

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Ενδιάμεση εξέταση, 15 Νοεμβρίου 2018

Όνοματεπώνυμο:

Αριθμός μητρώου:

Κάθε υποερώτημα βαθμολογείται με άριστα το 1. Απαγορεύεται η χρήση ηλεκτρονικών συσκευών.

Θέμα 1

(α) Με τι ισούται η παράμετρος a ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{ax^2 - 4a}{x - 2}, & x > 2 \\ ax^2 - 3a + 1, & x < 2 \end{cases}$$

να έχει όριο για $x = 2$;

(β) Δείξτε ότι η εξίσωση $x^3 + 2x - 5 = 0$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα.

Θέμα 2

(α) Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x)$ με πεδίο ορισμού και τιμών το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Αν η $f(x)$ είναι άρτια τότε η $f'(x)$ είναι πάντα άρτια, πάντα περιττή ή μερικές φορές είναι άρτια και μερικές φορές είναι περιττή; Επιλέξτε μια απάντηση και αποδείξτε τη.

(β) Βρείτε το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{\sqrt{n}3^n}$.

Θέμα 3

(α) Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x^x$, $x > 0$.

(β) Να βρεθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$.

Θέμα 4

(α) Δίνεται η ακολουθία:

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$$

Υποθέστε ότι η παραπάνω ακολουθία συγκλίνει και βρείτε το όριό της.

(β) Βρείτε τη σειρά MacLaurin της συνάρτησης $g(x) = \ln(1 + 3x^2)$.

Θέμα 5

(α) Αν ισχύει ότι $x^2 + y^2 = a^2$, βρείτε τη $\frac{d^2y}{dx^2}$. Εκφράστε το τελικό αποτέλεσμα συναρτήσει μόνο του a και του y .

(β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 5x^2 - 8x + 3$. Βρείτε τις τιμές του x που αντιστοιχούν στα πιθανά κρίσιμα σημεία της, στα πιθανά τοπικά ελάχιστα και μέγιστα της, καθώς και στα πιθανά σημεία καμπής της.