ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ
ΔΙΔΑΣΚΟΥΣΑ: Π. ΚΑΝΤΗ (ΤΜΗΜΑ ΠΕΡΙΤΤΩΝ ΑΜ)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ 2ης ΣΕΙΡΑΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. α) $D = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, $R = (0, \infty)$, β) $D = (-\infty, \infty)$, $R = (-\infty, \infty)$, γ) $D = [-1, 1]$, $R = [0, 1]$, δ) $D = (-\infty, 2)$, $R = (0, \infty)$, ε) $D = (-\infty, \infty)$, $R = (-\infty, \infty)$.

2. α) άρτια, β) τίποτα από τα δύο, γ) άρτια, δ) άρτια, ε) περιττή.

3. α) $f \circ g = x^2 + 2$, με $D = (-\infty, \infty)$, και $g \circ f = x^2 + 10x + 22$, με $D = (-\infty, \infty)$
β) $f \circ g = -x/(x+1)$, με $D = \mathbf{R} - \{-1\}$, και $g \circ f = 1/x$, με $D = \mathbf{R}^*$
γ) $f \circ g = x + \sqrt{x}$, με $D = [0, \infty)$, και $g \circ f = \sqrt{x(x+1)}$, με $D = (-\infty, -1) \cup (0, \infty)$
δ) $f \circ g = |\sin 2x|$, με $D = (-\infty, \infty)$, και $g \circ f = \cos(2\sqrt{1 - x^2})$, με $D = [-1, 1]$.

4. Και οι τέσσερις σχέσεις μεταξύ των υπερβολικών συναρτήσεων αποδεικνύονται εύκολα με χρήση των ορισμών του $\cosh x$ και $\sinh x$ και αλγεβρικές πράξεις.

5. α) Είναι 1 προς 1, και $f^{-1}(x) = (x^{1/3} - 1)/3$ με $D = (-\infty, \infty)$, $R = (-\infty, \infty)$, β) Δεν είναι 1 προς 1 , γ) Είναι 1 προς 1, και $f^{-1}(x) = (x - 3)/5$ με $D = (-\infty, \infty)$, $R = (-\infty, \infty)$, δ) Δεν είναι 1 προς 1, ε) Είναι 1 προς 1, και $f^{-1}(x) = (x - 2)/(1 - x)$ με $D = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$, $R = (-\infty, \infty)$, στ) Δεν είναι 1 προς 1.

6. α) Ξεκινείστε από την ισότητα: $x = \tan(\tan^{-1} x)$ και την ποσότητα $\sqrt{1 + x^2}$, β) αποδεικνύεται εύκολα από την α), γ) αποδεικνύεται εύκολα από τις α) και β), δ) ξεκινείστε από την ισότητα $x = \sinh(\sinh^{-1} x) \equiv \sinh y$ και λύστε ως προς y, ε) εργαστείτε παρόμοια με την δ).

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ 3ης ΣΕΙΡΑΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. α) Ισχύει για $\delta = \epsilon/2$, β) ισχύει για $\delta = \epsilon/3$, γ) ισχύει για $\delta = 2\epsilon$.

2. α) 5/2, β) 4, γ) Δεν υπάρχει το όριο, δ) 0.

3. α) -1/4, β) Δεν υπάρχει το όριο, γ) 6, δ) 0.

4. α) 2/5, β) 2, γ) 1/2, δ) 1.

5. α) 0, β) ∞, γ) 5/3, δ) 1.

6. Επιλέγουμε 4 σημεία στο διάστημα $[-4, 4]$, τα -4, -2, 2, 4. Με αντικατάσταση στο $f(x) = x^3 - 15x + 1$ βρίσκουμε ότι: $f(-4) = -3 < 0$, $f(-2) = 23 > 0$, $f(2) = -21 < 0$ και $f(4) = 5 > 0$. Σύμφωνα με το Θεώρημα της Ενδιάμεσης Τιμής, θα υπάρχουν τουλάχιστον 3 σημεία στο διάστημα $[-4, 4]$ όπου το πολυώνυμο μηδενίζεται.

7. α) Η γραφική κατασκευάζεται από τον 1ο και 3ο κλάδο της $f(x)$, και την προσθήκη του σημείου $f(1)$. Το τελευταίο δεν ταυτίζεται με το $\lim_{x\to 1} f(x)$ και επομένως η συνάρτηση είναι ασυνεχής με την ασυνέχεια να είναι θεραπεύσιμη.

β) Η γραφική κατασκευάζεται με την χρήση και των 3 κλάδων που δίνονται. Πιθανά σημεία ασυνέχειας είναι τα $x = \pm 1$, όμως ισχύει ότι $\lim_{x\to -1} f(x) = f(-1)$ και $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$, οπότε η $f(x)$ είναι συνεχής.

γ) Η γραφική κατασκευάζεται με χρήση και των δύο κλάδων και παρουσιάζει ασυνέχεια άλματος στο τυχαίο σημείο c.