ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ
ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΕΣ: Π. ΚΑΝΤΗ, Θ. ΧΩΡΙΚΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ 11ης ΣΕΙΡΑΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. (i) Το στερεό που δημιουργείται είναι μια σφαίρα ακτίνας r και η διατομή ως προς τον άξονα x της κάθε φέτας είναι δίσκος ακτίνας $y(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$. Με ολοκλήρωση στον άξονα x, παίρνουμε $V = 4\pi r^3/3$. (ii) Το στερεό που δημιουργείται έχει διατομή ως προς τον άξονα y με σχήμα δακτυλίου, με εξωτερική ακτίνα $R_2 = \sqrt{y}$ και εσωτερική $R_1 = y/2$. Με ολοκλήρωση στον άξονα y, παίρνουμε $V = 8\pi/3$.

2. (i) Η διατομή, ως προς τον άξονα x, του στερεού που δημιουργείται είναι δακτύλιος με εξωτερική ακτίνα $R_2 = \sqrt{x}$ και εσωτερική $R_1 = x^2$. Με ολοκλήρωση στο διάστημα $x \in (0,1)$, παίρνουμε $V = 3\pi/10$. (ii) Η διατομή, ως προς τον άξονα y, είναι και πάλι δακτύλιος με εξωτερική ακτίνα $R_2 = \sqrt{y}$ και εσωτερική $R_1 = y^2$. Με ολοκλήρωση στο διάστημα $y \in (0,1)$, παίρνουμε $V = 3\pi/10$.

3. (α) Το πεδίο ορισμού είναι το χωρίο ανάμεσα στις ευθείες $y = 2|x|$ και $y = -2|x|$, ενώ το πεδίο τιμών είναι το $R = (0, +\infty)$. (β) Το πεδίο ορισμού είναι το εσωτερικό δίσκου ακτίνας 3 στο επίπεδο, ενώ $R = [1/3, +\infty)$. (γ) Το πεδίο ορισμού είναι όλο το καρτεσιανό επίπεδο, ενώ $R = (0, 1]$. (δ) Το πεδίο ορισμού είναι τα σημεία του κύκλου ακτίνας 4 και όλα τα εξωτερικά αυτού σημεία του επιπέδου, ενώ $R = [0, +\infty)$.

4. (α) Κατά μήκος των διαδρομών Α: $(x, y) \to (x, 0) \to (0, 0)$ και Β: $(x, y) \to (0, y) \to (0, 0)$ το όρο της $f(x, y)$ προκύπτει μηδέν ενώ κατά μήκος της Γ: $(x, y) \to (0, 0)$ με $y = kx$, προκύπτει $k/(1+k^2) \neq 0$, άρα το όριο δεν υπάρχει. (β) Κατά μήκος της Α το όριο προκύπτει 1, ενώ κατά μήκος της Β -1, άρα δεν υπάρχει. (γ) Κατά μήκος της Α το όριο προκύπτει 0, ενώ κατά μήκος της Β 1, άρα δεν υπάρχει. (δ) Κατά μήκος της Α το όριο προκύπτει άπειρο, ενώ κατά μήκος της Β -1, άρα δεν υπάρχει.

5. (i) $f_x = 2xy\,\cos(x^2y)$, $f_y = x^2\,\cos(x^2y)$, $f_{xx} = 2y\,\cos(x^2y) - 4x^2y^2\,\sin(x^2y)$, $f_{yy} = -x^4\,\sin(x^2y)$, $f_{xy} = f_{yx} = 2x\,\cos(x^2y) - 2x^3y\,\sin(x^2y)$.
(ii) $f_x = \frac{2x}{x^2+y^3}$, $f_x = \frac{3y^2}{x^2+y^3}$, $f_{xx} = \frac{2\,(y^3-x^2)}{(x^2+y^3)^2}$, $f_{yy} = \frac{3y\,(2x^2-y^3)}{(x^2+y^3)^2}$, $f_{xy} = f_{yx} = \frac{-6xy^2}{(x^2+y^3)^2}$.
(iii) $f_x = e^y\,\sin(\pi z)$, $f_y = xe^y\,\sin(\pi z)$, $f_z = \pi xe^y\,\cos(\pi z)$, $f_{xx} = 0$, $f_{yy} = xe^y\,\sin(\pi z)$, $f_{zz} = -\pi^2xe^y\,\sin(\pi z)$, $f_{xy} = f_{yx} = e^y\,\sin(\pi z)$, $f_{xz} = f_{zx} = \pi e^y\,\cos(\pi z)$, $f_{yz} = f_{zy} = \pi xe^y\,\cos(\pi z)$.

6. (i) $du/dt = 4t\,(t^2-1) - 18\pi\sin(\pi t)\cos(\pi t)$, (ii) $\partial u/\partial t = (2x-2y)s^2/t + (6y^2-2x)6st^2$, $\partial u/\partial s = (2x-2y)2s\ln t + (6y^2-2x)2t^3$.

7. (α) $xe^y = x + xy + ...$, (β) $y^2/x^3 = 1 - 3(x-1) - 2(y+1) + 6(x-1)^2 + (y+1)^2 + 6(x-1)(y+1) + ...$

8. (α) $f'_u(1,2) = -8/\sqrt{13}$, (β) $f'_u(1,2,-1) = -14/3\sqrt{2}$.

9. (α) Το $(1,4)$ είναι τοπικό ελάχιστο με $f(1,4) = -14$. (β) Το $(0,0)$ είναι σαγματικό σημείο, ενώ τα $(-2,-4)$ και $(4,8)$ τοπικά μέγιστα. (γ) Το εσωτερικό σημείο $(1,1)$ προκύπτει να είναι ολικό ελάχιστο με $f(1,1) = 2$, ενώ το $(-3/\sqrt{2}, -3/\sqrt{2})$ είναι ολικό μέγιστο με $f(-3/\sqrt{2}, -3/\sqrt{2}) \simeq 21.5$ (βοήθεια: παραμετροποιείστε τον κύκλο θέτοντας $x = 3\cos t$ και $y = 3\sin t$ με $0 \leq t \leq 2\pi$).

10. Θέτοντας $g(x,y) = x^2 - y^2 - 1$, λύνουμε το σύστημα $\{\vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g,\ g(x,y) = 0\}$. Η λύση που ικανοποιεί και τις δύο εξισώσεις είναι η $\lambda = 1$, $y = 1$ και $x = \pm\sqrt{2}$, που οδηγεί στην ελάχιστη τιμή $f(x,y) = f(\pm\sqrt{2}, 1) = 3$.