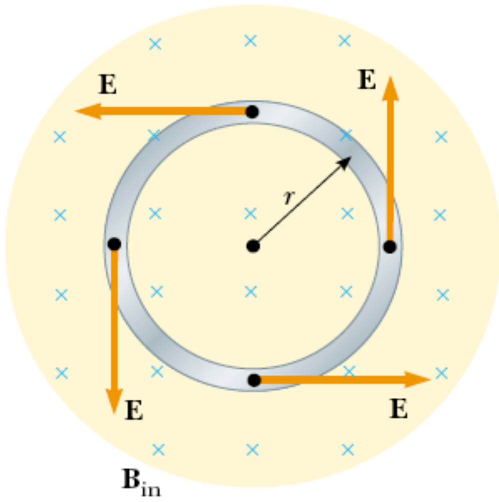
Γενική μορφή του νόμου του Faraday

Ο κυκλικός βρόχος του Σχήματος έχει ακτίνα r και βρίσκεται σε μαγνητικό πεδίο κάθετο στό επίπεδό του. Εάν το μαγνητιό πεδίο Β μεταβληθεί (αυξηθεί) συναρτήσει του χρόνου, τότε στον βρόχο επάγεται ηλεκτρικό πεδίο κατά την εφαπτομενική διεύθυνση. Σύμφωνα με τον νόμο του Faraday:



$$E_{ind} = -\frac{d\Phi_m}{dt}$$

Γενικά, η ΗΕΔ που αναπτύσσεται σε ένα κλειστό περίγραμμα C ορίζεται ως

$$HE\Delta = E_{ind} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

Έτσι, καταλήγουμε στη γενική μορφή του νόμου του Faraday:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi_m}{dt}$$

από την οποία φαίνεται ότι “κάθε χρονικά μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο δημιουργεί ηλεκτρικό πεδίο”.

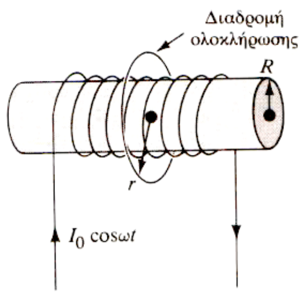
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 31.7 Το ηλεκτρικό πεδίο ενός σωληνοειδούς

Ένα σωληνοειδές μεγάλου μήκους και ακτίνας R αποτελείται από n σπείρες ανά μονάδα μήκους και διαρρέεται από ρεύμα που μεταβάλλεται συναρτήσει τού χρόνου αρμονικά ως $I = I_0 \cos \omega t$, όπου I_0 είναι η μέγιστη τιμή τού ρεύματος και ω είναι η κυκλική συχνότητα τής πηγής τροφοδοσίας (βλ. Σχήμα 31.14). (α) Υπολογίστε την ένταση τού ηλεκτρικού πεδίου έξω από το σωληνοειδές, σε απόσταση r από τον άξονά του.

Λύση Παίρνουμε ένα σημείο έξω από το σωληνοειδές και θεωρούμε ότι η διαδρομή πάνω στην οποία θα υπολογίσουμε το κλειστό γραμμικό ολοκλήρωμα είναι κύκλος τού οποίου το κέντρο κείται πάνω στον άξονα τού σωληνοειδούς (Σχήμα 31.14). Από τη συμμετρία τών δεδομένων τού προβλήματος βλέπουμε ότι το μέτρο τού $\boldsymbol{E}$ είναι σταθερό πάνω στην κυκλική διαδρομή και η διεύθυνσή του εφάπτεται σε αυτήν. Η ροή μαγνητικού πεδίου που διαπερνά την επιφάνεια την οποία περικλείει η διαδρομή είναι $BA = B(\pi R^2)$. Εφαρμόζουμε την Εξίσωση 31.9 και παίρνουμε

$$\oint E \cdot ds = -\frac{d}{dt}[B(\pi R^2)] = -\pi R^2 \frac{dB}{dt}$$

$$E(2\pi r) = -\pi R^2 \frac{dB}{dt}$$



Σχήμα 31.14 (Παράδειγμα 31.7) Ένα σωληνοειδές μεγάλου μήκους διαρρέεται από αρμονικά μεταβαλλόμενο ρεύμα, $I = I_0 \cos \omega t$. Ηλεκτρικό πεδίο επάγεται μέσα και έξω από το σωληνοειδές.

Από την Εξίσωση 30.20 ξέρουμε ότι το μαγνητικό πεδίο μέσα σε ένα σωληνοειδές μεγάλου μήκους είναι $B = \mu_0 n I$ και μάς έχει δοθεί ότι $I = I_0 \cos \omega t$. Έτσι βρίσκουμε

$$E(2\pi r) = -\pi R^2 \mu_0 n I_0 \frac{d}{dt}(\cos \omega t) = \pi R^2 \mu_0 n I_0 \omega \sin \omega t$$

$$E = \frac{\mu_0 n I_0 \omega R^2}{2r} \sin \omega t \qquad (\text{για } r > R)$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι και το επαγόμενο ηλεκτρικό πεδίο μεταβάλλεται αρμονικά ως προς τον χρόνο, ενώ το πλάτος του έξω από το σωληνοειδές μεταβάλλεται ως $1/r$.

(b) Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο μέσα στο σωληνοειδές σε απόσταση r από τον άξονα.

Λύση Η ροή μαγνητικού πεδίου που διαπερνά την επιφάνεια η οποία περιέχεται μέσα σε κλειστή κυκλική διαδρομή με κέντρο πάνω στον άξονα και με περίμετρο η οποία έχει απόσταση r γύρω από αυτόν είναι $B(\pi r^2)$.

Ακολουθώντας τα ίδια βήματα όπως και στην (a) βρίσκουμε

$$E(2\pi r) = -\pi r^2 \frac{dB}{dt} = \pi r^2 \mu_0 n I_0 \omega \sin \omega t$$

$$E = \frac{\mu_0 n I_0 \omega}{2} r \sin \omega t \quad (\text{για } r < R)$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι *μέσα* στο σωληνοειδές το ηλεκτρικό πεδίο έχει αρμονική εξάρτηση από τον χρόνο και αυξάνεται γραμμικά συναρτήσει τού r.

Οι εξισώσεις του Maxwell

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\varepsilon\sigma}}{\varepsilon_0}$$ (Νόμος του Gauss στον Ηλεκτρισμό)

$$\oiint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$$ (Νόμος του Gauss στον Μαγνητισμό)

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi_m}{dt}$$ (Νόμος του Faraday)

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0\left(I + \varepsilon_0 \frac{d\Phi_e}{dt}\right)$$ (Νόμος των Ampère-Maxwell)

I: Ρεύμα αγωγιμότητας, $\varepsilon_0 \frac{d\Phi_e}{dt}$: Ρεύμα μετατώπισης

Αφού υπολογίσουμε το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο σε ένα σημείο του χώρου, η δύναμη που ασκείται σε ηλεκτρικό φορτίο στο σημείο αυτό γράφεται:
$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{\upsilon} \times \vec{B}$ και ονομάζεται δύναμη Lorentz.