Τροχιακή Στροφορμή

Δομή Διάλεξης

Οι τελεστές της τροχιακής στροφορμής στην αναπαράσταση της θέσης

Τελεστές δημιουργίας και καταστροφής για ιδιοκαταστάσεις στροφορμής

Ιδιοτιμές και ιδιοκαταστάσεις της L^2 και L_z : Σφαιρικές Αρμονικές

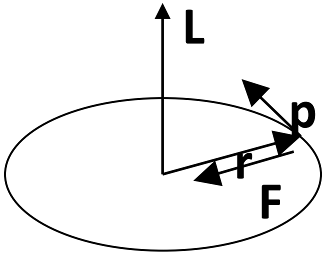
Σύνοψη – Ασκήσεις

Τελεστής Στροφορμής

Κλασικός ορισμός στροφορμής:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}.$$

Ποσότητα που διατηρείται στην κλασική μηχανική όταν V=V(r)



Συνιστώσες:

$$\begin{aligned} L_x &= y\,p_z - z\,p_y, \\ L_y &= z\,p_x - x\,p_z, \\ L_z &= x\,p_y - y\,p_x. \end{aligned}$$

+3a

Κβαντομηχανική: Η στροφορμή είναι ερμητιανός τελεστής.

+3b

Σχέσεις Μετάθεσης:

$$\begin{aligned} [L_x, L_y] &= [y\,p_z - z\,p_y, z\,p_x - x\,p_z] = y\,p_x\,[p_z, z] + x\,p_y\,[z, p_z] \\ &= i\,\hbar\,(x\,p_y - y\,p_x) = i\,\hbar\,L_z, \end{aligned}$$

+3c

αφού:

$$\begin{aligned} [x_i, x_j] &= 0, \\ [p_i, p_j] &= 0, \\ [x_i, p_j] &= i\,\hbar\,\delta_{ij}. \end{aligned}$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} [L_x, L_y] &= i\,\hbar\,L_z, \\ [L_y, L_z] &= i\,\hbar\,L_x, \\ [L_z, L_x] &= i\,\hbar\,L_y. \end{aligned}$$

Τετράγωνο Στροφορμής

Τετράγωνο στροφορμής: $$L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2.$$

Σχέσεις Μετάθεσης:

$$[A^2, B] = A\,[A, B] + [A, B]\,A.$$

$$\begin{aligned}
[L_x, L_y] &= i\,\hbar\,L_z,\\
[L_y, L_z] &= i\,\hbar\,L_x,\\
[L_z, L_x] &= i\,\hbar\,L_y.
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
[L^2, L_x] &= [L_y^2, L_x] + [L_z^2, L_x]\\
&= L_y\,[L_y, L_x] + [L_y, L_x]\,L_y + L_z\,[L_z, L_x] + [L_z, L_x]\,L_z\\
&= i\,\hbar\,(-L_y\,L_z - L_z\,L_y + L_z\,L_y + L_y\,L_z) = 0,
\end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$[L^2, L_x] = [L^2, L_y] = [L^2, L_z] = 0.$$

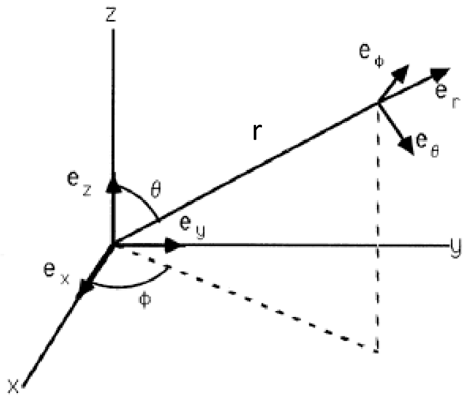
$$\Downarrow$$

Ταυτόχρονη μέτρηση L^2 και L_z.

