

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Εξεταστική περίοδος Ιανουαρίου 2020

Κάθε υποερώτημα βαθμολογείται με άριστα το 1. Απαγορεύεται η χρήση ηλεκτρονικών συσκευών.

Θέμα 1

(α) Προσδιορίστε, αν υπάρχουν, τα σημεία ασυνέχειας της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ ρητός} \\ 0, & x \text{ άρρητος} \end{cases}$$

(β) Βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$.

Θέμα 2

(α) Αν $x^3 - y^3 = 1$ αποδείξτε ότι $y'' = -2x/y^5$.

(β) Δείξτε ότι η συνεχής συνάρτηση $f(x) = (x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \dots + (x - a_n)^2$ έχει ένα ολικό ελάχιστο το οποίο προκύπτει όταν $x = (a_1 + a_2 + \dots + a_n)/n$.

Θέμα 3

(α) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int \frac{dx}{x^3 - x}$

(β) Υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις παραβολές $y = x^2 - x$ και $y = x - x^2$.

Θέμα 4

(α) Βρείτε το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x-1)^{2n}}{n^2}$.

(β) Χρησιμοποιώντας ότι $2^x = e^{x \ln 2}$ βρείτε τη σειρά MacLaurin του 2^x .

Θέμα 5

(α) Λύστε τη διαφορική εξίσωση $y'' + 4y' + 3y = 0$.

(β) Βρείτε την καμπύλη που περνά από το σημείο $(0, 2)$ και της οποίας η εφαπτόμενη στο σημείο (x, y) έχει κλίση $y - 2e^{-x}$.