



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ
ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΕΣ: Π. ΚΑΝΤΗ, Θ. ΧΩΡΙΚΗΣ

9η ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_a^b x^2 dx$ με την μέθοδο των άνω $U_f(P)$ και κάτω $L_f(P)$ αθροισμάτων της $f(x) = x^2$ για μια τυχαία διαμέριση P [χρησιμοποιείστε την ανισότητα $x_{k-1}^2 \leq \frac{1}{3}(x_{k-1}^2 + x_{k-1}x_k + x_k^2) \leq x_k^2$].

2. Κατασκευάστε τις γραφικές παραστάσεις των αντίστοιχων συναρτήσεων και, με χρήση του εμβαδού των χωρίων ανάμεσα στην καμπύλη και τον άξονα x , υπολογίστε τα παρακάτω ολοκληρώματα και τη μέση τιμή της κάθε $f(x)$ στο αντίστοιχο διάστημα.

$$(\alpha) \int_{-2}^4 \left(\frac{x}{2} + 3\right) dx, \quad (\beta) \int_{-2}^1 |x| dx, \quad (\gamma) \int_{-3}^3 \sqrt{9 - x^2} dx$$

3. Υπολογίστε τα παρακάτω αόριστα ολοκληρώματα με χρήση της παράγουσας:

$$\begin{aligned} (\alpha) \int (x^3 + 2x^2 - 3x + 5) dx, & \quad (\beta) \int \frac{1}{x^4} dx, & \quad (\gamma) \int \left(8y - \frac{2}{y^{1/4}}\right) dy, \\ (\delta) \int (1 + \tan^2 \theta) d\theta, & \quad (\epsilon) \int \frac{1}{\sqrt{x+3}} dx, & \quad (\sigma\tau) \int \sin \theta \cos \theta d\theta, \\ (\zeta) \int \frac{3x^2}{(x^3+1)^2} dx, & \quad (\eta) \int \frac{g'(x)}{[g(x)]^2} dx, & \quad (\theta) \int_0^1 (x^2 + \sqrt{x}) dx, \\ (\iota) \int_1^{\sqrt{2}} \left(\frac{u^2}{2} - \frac{1}{u^5}\right) du, & \quad (\iota\alpha) \int_0^1 (1-2x)^3 dx, & \quad (\iota\beta) \int_0^\pi \sin^2 \frac{x}{4} \cos \frac{x}{4} dx \end{aligned}$$

4. Υπολογίστε τις παραγώγους dy/dx , όπου:

$$\begin{aligned} (\alpha) y = \int_0^{1+x^2} \frac{dt}{\sqrt{2t+5}}, & \quad (\beta) y = \int_x^a f(t) dt, \\ (\gamma) y = \int_{\tan x}^4 \sin(t^2) dt, & \quad (\delta) y = \int_x^{2x} \frac{dt}{1+t^2} \end{aligned}$$

5. Βρείτε το συνολικό εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη της $f(x)$ και τον άξονα x ή από τις καμπύλες των $f(x)$ και $g(x)$:

$$\begin{aligned} (\alpha) f(x) = -x^2 - 2x, \quad -3 \leq x \leq 2, & \quad (\beta) f(x) = \frac{1}{2}(x+1)^{-1/2}, \quad 0 \leq x \leq 8, \\ (\gamma) f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = x^2, & \quad (\delta) f(x) = 5 - x^2, \quad g(x) = 3 - x \end{aligned}$$