



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ**  
**ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ**  
**ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ**  
**ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΕΣ: Π. ΚΑΝΤΗ, Θ. ΧΩΡΙΚΗΣ**

---

11η Σειρά Ασκήσεων

1. Βρείτε τον όγκο του στερεού που δημιουργείται από την περιστροφή: (α) γύρω από τον άξονα  $x$  του χωρίου κάτω από την γραφική παράσταση της  $y(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$  στο διάστημα  $-r \leq x \leq r$ , και (β) γύρω από τον άξονα  $y$  της επιφάνειας που περικλείεται από τις  $y = x^2$  και  $y = 2x$ .
2. Βρείτε τον όγκο του στερεού που δημιουργείται από την περιστροφή του χωρίου που ορίζεται από την τομή των καμπυλών  $f(x) = \sqrt{x}$  και  $g(x) = x^2$  : (α) γύρω από τον άξονα  $x$ , και (β) γύρω από τον άξονα  $y$ .
3. Βρείτε τα πεδία ορισμού και τιμών των συναρτήσεων: (α)  $f(x, y) = 1/\sqrt{4x^2 - y^2}$ , (β)  $f(x, y) = 1/\sqrt{9 - x^2 - y^2}$ , (γ)  $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ , (δ)  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 16}$ .
4. Επιλέγοντας διαφορετικές διαδρομές, δείξτε ότι τα παρακάτω όρια δεν υπάρχουν:  
(α)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy + y^3}{x^2 + y^2}$ , (β)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ , (γ)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^2}{x^2 + y^2}$ , (δ)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x - y^4}{x^3 - y^4}$
5. Υπολογίστε τις πρώτες και δεύτερες (απλές και μεικτές) μερικές παραγώγους, καθώς και τα διαφορικά, των συναρτήσεων: (α)  $\sin(x^2y)$ , (β)  $\ln(x^2 + y^3)$ , (γ)  $xe^y \sin(\pi z)$ .
6. Υπολογίστε τις πρώτες παραγώγους, ως προς τις ανεξάρτητες μεταβλητές στην κάθε περίπτωση, των: (α)  $u = x^2 - y^2$ , όπου  $x = t^2 - 1$  και  $y = 3 \sin(\pi t)$ , (β)  $u = x^2 - 2xy + 2y^3$ , όπου  $x = s^2 \ln t$  και  $y = 2st^3$ .
7. Αναπτύξτε σε σειρά Taylor τις συναρτήσεις (α)  $f(x, y) = xe^y$  γύρω από το σημείο  $(0, 0)$ , (β)  $f(x, y) = y^2/x^3$  γύρω από το σημείο  $(1, -1)$  κρατώντας μέχρι και τετραγωνικούς όρους.
8. Βρείτε την παράγωγο κατεύθυνσης: (α) της  $f(x, y) = x^2 + y^2$  στο σημείο  $P(1, 2)$  στην κατεύθυνση του διανύσματος  $2\hat{x}_0 - 3\hat{y}_0$ , (β) της  $f(x, y, z) = 2xz^2 \cos(\pi y)$  στο σημείο  $P(1, 2 - 1)$  στην κατεύθυνση του σημείου  $Q(2, 1, 3)$ .
9. Βρείτε τα ακρότατα (τοπικά ή ολικά) των συναρτήσεων: (α)  $2x^2 + y^2 - xy - 7y$ , (β)  $-x^4/4 + 2x^3/3 + 4xy - y^2$ , (γ)  $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 4$ , στον κλειστό δίσκο  $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 9\}$ .
10. Βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης  $f(x, y) = x^2 + (y - 2)^2$  επάνω στην υπερβολή  $x^2 - y^2 = 1$ .