



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ
ΔΙΔΑΣΚΟΥΣΑ: Π. ΚΑΝΤΗ (ΤΜΗΜΑ ΠΕΡΙΤΤΩΝ Α.Μ.)

5η Σειρά Ασκήσεων

1. Βρείτε την πρώτη παράγωγο των συναρτήσεων:

$$\begin{aligned}(\alpha) f(x) &= (x^3 - 1)^4, & (\beta) f(x) &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^{-3}, \\(\gamma) f(x) &= [(6x + x^5)^{-1} + x]^2, & (\delta) f(x) &= (\sqrt{x^2 - 3} + 3)^2\end{aligned}$$

2. Με χρήση του κανόνα του Leibniz, βρείτε τις εκφράσεις για την δεύτερη και τρίτη παράγωγο μιας σύνθετης συνάρτησης της μορφής $y(u(x))$.

3. Υπολογίστε την παράγωγο dy/dx στις παρακάτω περιπτώσεις:

$$\begin{aligned}(\alpha) y &= 2 \sin^3(2t), \quad x = 3 \cos^2(2t), & (\beta) y &= t^4, \quad x = 2t^2 + 3, \\(\gamma) (x - y)^2 - y &= 0, & (\delta) \sin(x + y) &= xy\end{aligned}$$

4. Πόσο γρήγορα κατεβαίνει η στάθμη του υγρού σε μια δεξαμενή κυλινδρικού σχήματος όταν αντλούμε το υγρό με σταθερό ρυθμό 30 lt/sec και η ακτίνα της δεξαμενής είναι 1 m;

5. Υπολογίστε τα ακόλουθα όρια:

$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x^2 + \sin x}, \quad (\beta) \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln(\ln x)}{\ln x - 1}, \quad (\gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x}, \quad (\delta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

6. Βρείτε τα διαστήματα που οι παρακάτω συναρτήσεις είναι αύξουσες ή φθίνουσες:

$$(\alpha) f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x + 19, \quad (\beta) f(x) = x^3(1 + x), \quad (\gamma) f(x) = \sqrt{3}x - \cos 2x, \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

7. Βρείτε τα κρίσιμα σημεία και τα ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων και σχεδιάστε τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις:

$$(\alpha) f(x) = x^4 - 2x^3, \quad (\beta) f(x) = 2x^{5/3} + 5x^{2/3}, \quad (\gamma) f(x) = x^2(2 + x)^{1/3}$$

8. Βρείτε το μέγιστο κάτω όριο και το ελάχιστο άνω όριο των συναρτήσεων:

$$(\alpha) f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}, \quad (\beta) f(x) = \frac{x \cos^2 x - 2}{2x \cos^2 x + 2}, \quad (x \geq 0) \quad (\gamma) f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2 + x}$$