Αναπαράσταση Θέσης

Σφαιρικές Συντεταγμένες r, θ, φ:

$$\begin{aligned} x &= r \sin\theta \cos\phi, \\ y &= r \sin\theta \sin\phi, \\ z &= r \cos\theta. \end{aligned}$$



Αντίστροφος μετασχηματισμός: $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $\cos\vartheta = \frac{z}{r}$, $\tan\varphi = \frac{y}{x}$

Σχέση διαφορικών τελεστών:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \sin\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta\,\cos\phi}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\sin\phi}{r\,\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \sin\theta\,\sin\phi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta\,\sin\phi}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\phi}{r\,\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}, \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}. \end{aligned}$$

$$\Leftarrow \quad \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial\vartheta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

+3d

Αναπαράσταση Θέσης

Σχέση διαφορικών τελεστών:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \sin\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta\,\cos\phi}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\sin\phi}{r\,\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}, \quad \Leftarrow \quad \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial\vartheta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta\,\sin\phi}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\phi}{r\,\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi},$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}.$$

$$L_x = y\,p_z - z\,p_y,$$
$$L_y = z\,p_x - x\,p_z,$$
$$L_z = x\,p_y - y\,p_x.$$

$$p_x \equiv -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}, \quad p_y \equiv -i\hbar\frac{\partial}{\partial y}, \quad p_z \equiv -i\hbar\frac{\partial}{\partial z}.$$

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \quad y = r\sin\theta\sin\phi, \quad z = r\cos\theta.$$

$$\Rightarrow$$

Τελεστές στροφορμής σε σφαιρικές συν/νες:

$$L_x = -i\hbar\left(-\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cos\phi\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right),$$

$$L_y = -i\hbar\left(\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \sin\phi\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right),$$

$$L_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi},$$

+3f

Αναπαράσταση θέσης

Τελεστές στροφορμής σε σφαιρικές συν/νες:

$$L_x = -i\hbar\left(-\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cos\phi\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right),$$

$$L_y = -i\hbar\left(\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \sin\phi\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right),$$

$$L_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi},$$

$$L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2.$$

$$L^2 = -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]$$

+3g

Οι τελεστές (συνιστώσες) της στροφορμής αναπαρίστανται σε σφαιρικές συν/νες στον χώρο των θέσεων συναρτήσει μόνο των συν/νων θ και ϕ και όχι της ακτίνας r.

Τελεστές Δημιουργίας και Καταστροφής

Ορίζουμε: $L_\pm = L_x \pm i L_y$. ⇒ $(L_\pm)^\dagger = L_\mp$,

Έυρεση $[L_+, L_-]$:

$$\begin{aligned} L_+ L_- &= (L_x + i L_y)(L_x - i L_y) = L_x^2 + L_y^2 - i[L_x, L_y] = L_x^2 + L_y^2 + \hbar L_z \\ &= L^2 - L_z^2 + \hbar L_z. \end{aligned}$$

Όμοια δείχνουμε ότι

$$L_- L_+ = L^2 - L_z^2 - \hbar L_z,$$

+3h

⇒ $[L_+, L_-] = 2\hbar L_z$.

Έυρεση $[L_+, L_z]$: $[L_+, L_z] = [L_x, L_z] + i[L_y, L_z] = -i\hbar L_y - \hbar L_x = -\hbar L_+$,

Όμοια για $[L_-, L_z]$: $[L_-, L_z] = \hbar L_-$.

Τελεστές Δημιουργίας και Καταστροφής στον χώρο Θέσεων

Ορίζουμε:

$$L_\pm = L_x \pm i L_y. \Longrightarrow (L_\pm)^\dagger = L_\mp,$$

$$\left.\begin{aligned} L_x &= -i\hbar\left(-\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cos\phi\,\cot\theta\,\frac{\partial}{\partial\phi}\right), \\ L_y &= -i\hbar\left(\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \sin\phi\,\cot\theta\,\frac{\partial}{\partial\phi}\right), \\ L_z &= -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}, \end{aligned}\right\} \Longrightarrow L_\pm = \hbar\, e^{\pm i\phi}\left(\pm\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\,\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$

