ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΕΞΕΤΑΣΗΣ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2019

Θέμα 1

(α) Αφού $\lim_{x\to 0^-} 3x^2 - 1 = -1$, η τιμή του $cx + d$ για $x = 0$ πρέπει να είναι -1, από όπου προκύπτει ότι $d = -1$. Επειδή $\lim_{x\to 1^+} \sqrt{x+8} = 3$, η τιμή του $cx + d$ στο $x = 1$ πρέπει να είναι 3, από όπου προκύπτει ότι $c(1) - 1 = 3 \Rightarrow c = 4$.

(β) Η ζητούμενη κλίση είναι η παράγωγος dy/dx. Επειδή η πρώτη εξίσωση μπορεί να λυθεί ως προς t και το προκύπτον αποτέλεσμα να αντικαταστήσει το t στη δεύτερη εξίσωση, συνεπάγεται ότι το y είναι συνάρτηση του x. Έχουμε $\frac{dy}{dt} = 6t^2 - 6$, $\frac{dx}{dt} = 2t + 2$, $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2t+2}$ (το τελευταίο αποτέλεσμα προκύπτει εύκολα αν θυμηθούμε ότι ισχύει $\frac{du}{dv} = \frac{1}{du/dv}$). Επομένως από τον κανόνα της αλυσιδωτής παραγώγισης παίρνουμε $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = 6(t^2 - 1)\frac{1}{2(t+1)} = 3(t-1)$. Άρα όταν $t = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -3$.

Θέμα 2

(α) $a_n = \frac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}} = \frac{1 - e^{-2n}}{1 + e^{-2n}} \to \frac{1-0}{1+0} = 1$.

(β) Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του λόγου παίρνουμε: $\lim_{x\to\infty} \frac{[(n+1)!]^2|x|^{n+1}/(2n+2)!}{(n!)^2|x|^n/(2n)!} = \lim_{x\to\infty} |x|\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{|x|}{4}$. Επομένως η ακτίνα σύγκλισης ισούται με 4.

Θέμα 3

(α) Το διάνυσμα από το δοθέν σημείο προς την αρχή των αξόνων είναι το $\boldsymbol{v} = (-1, 2, -2)$. Το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση αυτή είναι το $\hat{\boldsymbol{v}} = \frac{\boldsymbol{v}}{||\boldsymbol{v}||} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$. Η παράγωγος κατεύθυνσης στο σημείο (1,-2,2) στην κατεύθυνση $\hat{\boldsymbol{v}}$ είναι $D_{\hat{\boldsymbol{v}}}f(1,-2,2) = \nabla f(1,-2,2)\cdot\hat{\boldsymbol{v}}$. Όμως $\nabla f(x,y,z) = (3y, 3x, 2z) \Rightarrow \nabla f(1,-2,2) = (-6,3,4)$. Επομένως έχουμε ότι $D_{\hat{\boldsymbol{v}}}f(1,-2,2) = \nabla f(1,-2,2)\cdot\hat{\boldsymbol{v}} = (-6,3,4)\cdot\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) = 2 + 2 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$.

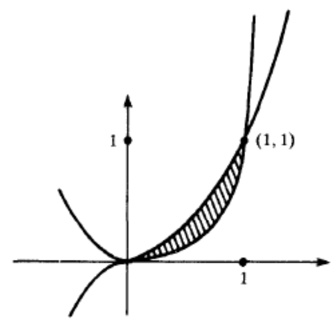
(β) Επειδή $z = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2}$ και $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}\frac{2y}{x^2+y^2} = \frac{y}{x^2+y^2}$. Επομένως προκύπτει ότι $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2} = 1$.

Θέμα 4

(α) Όταν παραγωγίζουμε κατά x, τα y είναι σταθερά, δηλαδή $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = \frac{\partial}{\partial x}\int_y^x e^{t^2}dt = e^{x^2}$.

Όμοια για την f_y έχουμε $\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = \frac{\partial}{\partial y}\int_y^x e^{t^2}dt = -\frac{\partial f}{\partial y}\int_x^y e^{t^2}dt = -e^{y^2}$.

(β) $\int \frac{1}{x\ln^2 x}dx = \int (\ln x)^{-2}\left(\frac{1}{x}\right)dx = -(\ln x)^{-1}$. Επομένως έχουμε ότι $\int_2^\infty \frac{1}{x\ln^2 x}dx = \lim_{v\to\infty}\int_2^v \frac{1}{x\ln^2 x}dx = \lim_{v\to\infty} -(\ln x)^{-1}\Big|_2^v = \lim_{v\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln v} + \frac{1}{\ln 2}\right) = \frac{1}{\ln 2}$.



Θέμα 5

(α) Επιλύοντας την εξίσωση $x^2 = x^3$ βρίσκουμε ότι οι δύο καμπύλες τέμνονται στα σημεία (0, 0) και (1, 1). Μεταξύ των σημείων αυτών η $y = x^2$ βρίσκεται πάνω από την $y = x^3$ (βλ. το παραπάνω σχήμα). Επομένως το ζητούμενο εμβαδόν είναι $\int_0^1 (x^2 - x^3)dx = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$.

(β) Η δοθείσα σειρά συγκλίνει ως άθροισμα δύο γεωμετρικών σειρών με λόγους μικρότερους της μονάδας (1/2 για την πρώτη και 1/5 για τη δεύτερη). Επομένως το ζητούμενο άθροισμα είναι το άθροισμα της $\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$ και της $\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{5^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{5}{4}$. Συνεπώς το ζητούμενο άθροισμα είναι $2 + \frac{5}{4} = \frac{13}{4}$.