

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Εξεταστική περίοδος Ιανουαρίου 2019

Κάθε υποερώτημα βαθμολογείται με άριστα το 1. Απαγορεύεται η χρήση ηλεκτρονικών συσκευών.

Θέμα 1

(α) Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1, & x < 0 \\ cx + d, & 0 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{x+8}, & x > 1 \end{cases}$$

Προσδιορίστε τα c και d έτσι ώστε η f να είναι παντού συνεχής.

(β) Σωματίδιο κινείται στο επίπεδο (x, y) σύμφωνα με τις εξισώσεις $x = t^2 + 2t$ και $y = 2t^3 - 6t$, όπου t ο χρόνος. Βρείτε την κλίση της ευθείας που εφάπτεται στην τροχιά του όταν $t = 0$.

Θέμα 2

(α) Βρείτε το όριο της ακολουθίας $a_n = \tanh n$.

(β) Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$.

Θέμα 3

(α) Να βρεθεί η παράγωγος κατεύθυνσης της συνάρτησης $f(x, y, z) = 3xy + z^2$ στο σημείο $(1, -2, 2)$ στην κατεύθυνση που ορίζεται από το σημείο αυτό προς την αρχή των αξόνων.

(β) Αν $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, βρείτε την τιμή της $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}$.

Θέμα 4

(α) Υπολογίστε τις f_x και f_y αν $f(x, y) = \int_y^x e^{t^2} dt$.

(β) Υπολογίστε το $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$.

Θέμα 5

(α) Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες $y = x^2$ και $y = x^3$.

(β) Υπολογίστε το άθροισμα $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{5^n} \right)$.