

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Εξεταστική περίοδος Σεπτεμβρίου 2019

Όνοματεπώνυμο:

Αριθμός μητρώου:

Κάθε υποερώτημα βαθμολογείται με άριστα το 1. Απαγορεύεται η χρήση ηλεκτρονικών συσκευών.

Θέμα 1

(α) Να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x}$.

(β) Αποδείξτε ότι η παράγωγος ως προς x της $\sinh^{-1} x$ ισούται με $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Θέμα 2

(α) Βρείτε τη σειρά MacLaurin της $f(x) = \cosh x$.

(β) Βρείτε το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

Θέμα 3

(α) Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα και τα σαγματικά σημεία της συνάρτησης $f(x, y) = x^3 - 12xy + y^3 + 5$.

(β) Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $f(x, y, z) = e^{x^2-y^2+z^2}$ στο σημείο $P(-1, 1, 1)$ κατά την κατεύθυνση του διανύσματος $\mathbf{u} = \hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$.

Θέμα 4

(α) Να βρεθεί η παράγωγος ως προς x της $\int_1^{3x^2} \sqrt{t^5 + 1} dt$.

(β) Να υπολογιστεί το αόριστο ολοκλήρωμα $\int \frac{x^2}{x^2 - 3x + 2} dx$.

Θέμα 5

(α) Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = x^2$ και την ευθεία $y = x$.

(β) Βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η σειρά $x + x^3 + x^5 + \dots$ συγκλίνει και για την περίπτωση αυτή εκφράστε το άθροισμά της συναρτήσει του x .