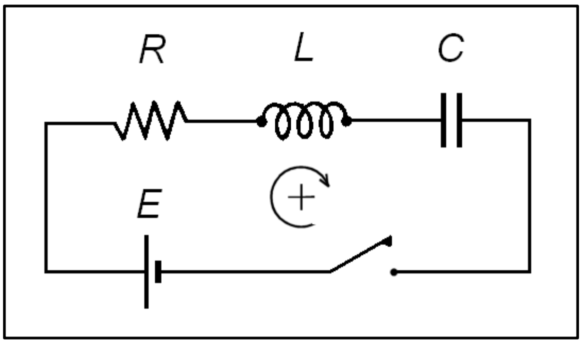
Μεταβατική συμπεριφορά του κυκλώματος RLC



Μόλις κλείσει ο διακόπτης, εφαρμόζουμε τον 2^o κανόνα του Kirchhoff

$$E - L\frac{dI}{dt} - \frac{Q}{C} = IR$$

ή

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = E$$

Παραγωγίζοντας ως προς τον χρόνο έχουμε

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = 0 \quad (1)$$

Η (1) είναι μία γραμμική ομογενής διαφορική εξίσωση, β' τάξης, με σταθερούς συντελεστές. Υποθέτουμε λύσης της μορφής $I = e^{at}$, όπου a είναι σταθερά. Τότε

$$\frac{dI}{dt} = ae^{at} = aI$$

$$\frac{d^2I}{dt^2} = a^2e^{at} = a^2I$$

Με αντικατάσταση στην (1) καταλήγουμε σε μία δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς a, $La^2 + Ra + \frac{1}{C} = 0$ η οποία έχει λύσεις

$$a = \frac{1}{2L}\left(-R \pm \sqrt{R^2 - 4L/C}\right) = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = -\gamma \pm \omega$$

όπου

$$\gamma = \frac{R}{2L}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

$$\omega = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Διακρίνουμε τις εξείς περιπτώσεις, ανάλογα με την τιμή της παραμέτρου γ ως προς την ω_0

(α) **Υποκρίσιμη κατάσταση**: $\gamma < \omega_0$

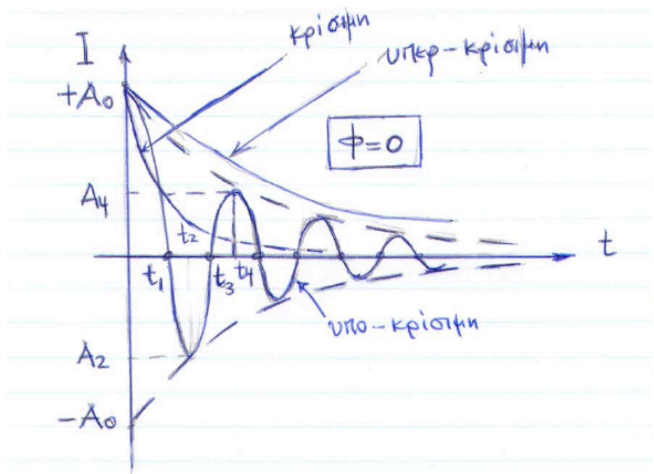
Αυτό συμβαίνει όταν $\frac{R}{2L} < \frac{1}{\sqrt{LC}}$ δηλαδή όταν $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$.

Τότε $a = -\gamma \pm i\omega$. Έστω $a_+ = -\gamma + i\omega$ και $a_- = -\gamma - i\omega$. Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης για το ρεύμα είναι

$$\begin{aligned} I(t) &= Ae^{a_+ t} + Be^{a_- t} = Ae^{-\gamma t + i\omega t} + Be^{-\gamma t - i\omega t} = e^{-\gamma t}\left(Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}\right) \\ &= A_0 e^{-\gamma t}\cos(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

όπου $A_0 = \frac{A}{2}e^{i\phi}$ (Άσκηση)

Η γραφική παράσταση του $I = I(t)$ δίδεται στο Σχήμα.



Παρατηρήσατε ότι το ρεύμα έχει περιοδική συμπεριφορά με πλάτος που μειώνεται εκθετικά συναρτήσει του χρόνου. Ισχύει ότι

$$\frac{I(0)}{I(T)} = \frac{A_0}{A_0 e^{-\gamma T}} = e^{\gamma T}$$

Η παράμετρος γ ονομάζεται **παράμετρος απόσβεσης** και περιγράφει την μείωση του πλάτους του ρεύματος συναρτήσει του χρόνου. Η παράμετρος ω_0 ονομάζεται **φυσική συχνότητα** του κυκλώματος και εκφράζει την συχνότητα ταλάντωσης ενός κυκλώματος LC.

Η "απόσβεση'' του κυκλώματος περιγράφεται ποσοτικά και με την ποσότητα $\delta = \gamma T$ η οποία ονομάζεται **λογαριθμική μείωση**.

(β) **Κρίσιμη κατάσταση**: $\gamma = \omega_0$

Αυτό συμβαίνει όταν $\dfrac{R}{2L} = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, δηλαδή όταν $R = 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$.

Τότε η $e^{-\gamma t}$ είναι μερική λύση της (1). Μία δεύτερη γραμμικά ανεξάρτητη λύση είναι η $te^{-\gamma t}$.
'Ετσι, η γενική λύση γράφεται $I(t) = Ae^{-\gamma t} + Bte^{-\gamma t} = (A + Bt)e^{-\gamma t}$

(α) **Υπερκρίσιμη κατάσταση:** $\gamma > \omega_0$

Αυτό συμβαίνει όταν $\dfrac{R}{2L} > \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, δηλαδή όταν $R > 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$.

Τότε $a = -\gamma \pm \omega$. Έστω $a_1 = -\gamma + \omega$ και $a_2 = -\gamma - \omega$. Η γενική λύση γράφεται

$$I(t) = Ae^{a_1 t} + Be^{a_2 t} = \left(Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}\right)e^{-\gamma t}$$