ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2018

Θέμα 1

(α) Για να υπάρχει όριο στο $x = 2$ πρέπει τα πλευρικά όρια στο $x = 2$ να είναι ίσα, δηλαδή

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \tag{1}$$

Έτσι έχουμε $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(ax^2 - 3a + 1) = a4 - 3a + 1 = a + 1$ και $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{ax^2 - 4a}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{a(x^2-4)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{a(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} a(x+2) = 4a$.

Αντικαθιστούμε στην (1) και έχουμε $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \Rightarrow a + 1 = 4a \Rightarrow a = \frac{1}{3}$.

(β) Έστω $f(x) = x^3 + 2x - 5$. Αφού $f(0) = -5 < 0$ και $f(2) = 7 > 0$, το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής μάς λέει ότι υπάρχει μία ρίζα $f(x) = 0$ μεταξύ του 0 και του 2. Επειδή $f'(x) = 3x^2 + 2 > 0$ για όλα τα x, έπεται ότι η $f(x)$ είναι αύξουσα και συνεπώς μπορεί να πάρει την τιμή 0 το πολύ μία φορά. Ο συνδυασμός των δύο παραπάνω προτάσεων συνεπάγεται ότι η $f(x)$ παίρνει την τιμή 0 ακριβώς μία φορά, άρα η $x^3 + 2x - 5 = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα.

Θέμα 2

(α) Αφού η συνάρτηση $f(x)$ είναι άρτια, ισχύει ότι

$$f(-x) = f(x) \tag{2}$$

Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της σχέσης αυτής έχουμε $(f(-x))' = (f(x))' \Rightarrow (f'(-x)) \cdot (-x)' = (f'(x)) \Rightarrow -f'(-x) = f'(x) \Rightarrow f'(-x) = -f'(x)$ που μάς λέει ότι η συνάρτηση f' είναι περιττή.

(β) Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του λόγου έχουμε ότι: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(x+5)^{n+1}}{3^{n+1}\sqrt{n+1}} \frac{3^n\sqrt{n}}{(x+5)^n}\right| = \frac{1}{3}\left(\sqrt{\frac{n}{n+1}}\right)|x+5|$ και βλέπουμε ότι $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = |x+5|/3$. Το όριο αυτό είναι μικρότερο του 1 όταν $|x+5| < 3$ δηλαδή όταν $-8 < x < -2$. Η σειρά συνεπώς συγκλίνει στο διάστημα $-8 < x < -2$, όμως πρέπει να εξετάσουμε τη συμπεριφορά της και στα άκρα του διαστήματος αυτού.

Για $x = -2$ η σειρά γίνεται $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{3^n\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ η οποία είναι αποκλίνουσα p-σειρά.

Για $x = -8$ η σειρά γίνεται $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{3^n\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ η οποία συγκλίνει λόγω του κριτηρίου εναλλασσόμενης σειράς γιατί η ακολουθία $u_n = 1/\sqrt{n}$ αποτελείται αποκλειστικά από μη μηδενικούς όρους, είναι φθίνουσα και το όριο της είναι 0 όταν $n \to \infty$.

Επομένως η δοθείσα δυναμοσειρά συγκλίνει στο διάστημα $-8 \le x < -2$.

Θέμα 3

(α) Έχουμε $f(x) = x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}$.

Παραγωγίζοντας παίρνουμε: $f'(x) = (x^x)' = (e^{x\ln x})' = e^{x\ln x}(x \ln x)' = e^{x\ln x}(x' \ln x + x(\ln x)') = e^{x\ln x}(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1)$.

(β) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης περιγράφεται από τους περιορισμούς $x > 0$ και $x \neq 1$.

Οι αλγεβρικές πράξεις δίνουν $f(x) = \dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}$.

Επειδή $\lim_{x\to 1}(x - 1 - \ln x) = \lim_{x\to 1}(x-1)\ln x = 0$ εφαρμόζουμε τον κανόνα L' Hopital και έχουμε:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1-\ln x)'}{((x-1)\ln x)'} = \lim_{x\to 1}\frac{1-\dfrac{1}{x}}{\ln x + 1 - \dfrac{1}{x}} =$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln x + x - 1}.$$

Επειδή $\lim_{x\to 1}(x-1) = \lim_{x\to 1}(x\ln x + x - 1) = 0$ εφαρμόζουμε ξανά τον κανόνα L' Hopital και έχουμε:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln x + x - 1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)'}{(x\ln x + x - 1)'} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x + x\dfrac{1}{x} + 1} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x + 2} = \frac{1}{2}.$$

Θέμα 4

(α) Αφού η ακολουθία συγκλίνει, ισχύει ότι $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \ell$. Τότε από την εξίσωση $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}(a_n^2 - a_n + 1) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n^2 - \lim_{n\to\infty} a_n + 1 \Rightarrow \ell = \ell^2 - \ell + 1 \Rightarrow \ell^2 - 2\ell + 1 = 0 \Rightarrow (\ell-1)^2 = 0 \Rightarrow \ell = 1$. Επομένως το όριο της δοθείσας ακολουθίας είναι το 1.

(β) Θα βρούμε τη σειρά της $g(x) = \ln(1+x)$ και μετά θα αντικαταστήσουμε το x με το $3x^2$. Για τη $g(x)$ ισχύει:

$g'(x) = \dfrac{1}{1+x}$ με $g'(0) = 1$.

$g''(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2}$ με $g''(0) = -1$.

$g'''(x) = \dfrac{2}{(1+x)^3}$ με $g'''(0) = 2$.

$g^{(4)}(x) = -\dfrac{6}{(1+x)^4}$ με $g^{(4)}(0) = -6$.

Παρατηρούμε δηλαδή ότι $g^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!$ με $n \geq 1$. Επομένως από το θεώρημα Taylor έχουμε $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^{(n)}(0)}{n!}x^n = g(0) + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{n!}x^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$.

Τέλος, αντικαθιστούμε το x με το $3x^2$ και παίρνουμε $\ln(1+3x^2) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(3x^2)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}3^n\frac{x^{2n}}{n}$.

Θέμα 5

(α) Παραγωγίζουμε ως προς x όλους τους όρους της εξίσωσης $x^2 + y^2 = a^2$ και έχουμε: $2x + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\dfrac{x}{y}$. Κατόπιν παραγωγίζουμε ως προς x την προκύπτουσα έκφραση για την y' και παίρνουμε: $y'' = -\dfrac{y \cdot 1 - x \cdot y'}{y^2} = -\dfrac{y - x\left(-\dfrac{x}{y}\right)}{y^2} = -\dfrac{y^2 + x^2}{y^3} = -\dfrac{a^2}{y^3}$.

(β) $f'(x) = 3x^2 - 10x - 8 = (3x+2)(x-4)$ και $f''(x) = 6x - 10$. Τα κρίσιμα σημεία είναι $x = -\dfrac{2}{3}$ και $x = 4$. Επειδή $f''\left(-\dfrac{2}{3}\right) = -14 < 0$ έπεται ότι το $x = -\dfrac{2}{3}$ δίνει τοπικό μέγιστο. Επίσης είναι $f''(4) = 14 < 0$ επομένως το $x = 4$ δίνει τοπικό ελάχιστο. Τέλος, υπάρχει σημείο καμπής στο $x = \dfrac{5}{3}$.