ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ
ΔΙΔΑΣΚΟΥΣΑ: Π. ΚΑΝΤΗ (ΤΜΗΜΑ ΠΕΡΙΤΤΩΝ Α.Μ.)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ 6ης ΣΕΙΡΑΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. *a*) Έστω $\alpha_{n+1} > \alpha_n \Rightarrow 4 > 2$, αληθές άρα αύξουσα. Οπότε $m = \alpha_1 = 2$, ενώ $\alpha_n = 3 - \dfrac{2}{n+1}$ άρα $M = 3$.
b) Έστω $\alpha_{n+1} < \alpha_n \Rightarrow 0 < 2$, αληθές άρα φθίνουσα. Οπότε $M = \alpha_1 = 2$, ενώ $m = 0$ αφού είναι θετικά ορισμένη.
c) Έστω $\alpha_{n+1} > \alpha_n \Rightarrow (-1)^n\,(2n+1) < 0$, αληθές ή ψευδές ανάλογα με την τιμή του n άρα μη μονότονη. Για τα φράγματα, δημιουργούμε τις υπακολουθίες $(n+1)/n$ όταν n άρτιος και $(n-1)/n$ όταν n περιττός. Ακολουθώντας ανάλογη διαδικασία με παραπάνω, η πρώτη προκύπτει φθίνουσα με $m = 1$ και $M = 3/2$ ενώ η δεύτερη αύξουσα με $m = 0$ και $M = 1$. Άρα η αρχική ακολουθία, σαν συνδυασμός των δύο, έχει $m = 0$ και $M = 3/2$.
d) Έστω $\alpha_{n+1} > \alpha_n \Rightarrow 2n^2 + 2n - 1 > 0$, αληθές άρα αύξουσα. Οπότε $m = 3/4$, ενώ δεν υπάρχει M.
e) Έστω $\alpha_{n+1} < \alpha_n \Rightarrow 2(n+1) > 0$, αληθές άρα φθίνουσα. Οπότε $M = 1/2$, ενώ $m = 0$ αφού είναι θετικά ορισμένη.
f) Έστω $\alpha_{n+1} > \alpha_n \Rightarrow 1 < 2$, αληθές άρα αύξουσα. Οπότε $m = 1/2$, ενώ $M = 1$.
g) Έστω $\alpha_{n+1} > \alpha_n \Rightarrow 2 > 0$, αληθές άρα αύξουσα. Οπότε $m = 0$, ενώ $M = \ln 2$.

2. Ισχύουν όντως για: α) $n > N = 1/\epsilon$, β) $n > N = (2/\epsilon)^2$, γ) $n > N = 1/\epsilon$.

3. (i) Δεχθείτε ότι υπάρχουν δύο όρια για την α_n και ότι $\epsilon = |\ell - m|$, και χρησιμοποιείστε τριγωνική ανισότητα για να φτάσετε σε αντίφαση , (ii) δεχθείτε ότι $\epsilon_1 = \epsilon/2$ για την α_n και $\epsilon_2 = \epsilon/2$ για την β_n και δουλέψτε και πάλι με την τριγωνική ανισότητα.

4. Με τη μέθοδο του μεγιστοβάθμιου όρου: $a)\, \alpha_n \to 0$, $b)\, \alpha_n \to 4/9$, $c)\, \alpha_n \to -2$, $d)\, \alpha_n \to 7$, $e)\, \alpha_n \to 1$, $g)\, \alpha_n \to 1/5$, $h)\, \alpha_n \to -\infty$. Με χρήση του κανόνα $(1+x/n)^n \to e^x$: $f)\, \alpha_n \to e^{-2}$. Με χρήση του λογαρίθμου: $i)\, \alpha_n \to 0$. Με θεώρημα ‘‘σάντουιτς’’: $j)\, \alpha_n \to 0$. Με αντικατάσταση και μεγιστοβάθμιο όρο: $k)\, \alpha_n \to 1/2$. Με l' Hospital: $l)\, \alpha_n \to 2$.

