1/a) Επειδή $x = e^{\ln x}$ είναι $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(e^{\ln x}\right)^{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\sin x \ln x}$

Θέτω $t = \sin x \ln x$ και έχω:

$$\lim_{x\to 0} t = \lim_{x\to 0}(\sin x \ln x) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln x}{1}}{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} = -\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x\cos x}$$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x} = -1\cdot\frac{\sin 0}{\cos 0} = 0$$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x} = \lim\limits_{t\to 0} e^t = e^0 = 1$

1/β) Θέτω $y = \sinh x \Rightarrow \left(\sinh^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{(\sinh x)'} = \frac{1}{\cosh x}$ (1)

όπου αξιοποίησα ότι ισχύει $\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ όπου $y = f(x)$

Ισχύει $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \Rightarrow \cosh x = \sqrt{1+\sinh^2 x}$

Άρα η (1) δίνει $\left(\sinh^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$

οπότε $\left(\sinh^{-1} x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

2/a) $\cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = \frac{1}{2}\left[1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots - \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots\right)\right]$

$$= x + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

2/β) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x|^{2n+2}/(2n+2)!}{|x|^{2n}/(2n)!} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x|^2}{(2n+1)(2n+2)} = 0$ Άρα συγκλίνει για κάθε x.

3/α) Τα κρίσιμα σημεία είναι οι λύσεις του συστήματος

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 12y = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -12x + 3y^2 = 0$$ Από την πρώτη $\Rightarrow$

$y = \frac{1}{4}x^2$ οπότε αντικαθιστώντας στη δεύτερη $\Rightarrow -12x + 3\left(\frac{1}{4}x^2\right)^2 = 0 \Rightarrow$

$$3x\left(-4 + \frac{x^3}{16}\right) = 0 \Rightarrow x = 0, \; x^3 = 4^3 \Rightarrow x = 4$$

Για $x=0 \rightarrow y=0$ και για $x=4 \rightarrow y = \frac{1}{4}4^2 = 4$ οπότε τα κρίσιμα σημεία είναι τα $P_1(0,0)$ και $P_2(4,4)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y \quad \text{και} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -12$$

Άρα $\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 = 6x6y - (-12)^2 = 36xy - 144$

Για το $P_1(0,0)$ ισχύει $\Delta = -144 < 0 \Rightarrow P_1$ σαγματικό σημείο

" " $P_2(4,4)$ " $\Delta = 36 \cdot 4 \cdot 4 - 144 > 0$ και $\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{P_2} = 6 \cdot 4 = 24 > 0$

$\Rightarrow P_2$ τοπικό ελάχιστο

— · —

3/β) $D_{\vec{u}} f(P) = \hat{u} \cdot (\vec{\nabla} f)_P$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_P = \left[2x e^{x^2-y^2+z^2}\right]_{(-1,1,1)} = 2(-1)e^{1^2-1^2+1^2} = -2e$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_P = \left[-2y e^{x^2-y^2+z^2}\right]_{(-1,1,1)} = -2 \cdot 1 e^{1^2-1^2+1^2} = -2e$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_P = \left[2z e^{x^2-y^2+z^2}\right]_{(-1,1,1)} = 2 \cdot 1 e^{1^2-1^2+1^2} = 2e$$

$$(\vec{\nabla} f)_P = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k} = -2e\hat{i} - 2e\hat{j} + 2e\hat{k}$$

Επίσης $|\vec{u}| = \left[1^2 + 1^2 + (-2)^2\right]^{1/2} = \sqrt{6} \Rightarrow \hat{u} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k})$

Άρα τελικά έχουμε ότι η ζητούμενη είναι

$$\frac{1}{\sqrt{6}}(\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k})(-2e\hat{i}-2e\hat{j}+2e\hat{k}) = \frac{e}{\sqrt{6}}(-2-2-2\cdot 2) = -\frac{8e}{\sqrt{6}}.$$

—·—

4/α) Η παράγωγος είναι (σύμφωνα με το Θεμελιώδες Θεώρημα ΔΟΛ)

$$\left[(3x^2)^5+1\right]^{1/2}\cdot\frac{d(3x^2)}{dx} = \left[243x^{10}+1\right]^{1/2}(6x) = 6x\left(243x^{10}+1\right)^{1/2}.$$

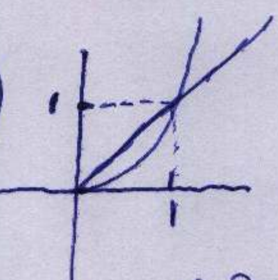
4/β) Από τη διαίρεση πολυωνύμων προκύπτει: $I = \int\left(1+\frac{3x-2}{x^2-3x+2}\right)dx$

$$\frac{3x-2}{x^2-3x+2} = \frac{3x-2}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2} \Rightarrow 3x-2 = A(x-2)+B(x-1) \Rightarrow$$

$$3x-2 = (A+B)x-2A-B \Rightarrow \{A+B=3,\ -2A-B=-2\} \Rightarrow \{A=-1,\ B=4\}$$

Άρα $I = \int\left(1-\frac{1}{x-1}+\frac{4}{x-2}\right)dx = x-\ln|x-1|+4\ln|x-2|+C$

—·—

5/α) 

Τα σημεία τομής των $y=x^2$ και $y=x$ προκύπτουν από την $x^2=x \Rightarrow x=0$ ή $x=1$

Άρα το εμβαδόν είναι $A = \int_0^1 (x-x^2)\,dx = \frac{1}{6}$

5/β) Πρόκειται για γεωμετρική σειρά με λόγο x^2. Άρα συγκλίνει όταν $|x^2|<1 \Rightarrow |x|<1$. Από τον τύπο για το άθροισμα γεωμετρικής σειράς έχουμε ότι το ζητούμενο άθροισμα είναι $\frac{x}{1-x^2}$