ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΕΞΕΤΑΣΗΣ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2020

Θέμα 1

(α) Υπάρχουν τόσο ρητοί όσο και άρρητοι αριθμοί οσοδήποτε κοντά σε κάθε δοσμένο πραγματικό αριθμό c με συνέπεια το $\lim_{x\to c} f(x)$ να μην υπάρχει. Επομένως η $f(x)$ είναι ασυνεχής παντού.

(β) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x} = \dfrac{\sin x - x}{x\sin x}$ και συνεπώς βρίσκουμε το όριο με χρήση του κανόνα L' Hopital ως εξής: $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x}{x\sin x} = \lim_{x\to 0}\dfrac{\cos x - 1}{x\cos x + \sin x} = \lim_{x\to 0}\dfrac{-\sin x}{-x\sin x + 2\cos x} = \dfrac{0}{0+2} = 0.$

Θέμα 2

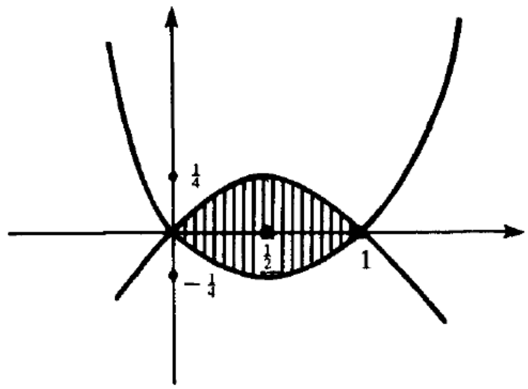
(α) $x^3-y^3=1 \Rightarrow 3x^2-3y^2y'=0 \Rightarrow y'=x^2/y^2$. Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα παραγώγισης πηλίκου παίρνουμε $y'' = \dfrac{y^2(2x)-x^2\dfrac{d}{dx}(y^2)}{y^4} = \dfrac{2xy^2-x^2(2yy')}{y^4} = \dfrac{2xy^2-2x^2y(x^2/y^2)}{y^4} = \dfrac{2xy^3-2x^4}{y^5} = \dfrac{2x(y^3-x^3)}{y^5} = \dfrac{2x(-1)}{y^5} = -\dfrac{2x}{y^5}.$

(β) $f'(x) = 2(x-a_1)+2(x-a_2)+...+2(x-a_n)$. Θέτοντας την εξίσωση αυτή ίση με μηδέν και λύνοντας ως προς x παίρνουμε $x=(a_1+a_2+...+a_n)/n$. Επίσης ισχύει ότι $f''(x)=2n>0$. Επομένως σύμφωνα με το κριτήριο της δεύτερης παραγώγου υπάρχει τοπικό ελάχιστο για $x=(a_1+a_2+...+a_n)/n$. Όμως επειδή αυτό είναι το *μόνο* τοπικό ακρότατο η γραφική παράσταση της συνεχούς συνάρτησης $f(x)$ θα πρέπει να ανεβαίνει διαρκώς προς τα πάνω και από τις δύο μεριές του $(a_1+a_2+...+a_n)/n$ (δηλαδή και από αριστερά του και από δεξιά του) γιατί αν δεν συνέβαινε κάτι τέτοιο θα έπρεπε να είχαμε και άλλο τοπικό ακρότατο.

Θέμα 3

(α) $\dfrac{1}{x^3-x} = \dfrac{1}{x(x-1)(x+1)} = \dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{x+1}$. Απαλείφουμε τους παρονομαστές και παίρνουμε $1 = A(x-1)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-1)$ Θέτουμε στην τελευταία εξίσωση διαδοχικά $x=0$, $x=-1$ και $x=1$ για να βρούμε τους τρεις άγνωστους συντελεστές A, B και C. Για $x=0$ έχουμε $A(0-1)(0+1)=1 \Rightarrow A=-1$. Για $x=-1$ έχουμε $C(-1)(-1-1)=1 \Rightarrow 2C=1 \Rightarrow C=1/2$. Τέλος για $x=1$ έχουμε $B(1)(1+1)=1 \Rightarrow 2B=1 \Rightarrow B=1/2$. Επομένως το ολοκλήρωμά μας γίνεται $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3-x} = \int\left(\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}\right) = \int\left(\frac{-1}{x}+\frac{1/2}{x-1}+\frac{1/2}{x+1}\right) = -\ln|x|+\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln|x+1|+c.$

