγοντας την ρίζα με το + (η αρνητική δίνει το ίδιο αποτέλεσμα) και αντικαθιστώντας τον ορισμό του y παίρνουμε

$$\operatorname{arccosh}x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right) \quad (\text{A'.16})$$

Παρόμοια για το υπερβολικό ημίτονο, θέτουμε $y = \operatorname{arcsinh}x$ και

$$\begin{aligned}\sinh y = x &\Rightarrow \frac{e^y - e^{-y}}{2} = x \Rightarrow e^y - \frac{1}{e^y} - 2x = 0 \Rightarrow e^{2y} - 2x e^y - 1 = 0 \Rightarrow \\ e^y &= x + \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow y = \ln \left(x \pm \sqrt{x^2 + 1} \right)\end{aligned}$$

Επιλέγοντας την ρίζα με το θετικό πρόσημο (αυτή με το αρνητικό δεν είναι αποδεκτή διότι το δεύτερο μέρος γίνεται αρνητικό ενώ το πρώτο είναι πάντα θετικό)

$$\operatorname{arcsinh}x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right) \quad (\text{A'.17})$$

Επίσης τα τόξα φανταστικών γωνιών εκφράζονται συναρτήσει υπερβολικών για παράδειγμα

$$\arctan(ix) = \frac{e^{-x} - e^x}{e^{-x} + e^x} = -\operatorname{arctanh}x \quad (\text{A'.18})$$

και παρόμοια

$$\operatorname{arctanh}(ix) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}} = \arctan x \quad (\text{A'.19})$$

Α'.3 Παράγωγοι

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x \quad (\text{A'.20})$$

$$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x \quad (\text{A'.21})$$

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x} \quad (\text{A'.22})$$

$$\frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x \quad (\text{A'.23})$$

$$\frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x \quad (\text{A'.24})$$

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\text{A'.25})$$

$$\frac{d}{dx} \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\text{A'.26})$$

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2} \quad (\text{A'.27})$$

Α'.4 Ολοκληρώματα

$$\int dx \cos x = \sin x \quad (\text{A'.28})$$

$$\int dx \sin x = -\cos x \quad (\text{A'.29})$$

$$\int dx \frac{1}{x} = \ln x \quad (\text{A'.30})$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arcsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \quad (\text{A'.31})$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arccosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) \quad (\text{A'.32})$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) \quad (\text{A'.33})$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctanh}\left(\frac{x}{a}\right) \quad (\text{A'.34})$$

$$\int_0^{\pi/2} d\phi \sin^{2n} \phi = \frac{1.3.5 \dots (2n-1) \pi}{2.4.6 \dots (2n) 2} \quad (\text{A'.35})$$

Α'.5 Ανάπτυγμα σε σειρά Taylor

Η σειρά Taylor είναι ένας τρόπος ανάπτυξης μιας συνάρτησης σε σειρά γύρω από ένα σημείο. Για μια συνάρτηση $f(x)$ και στην περιοχή του σημείου $x = a$ έχουμε

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \dots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n + \dots \quad (\text{A'.36})$$

Ειδικά στην περίπτωση $a = 0$ η σειρά ονομάζεται σειρά Maclaurin. Μερικά παραδείγματα

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad (\text{A'.37})$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \dots \quad (\text{A'.38})$$

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \dots \quad (\text{A'.39})$$

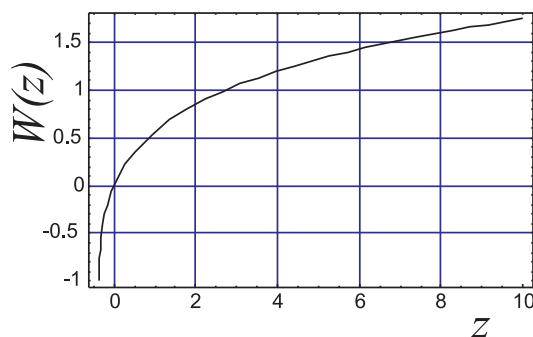
$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{1}{2}a(a-1)x^2 + \frac{1}{6}a(a-1)(a-2)x^3 + \dots \quad (\text{A'.40})$$

Α'.6 Η συνάρτηση του Lambert

Αρκετά προβλήματα κλασικής μηχανικής ανάγονται στην επίλυση της εξίσωσης

$$x e^x = z \quad (\text{A'.41})$$

όπου z γνωστή σταθερά. Η λύση αυτής της εξίσωσης είναι μια γενίκευση του λογαρίθμου γνωστή ως συνάρτηση του Lambert ή ως productlog και συμβολίζεται συνήθως με το $W(z)$. Η συνάρτηση $W(z)$ έχει πραγματικές τιμές για $z > -1/e$. Η γραφική της παράσταση φαίνεται στο Σχήμα Α'.1. Με κατάλληλο μετασχηματισμό στο χρόνο μπορούμε να ανάγουμε την γενική



Σχήμα Α'.1: Γραφική παράσταση της συνάρτησης του Lambert $W(z)$.

εξίσωση

$$e^{ax} + bx + c = 0 \quad (\text{A'.42})$$

στην (A'.41) και η λύση της είναι

$$x = -\frac{c}{b} - \frac{1}{a} W\left(\frac{a}{b} \exp\left(-\frac{ac}{b}\right)\right) \quad (\text{A'.43})$$

A'.7 Διαφορικοί τελεστές

Σε αρκετά προβλήματα κλασικής μηχανικής απαιτείται ο υπολογισμός παραστάσεων οι οποίες περιέχουν διαφορικούς τελεστές, για αυτές τις περιπτώσεις μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα παρακάτω. Οι υπολογισμοί αναφέρονται σε ένα γενικό σύστημα συντεταγμένων (x_1, x_2, x_3) όπου οι συντελεστές κλίμακας στην κατεύθυνση των μοναδιαίων διανυσμάτων \hat{e}_i δίνονται από τα h_i $i = 1, 2, 3$ [11]. Οι συντελεστές κλίμακας για τα πιο ευρέως χρησιμοποιούμενα συστήματα συντεταγμένων είναι

καρτεσιανές (x, y, z)	$h_x = 1, h_y = 1, h_z = 1$
σφαιρικές (r, θ, ϕ)	$h_r = 1, h_\phi = r, h_\theta = r \sin \phi$
κυλινδρικές (ρ, ϕ, z)	$h_\rho = 1, h_\phi = r, h_z = 1$

Η κλίση μιας βαθμωτής ποσότητας $\vec{\nabla}V(\vec{r})$ σε ένα γενικό σύστημα συντεταγμένων με διάνυσμα θέσης $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$ ορίζεται ως εξής

$$\vec{\nabla}V(\vec{r}) = \frac{\hat{e}_1}{h_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\hat{e}_2}{h_2} \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\hat{e}_3}{h_3} \frac{\partial}{\partial x_3} \quad (\text{A'.44})$$

Η περιστροφή μια διανυσματικής ποσότητας $\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r})$ δίνεται από

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) = \begin{vmatrix} h_1 \hat{e}_1 & h_2 \hat{e}_2 & h_3 \hat{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ h_1 F_1 & h_2 F_2 & h_3 F_3 \end{vmatrix} \quad (\text{A'.45})$$

Η τελευταία σχέση δεν είναι σωστή με αυστηρό μαθηματικό τρόπο, είναι απλώς ένας μνημονικός κανόνας, για να δώσει το σωστό αποτέλεσμα πρέπει η ορίζουσα να αναπτυχθεί ως προς την πρώτη γραμμή.