+3i

Ιδιοκαταστάσεις Στροφορμής

Εξισώσεις Ιδιοτιμών:

$$
\begin{aligned}
L_z Y_{l,m}(\theta,\phi) &= m\hbar Y_{l,m}(\theta,\phi), \\
L^2 Y_{l,m}(\theta,\phi) &= l(l+1)\hbar^2 Y_{l,m}(\theta,\phi).
\end{aligned}
$$

παραμετροποιημένες ιδιοτιμές (l≥0)

ιδιοκατάσταση

Ορθοκανονικές Ιδιοκαταστάσεις:

$$\oint Y^*_{l',m'}(\theta,\phi)\, Y_{l,m}(\theta,\phi)\, d\Omega = \delta_{ll'}\,\delta_{mm'},$$

$$d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

Δημιουργία Ιδιοκαταστάσεων με τον L_+ :

$$
\begin{aligned}
L_z(L_+ Y_{l,m}) &= (L_+ L_z + [L_z, L_+])\, Y_{l,m} = (L_+ L_z + \hbar L_+)\, Y_{l,m} \\
&= (m+1)\hbar\,(L_+ Y_{l,m}),
\end{aligned}
$$

$$\longrightarrow \quad L_+ Y_{l\,m} \sim Y_{l\,m+1}$$

$$[L_+, L_z] = [L_x, L_z] + i[L_y, L_z] = -i\hbar L_y - \hbar L_x = -\hbar L_+,$$

Ιδιοκαταστάσεις Στροφορμής

Δημιουργία Ιδιοκαταστάσεων με τον L_+ (αύξηση ιδιοτιμών):

$$\begin{aligned} L_z\,(L_+\,Y_{l,m}) &= (L_+\,L_z + [L_z, L_+])\,Y_{l,m} = (L_+\,L_z + \hbar\,L_+)\,Y_{l,m} \\ &= (m+1)\,\hbar\,(L_+\,Y_{l,m}), \end{aligned}$$

$$\longrightarrow \quad L_+ Y_{l\,m} \sim Y_{l\;m+1}$$

$$[L_+, L_z] = [L_x, L_z] + i\,[L_y, L_z] = -i\,\hbar\,L_y - \hbar\,L_x = -\hbar\,L_+,$$

Καταστροφή Ιδιοκαταστάσεων με τον L_+ (μείωση ιδιοτιμών):

$$L_z\,(L_-\,Y_{l,m}) = (m-1)\,\hbar\,(L_-\,Y_{l,m}).$$

$$\longrightarrow \quad L_- Y_{l\,m} \sim Y_{l\;m-1}$$

+3i

$$[L_-, L_z] = \hbar\,L_-.$$

Εύρεση Σταθερών Αναλογίας

$$\left.\begin{aligned} L_+ Y_{l\,m} &\sim Y_{l\,m+1} \\ L_- Y_{l\,m} &\sim Y_{l\,m-1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} L_+ Y_{l,m} &= c^+_{l,m} Y_{l,m+1}, \\ L_- Y_{l,m} &= c^-_{l,m} Y_{l,m-1}, \end{aligned}$$

Εύρεση Σταθερών Αναλογίας

Εύρεση σταθερών c^+, c^- :

$$\left.\begin{aligned} L_+ Y_{l,m} &= c^+_{l,m} Y_{l,m+1}, \\ L_- Y_{l,m} &= c^-_{l,m} Y_{l,m-1}, \\ L_+ L_- &= L^2 - L_z^2 + \hbar L_z. \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad < lm | L_+ L_- | lm > = c^{-*}_{lm} c^-_{lm} = [l\,(l+1) - m\,(m-1)]\,\hbar^2$$

$$\left.\begin{aligned} L_+ Y_{l,m} &= c^+_{l,m} Y_{l,m+1}, \\ L_- Y_{l,m} &= c^-_{l,m} Y_{l,m-1}, \\ L_- L_+ &= L^2 - L_z^2 - \hbar L_z, \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad < lm | L_- L_+ | lm > = c^{+*}_{lm} c^+_{lm} = [l\,(l+1) - m\,(m+1)]\,\hbar^2$$