(β) Οι τετμημένες των σημείων τομής των δύο καμπύλων προκύπτουν από την εξίσωση $x^2-x=x-x^2 \Rightarrow 2x^2-2x=0 \Rightarrow x(x-1)=0 \Rightarrow x=0$ και $x=1$. Συνεπώς τα σημεία τομής έχουν συντεταγμένες (0, 0) και (1, 0). Σχεδιάζουμε πρόχειρα τις δύο καμπύλες όπως στο παρακάτω σχήμα και βλέπουμε ότι η $x-x^2$ είναι το πάνω σύνορο του χωρίου και η $x^2 - x$ είναι το κάτω σύνορο του χωρίου. Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι $\int_0^1 [(x-x^2)-(x^2-x)]dx = 2\int_0^1 (x-x^2)dx = 2\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1 = 2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$.



Θέμα 4

(α) $\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^{n+1}(x-1)^{2(n+1)}}{(n+1)^2}\frac{n^2}{3^n(x-1)^{2n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^{n+1}}{3^n}\frac{n^2}{(n+1)^2}\frac{(x-1)^{2n+2}}{(x-1)^{2n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|3\left(\frac{n}{n+1}\right)^2(x-1)^2\right| = 3|x-1|^2\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\right)^2 = 3|x-1|^2 1^2 = 3|x-1|^2$. Η δυναμοσειρά συγκλίνει όταν $\rho = 3|x-1|^2 < 1$ που δίνει $|x-1|^2 < \frac{1}{3} \Leftrightarrow |x-1| < \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{3}} + 1 < x < \frac{1}{\sqrt{3}} + 1$.

Τώρα πρέπει να ελέγξουμε τη συμπεριφορά της δυναμοσειράς στα άκρα του παραπάνω διαστήματος. Πρώτα θέτουμε $x = \frac{1}{\sqrt{3}}+1$ στη δυναμοσειρά και παίρνουμε $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(\frac{1}{\sqrt{3}}+1-1)^{2n}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(\frac{1}{3})^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ που είναι συγκλίνουσα p σειρά ($p = 2 > 1$). Στη συνέχεια θέτουμε $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}+1$ στη δυναμοσειρά και παίρνουμε $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(-\frac{1}{\sqrt{3}}+1-1)^{2n}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(\frac{1}{3})^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ που ομοίως είναι συγκλίνουσα p σειρά ($p = 2 > 1$). Τελικά δηλαδή βρήκαμε ότι το διάστημα σύγκλισης είναι $-\frac{1}{\sqrt{3}} + 1 \le x \le \frac{1}{\sqrt{3}} + 1$.

(β) Επειδή γνωρίζουμε ότι $e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ παίρνουμε ότι $2^x = e^{x\ln 2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln 2)^n x^n}{n!}$.

Θέμα 5

(α) Λύνουμε τη χαρακτηριστική εξίσωση της δοθείσας διαφορικής εξίσωσης: $u^2 + 4u + 3 = 0 \Rightarrow (u+3)(u+1) = 0 \Rightarrow u = -3$ ή $u = -1$. Επομένως η γενική λύση είναι $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}$ όπου C_1 και C_2 είναι σταθερές.

(β) $\dfrac{dy}{dx} = y - 2e^{-x} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} - y = -2e^{-x}$. Θα χρησιμοποιήσουμε τον ολοκληρωτικό παράγοντα $\mu = \exp[\int(-1)dx] = e^{-x}$. Επομένως έχουμε $\int \mu q(x)dx = -2\int e^{-2x}dx = e^{-2x}$. Κατά συνέπεια έχουμε $y = e^{x}(e^{-2x} + C) = e^{-x} + Ce^{x}$. Επειδή η καμπύλη περνά από το $(0,\ 2)$ έχουμε $2 = 1 + C \Rightarrow C = 1$. Άρα $y = e^{-x} + e^{x} = 2\cosh x$.