5. (α) Για $n = 1$ παίρνουμε $1 + \lambda = 1 + \lambda$. Δεχόμενοι ότι ισχύει για $n = k$ παίρνουμε ότι $1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + ... + \lambda^{k+1} = \dfrac{1-\lambda^{k+1}}{1-\lambda} + \lambda^{k+1} = \dfrac{1-\lambda^{k+2}}{1-\lambda}$.
(β) Για $n = 1$ παίρνουμε $2 = 2$. Αν δεχτώ ότι ισχύει για $n = k$, παίρνω $2^{k+1} \leq 2(k+1)! < (k+2)!$.
(γ) Για $n = 1$ παίρνουμε $1 + x = 1 + x$. Αν δεχτώ ότι ισχύει για $n = k$, παίρνω $(1+x)^{k+1} \geq (1+xk)(1+x) > 1 + x(k+1)$.
(δ) Για $n = 1$ παίρνουμε $2 = 2$. Αν δεχτώ ότι ισχύει για $n = k$, παίρνω $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + ... + (k+1)(k+2) = \dfrac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2) = \dfrac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$.

6. α) Η ακολουθία είναι αύξουσα, άρα $m = \alpha_1 = 1$. Εάν υπάρχει όριο, αυτό από την αναδρομική σχέση είναι το $\ell = \sqrt{2}$ που είναι όντως και το ελάχιστο άνω φράγμα (απόδειξη με επαγωγή). β) Με παρόμοιο τρόπο, η ακολουθία προκύπτει αύξουσα με $m = 1$, $\ell = \sqrt{3/2}$ και είναι άνω φραγμένη από τον ίδιο αριθμό.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ 7ης ΣΕΙΡΑΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. a) Αποκλίνει, b) Δεν υπάρχει όριο, c) Αποκλίνει, d) Συγκλίνει στο 1.

2. a) Συγκλίνει στο 10/3, b) Συγκλίνει στο -3/2, c) Συγκλίνει στο 17/6, d) αν $|x| < 1/2$, συγκλίνει στο $1/(1-2x)$, e) αν $-1 < x < 3$, συγκλίνει στο $6/(3-x)$.

3. a) $\lim \alpha_n = 1$, άρα η σειρά αποκλίνει, b) συγκλίνει στο 1/2, c) $\lim \alpha_n = 1/e$, άρα η σειρά αποκλίνει, d) συγκλίνει στο 1/4.

4. a) Συγκλίνει (άμεση σύγκριση με $1/n^2$), b) αποκλίνει (οριακή σύγκριση με $1/n$), c) αποκλίνει (οριακή σύγκριση με $1/n$), d) συγκλίνει (οριακή σύγκριση με $1/2^n$).

5. a) Αποκλίνει (κριτήριο λόγου), b) συγκλίνει (κριτήριο ρίζας), c) συγκλίνει (κριτήριο ρίζας), d) αποκλίνει (κριτήριο λόγου), e) συγκλίνει (κριτήριο ρίζας).

6. a) Συγκλίνει (όλες οι προυποθέσεις του κριτηρίου σύγκλισης μιας εναλλασσόμενης σειράς ισχύουν), b) αποκλίνει (δεν ισχύει $\alpha_n > \alpha_{n+1}\ \forall n$), c) συγκλίνει, d) συγκλίνει.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ 8ης ΣΕΙΡΑΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Με χρήση του κριτηρίου του λόγου, παίρνουμε τα αποτελέσματα: (α) $R = 1/4$, (β) $R = 0$, (γ) $R = \infty$, (δ) $R = 2$.

2. (α) $\sin x = x - x^3/3! + x^5/5! - ...$, ($\beta$) $\cos x = 1 - x^2/2! + x^4/4! - ...$, ($\gamma$) $e^x = 1 + x + x^2/2! + ...$, ($\delta$) $\ln(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 - ...$, ($\epsilon$) $1/(1-x) = 1 + x + x^2 + ...$

3. (α) Αναπτύξτε το $\sin x$. (β) Αναπτύξτε το $\cos x$. (γ) Αναπτύξτε το $\ln(1 + c/n)$ αφού πάρετε τον λογάριθμο του αριστερού μέλους.

4. $\ln(1+x) = \ln 3 + \frac{1}{2}(x-2) - \frac{1}{2\times 9}(x-2)^2 + \frac{2}{6\times 27}(x-2)^3 - \frac{6}{24\times 81}(x-2)^4 + R_4(x)$, όπου $R_4(x) = 24(x-2)^5/[5!\,(1+c)^5]$.

5. (α) $\cos^2 x = 1 - x^2 + x^4/3 + ...$, ($\beta$) $\sin(x^2) = x^2 - x^6/3! + x^{10}/5! + ...$, ($\gamma$) $e^x \sin x = x + x^2 + x^3/3 + ...$, ($\delta$) $\ln(1+2x^2) = 2x^2 - 2x^4 + 8x^6/3 + ...$, ($\epsilon$) $1/(1+x^2) = 1 - x^2 + x^4 - ....$