Επομένως:

$$c^{\pm}_{l,m} = [l\,(l+l) - m\,(m \pm 1)]^{1/2}\,\hbar.$$

και

$$\begin{aligned} L_+ Y_{l,m} &= [l\,(l+1) - m\,(m+1)]^{1/2}\,\hbar\, Y_{l,m+1}, \\ L_- Y_{l,m} &= [l\,(l+1) - m\,(m-1)]^{1/2}\,\hbar\, Y_{l,m-1}. \end{aligned}$$

Ιδιοτιμές του L_z

Δοκιμαστική μορφή ιδιοκατάστασης L^2, L_z:

$$Y_{l,m}(\theta,\phi) = \Theta_{l,m}(\theta)\,\Phi_m(\phi).$$

Ορθοκανονικότητα:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Theta^*_{l',m'}(\theta)\,\Theta_{l,m}(\theta)\,\sin\theta\,d\theta \;=\; \delta_{ll'},$$

$$\int_0^{2\pi} \Phi^*_{m'}(\phi)\,\Phi_m(\phi)\,d\phi \;=\; \delta_{mm'}.$$

$$L_z \;=\; -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}$$

$$L_z\,Y_{l,m}(\theta,\phi) \;=\; m\,\hbar\,Y_{l,m}(\theta,\phi),$$

$$L^2\,Y_{l,m}(\theta,\phi) \;=\; l\,(l+1)\,\hbar^2\,Y_{l,m}(\theta,\phi).$$

$$Y_{l,m}(\theta,\phi) = \Theta_{l,m}(\theta)\,\Phi_m(\phi).$$

$$\Rightarrow\; -i\hbar\frac{d\Phi_m}{d\phi} = m\,\hbar\,\Phi_m. \;\Rightarrow\; \Phi_m(\phi) \sim e^{im\phi}.$$

$$\Phi_m(\phi + 2\pi) \;=\; \Phi_m(\phi) \;\Rightarrow\; m = 0, \pm1, \pm2, \pm3\ldots$$

Κανονικοποίηση:

$$\int_0^{2\pi} \Phi^*_{m'}(\phi)\,\Phi_m(\phi)\,d\phi \;=\; \delta_{mm'}. \;\Rightarrow\; \Phi_m(\phi) = \frac{e^{im\phi}}{\sqrt{2\pi}}.$$

+3i

Ιδιοτιμές του L^2

Έστω η κυματοσυνάρτηση $\psi(\theta,\phi) = L_+\, Y_{l,m}(\theta,\phi)$

Προφανώς ισχύει: $$\oint \psi^*(\theta,\phi)\,\psi(\theta,\phi)\,d\Omega \geq 0,$$

Επομένως:
$$\begin{aligned}\oint (L_+\,Y_{l,m})^*\,(L_+\,Y_{l,m})\,d\Omega &= \oint Y_{l,m}^*\,(L_+)^\dagger\,(L_+\,Y_{l,m})\,d\Omega\\ &= \oint Y_{l,m}^*\,L_-\,L_+\,Y_{l,m}\,d\Omega \geq 0.\end{aligned}$$

$$\oint Y_{l,m}^*\,L_-\,L_+\,Y_{l,m}\,d\Omega \geq 0.$$

$$L_-\,L_+ = L^2 - L_z^2 - \hbar\,L_z,$$

$$\begin{aligned}L_z\,Y_{l,m}(\theta,\phi) &= m\,\hbar\,Y_{l,m}(\theta,\phi),\\ L^2\,Y_{l,m}(\theta,\phi) &= l\,(l+1)\,\hbar^2\,Y_{l,m}(\theta,\phi).\end{aligned}$$

$$\oint Y_{l',m'}^*(\theta,\phi)\,Y_{l,m}(\theta,\phi)\,d\Omega = \delta_{ll'}\,\delta_{mm'},$$

