14. Μέθοδοι επίλυσης κυκλωμάτων εναλλασσομένου ρεύματος

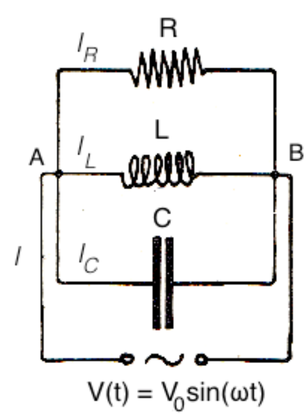
Όταν λέμε επίλυση ενός ηλεκτρικού κυκλώματος εννοούμε την εύρεση των ρευμάτων ή/και των τάσεων στους διάφορους κλάδους του κυκλώματος. Υπάρχουν τρείς μέθοδοι για την επίλυση κυκλωμάτων εναλλασσομένου ρεύματος: η αλγεβρική, η γεωμετρική και η μέθοδος των μιγαδικών μεγεθών.

Η αλγεβρική μέθοδος

Στην μέθοδο αυτή, χρησιμοποιούμε τις στιγμιαίες τιμές των ρευμάτων και τάσεων. Εάν δίδεται ότι το συνολικό ρεύμα είναι $I = I_0 \sin(\omega t)$, τότε για την τάση γράφουμε $V = V_0 \sin(\omega t + \phi)$ και αντίστροφα. Για τις στιγμιαίες τιμές, εφαρμόζουμε τους κανόνες του Kirchhoff. Τα ζητούμενα μεγέθη προκύπτουν από την επίλυση των αλγεβρικών εξισώσεων του προβλήματος.

Παράδειγμα

Δίδεται το κύκλωμα RLC σε παράλληλη σύνδεση, όπως στο Σχήμα. Εάν $V = V_0 \sin\omega t$, να βρεθεί η ένταση του ρεύματος σε κάθε κλάδο, το συνολικό ρεύμα, η εμπέδιση του κυκλώματος και η διαφορά φάσης μεταξύ του συνολικού ρεύματος και της τάσης.



Έστω I η συνολική, και I_R, I_L, I_C η ένταση του ρεύματος που διαρρέει τα στοιχεία R, L, C, αντίστοιχα. Για τις στιγμιαίες τιμές των ρευμάτων, από τον πρώτο κανόνα του Kirchhoff στον κόμβο A έχουμε

$$I = I_R + I_L + I_C \tag{1}$$

Στους τρείς κλάδους εφαρμόζεται η ίδια τάση $V(t)$. Άρα, για την αντίσταση έχουμε

$$I_R = \frac{V(t)}{R} = \frac{V_0}{R}\sin\omega t$$

Για τον πυκνωτή

$$I_C = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}(CV) = CV_0\frac{d}{dt}\sin\omega t \quad \Rightarrow \quad I_C = \omega C V_0 \cos\omega t$$

Για το πηνίο, από τον δεύτερο κανόνα του Kirchhoff έχουμε

$$V - L\frac{dI_L}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad dI_L = \frac{V(L)}{L}dt = \frac{V_0}{L}\sin\omega t\, dt \quad \Rightarrow \quad I_L = \frac{V_0}{L}\int \sin\omega t\, dt = -\frac{V_0}{\omega L}\cos\omega t$$

Από την (1) βρίσκουμε ότι

$$I(t) = \frac{V_0}{R}\sin\omega t + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)V_0\cos\omega t \qquad (2)$$

Μπορούμε να γράψουμε το συνολικό ρεύμα με την μορφή $I(t) = I_0\sin(\omega t + \varphi)$. Επομένως, πρέπει να προσδιορίσουμε τις σταθερές I_0 και φ. Έχουμε

$$I(t) = I_0\sin(\omega t + \phi) = I_0\cos\phi\sin\omega t + I_0\sin\phi\cos\omega t \qquad (3)$$

Προκειμένου οι εκφράσεις (2) και (3) να είναι ίσες κάθε χρονική στιγμή, πρέπει οι συντελεστές του ημιτόνου και συνημιτόνου να είναι ίσοι. Άρα

$$\begin{cases} I_0\sin\varphi = \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)V_0 & (4) \\ I_0\cos\varphi = \frac{V_0}{R} & (5) \end{cases}$$

Υψώνοντας την (4) και (5) στο τετράγωνο και προσθέτοντας παίρνουμε

$$I_0^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = \left(\frac{V_0}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2 V_0^2 = V_0^2\left[\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2\right]$$

Άρα

$$I_0 = V_0\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}$$

Η εμπέδιση του κυκλώματος είναι

$$Z = \frac{V_0}{I_0} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}}$$

Η εφαπτομένη της διαφοράς φάσης προκύπτει με διαίρεση της (4) με την (5)

$$\tan\varphi = \frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{\frac{1}{R}} = \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) R \quad \Rightarrow \quad \varphi = \tan^{-1}\left\{\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) R\right\}$$