# ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2019

## Θέμα 1

**(α)** Η κλίση της εφαπτομένης είναι $y' = (\sec x)' = \sec x \tan x$. Επομένως πρέπει να λύσουμε την εξίσωση $\sec x \tan x = 0$ αφού ζητείται η εφαπτόμενη να είναι οριζόντια. Επειδή $\sec x = 1/\cos x$, προκύπτει ότι η $\sec x$ δεν γίνεται ποτέ 0. Άρα έχουμε $\tan x = 0$. Όμως $\tan x = \sin x/\cos x$, συνεπώς η εξίσωση $\tan x = 0$ είναι ισοδύναμη με την $\sin x = 0$ η οποία ισχύει όταν $x = n\pi$, όπου $n$ ακέραιος.

**(β)** $\dfrac{dy}{dz} = \dfrac{dy}{dx}\dfrac{dx}{dz} = 3x^2(6z) = 18zx^2 = 18z(3z^2+5)^2$.

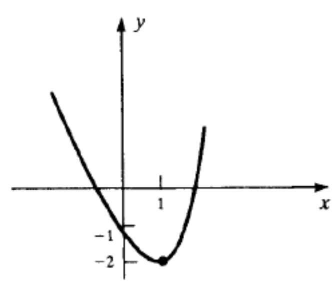
## Θέμα 2

**(α)** $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\log(1+x)} - \dfrac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\dfrac{x-\log(1+x)}{x\log(1+x)} = \lim_{x\to 0}\dfrac{1-1/(1+x)}{\log(1+x)+x/(1+x)} =$
$\lim_{x\to 0}\dfrac{1/(1+x)^2}{1/(1+x)+1/(1+x)^2} = \lim_{x\to 0}\dfrac{1}{2+x} = \dfrac{1}{2}$.

**(β)** Ισχύει $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/d\theta}{dx/d\theta}$. Όμως έχουμε $\dfrac{dy}{d\theta} = r\cos\theta$ και $\dfrac{dx}{d\theta} = -r\sin\theta$. Επομένως $\dfrac{dy}{dx} = r\cos\theta/(-r\sin\theta) = -\cot\theta = -x/y$.

## Θέμα 3

**(α)** Αφού $f''(x) > 0$ για κάθε $x$, πρέπει η καμπύλη να στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω για κάθε $x$. Επειδή $f'(1) = 0$ και $f''(1) > 0$ υπάρχει τοπικό ελάχιστο στο $x = 1$. Επομένως το γράφημα της συνάρτησης δίνεται από το παρακάτω σχήμα.




**(β)** Αφού δεν δίνεται αναδρομικός τύπος για την ακολουθία, ο έκτος όρος μπορεί να είναι οποιοσδήποτε αριθμός!

## Θέμα 4

**(α)** $a_{n+1} = \dfrac{(n+1)!}{2^{n+1}}$. Τότε ισχύει $a_n \le a_{n+1} \Leftrightarrow \dfrac{n!}{2^n} \le \dfrac{(n+1)!}{2^{n+1}} \Leftrightarrow 1 \le \dfrac{n+1}{2} \Leftrightarrow 2 \le n+1$ που ισχύει προφανώς για $n \ge 1$. Επομένως η ακολουθία είναι αύξουσα για $n \ge 1$.

(β) Σε πιο συμπαγή μορφή η σειρά γράφεται ως $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2+1}{n^3+1}$. Η σειρά ικανοποιεί το κριτήριο εναλλασσόμενης σειράς επομένως είναι συγκλίνουσα. Μπορούμε να αποδείξουμε ότι δεν είναι απολύτως συγκλίνουσα, χρησιμοποιώντας το κριτήριο οριακής σύγκρισης με τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$: $\lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+1)/(n^3+1)}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n^2+1)}{n^3+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+1/n^2}{1+1/n^3} = 1$. Όμως η $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ αποκλίνει ως αρμονική σειρά με αποτέλεσμα η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3+1}$ να αποκλίνει. Συνεπώς η δοθείσα σειρά συγκλίνει αλλά όχι απολύτως, άρα συγκλίνει υπό συνθήκη.

## Θέμα 5

(α) Η δοθείσα σειρά συγκλίνει ως άθροισμα δύο γεωμετρικών σειρών, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$, που έχουν λόγους μικρότερους του 1 (1/2 και 1/5, αντίστοιχα). Επομένως παίρνουμε $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{5}{4}$. Άρα το ζητούμενο άθροισμα είναι $2 + \frac{5}{4} = \frac{13}{4}$.

(β) $\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}|x|^{n+1}/(n+1)4^{n+1}}{3^n|x|^n/n4^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{4}\frac{n}{n+1}|x| = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{4}\frac{1}{1+1/n}|x| = \frac{3}{4}|x|$. Επομένως συγκλίνει για $|x| < \frac{4}{3}$. Για $x = \frac{4}{3}$ παίρνουμε την αποκλίνουσα αρμονική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ και για $x = -\frac{4}{3}$ παίρνουμε την $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ που συγκλίνει σύμφωνα με το κριτήριο εναλλασσόμενης σειράς. Συνεπώς το διάστημα σύγκλισης της δοθείσας δυναμοσειράς είναι το $-\frac{4}{3} \le x < \frac{4}{3}$.