$$\begin{aligned}\oint Y_{l,m}^*\,(L^2 - L_z^2 - \hbar\,L_z)\,Y_{l,m}\,d\Omega &= \oint Y_{l,m}^*\,\hbar^2\,[l\,(l+1) - m\,(m+1)]\,Y_{l,m}\,d\Omega\\ &= \hbar^2\,[l\,(l+1) - m\,(m+1)]\oint Y_{l,m}^*\,Y_{l,m}\,d\Omega\\ &= \hbar^2\,[l\,(l+1) - m\,(m+1)] \geq 0.\end{aligned}$$

$$l\,(l+1) \geq m\,(m+1).$$

Ιδιοτιμές του L^2

$$\oint Y^*_{l,m}\, L_-\, L_+\, Y_{l,m}\, d\Omega \geq 0.$$

$$L_-\, L_+ = L^2 - L_z^2 - \hbar\, L_z,$$

$$\begin{aligned} L_z\, Y_{l,m}(\theta,\phi) &= m\,\hbar\, Y_{l,m}(\theta,\phi), \\ L^2\, Y_{l,m}(\theta,\phi) &= l\,(l+1)\,\hbar^2\, Y_{l,m}(\theta,\phi). \end{aligned}$$

$$\oint Y^*_{l',m'}(\theta,\phi)\, Y_{l,m}(\theta,\phi)\, d\Omega = \delta_{ll'}\,\delta_{mm'},$$

$$\begin{aligned} \oint Y^*_{l,m}\,(L^2 - L_z^2 - \hbar\, L_z)\, Y_{l,m}\, d\Omega &= \oint Y^*_{l,m}\, \hbar^2\, [l\,(l+1) - m\,(m+1)]\, Y_{l,m}\, d\Omega \\ &= \hbar^2\, [l\,(l+1) - m\,(m+1)] \oint Y^*_{l,m}\, Y_{l,m}\, d\Omega \\ &= \hbar^2\, [l\,(l+1) - m\,(m+1)] \geq 0. \end{aligned}$$

$$l\,(l+1) \geq m\,(m+1).$$

Όμοια, από την σχέση:

$$\oint (L_-\, Y_{l,m})^*\,(L_-\, Y_{l,m})\, d\Omega = \oint Y^*_{l,m}\, L_+\, L_-\, Y_{l,m}\, d\Omega \geq 0$$

έχουμε:

$$l\,(l+1) \geq m\,(m-1).$$

+3j

$$\left.\begin{aligned} l\,(l+1) &\geq m\,(m+1). \\ l\,(l+1) &\geq m\,(m-1). \end{aligned}\right\} \xrightarrow{l \geq 0.} -l \leq m \leq l.$$

$$\boxed{\begin{aligned} &m^2 + m - l^2 - l = 0 \Rightarrow m = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4l+4l^2}}{2} = l, (-l-1) \\ &m^2 + m - l^2 - l \leq 0 \Rightarrow -l-1 \leq m \leq l \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &m^2 - m - l^2 - l = 0 \Rightarrow m = \frac{1 \pm \sqrt{1+4l+4l^2}}{2} = -l, (l+1) \\ &m^2 - m - l^2 - l \leq 0 \Rightarrow -l \leq m \leq l+1 \end{aligned}}$$

Ιδιοτιμές του L^2

Έχουμε δείξει ότι: $-l \leq m \leq l.$ και $\Phi_m(\phi + 2\pi) = \Phi_m(\phi)$ $\Rightarrow$ $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots$

Έστω m_ η ελάχιστη τιμή του m. Ισχύει: $L_- Y_{l,m_-} = 0.$

Ακόμα ισχύει:

$$L_+ L_- = L^2 - L_z^2 + \hbar L_z. \Rightarrow L^2 = L_+ L_- + L_z^2 - \hbar L_z \Rightarrow L^2 Y_{l,m_-} = (L_+ L_- + L_z^2 - \hbar L_z) Y_{l,m_-}$$

Επομένως

$$\left.\begin{aligned} L^2 Y_{l,m_-} &= (L_+ L_- + L_z^2 - \hbar L_z) Y_{l,m_-} \\ L_- Y_{l,m_-} &= 0. \\ L_z Y_{l,m}(\theta, \phi) &= m \hbar Y_{l,m}(\theta, \phi), \\ L^2 Y_{l,m}(\theta, \phi) &= l(l+1) \hbar^2 Y_{l,m}(\theta, \phi). \end{aligned}\right\} \Rightarrow l(l+1) Y_{l,m_-} = m_-(m_- - 1) Y_{l,m_-},$$

$$\Downarrow$$

$$l(l+1) = m_-(m_- - 1).$$

+3k $\Downarrow$ $\boxed{m_- < 0}$

$$\boxed{m_- = -l.}$$

Ιδιοτιμές του L^2

Έχουμε δείξει:

$$L^2\, Y_{l,m_-} = (L_+ L_- + L_z^2 - \hbar L_z)\, Y_{l,m_-}$$

$$L_-\, Y_{l,m_-} = 0.$$

$$L_z\, Y_{l,m}(\theta,\phi) = m\,\hbar\, Y_{l,m}(\theta,\phi),$$

$$L^2\, Y_{l,m}(\theta,\phi) = l\,(l+1)\,\hbar^2\, Y_{l,m}(\theta,\phi).$$

$$\Rightarrow \quad l\,(l+1)\, Y_{l,m_-} = m_-\,(m_- - 1)\, Y_{l,m_-},$$

$$l\,(l+1) = m_-\,(m_- - 1).$$

$m_- < 0$

$$\boxed{m_- = -l.}$$

Όμοια δείχνουμε για την μέγιστη τιμή του m (m_+):

$$\boxed{m_+ = +l.}$$

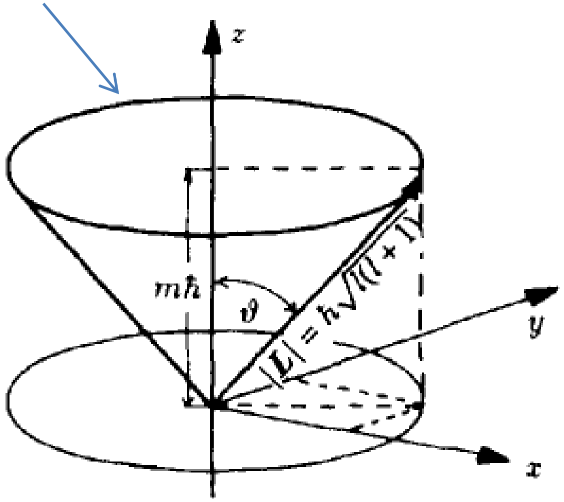
+3l

Άρα ο κβαντικός αριθμός m παίρνει τις ακέραιες τιμές: $-l,\ -l+1,\ \cdots 0,\ \cdots,\ l-1,\ l.$

Ενώ ο κβαντικός αριθμός l είναι μη αρνητικός παίρνει τις ακέραιες τιμές: $0, 1, 2, 3, \cdots.$

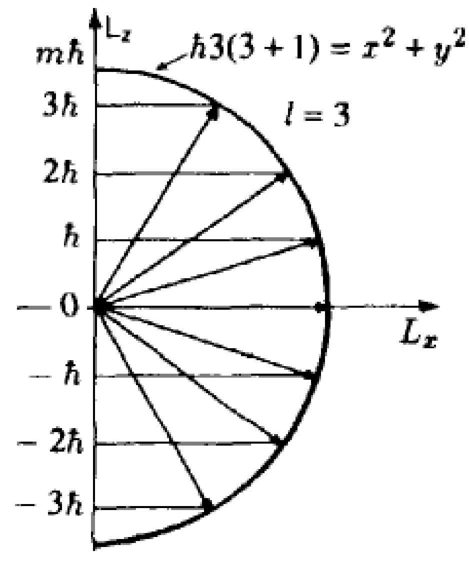
Ιδιοτιμές του L^2

Αβεβαιότητα L_x, L_y:



$$\cos\vartheta = \frac{m}{\sqrt{l(l+1)}}$$

Δυνατές τιμές του L_z για l=3



Ιδιοκαταστάσεις των L^2, L_z
Σφαιρικές Αρμονικές

Έχουμε δείξει ότι η μέγιστη τιμή του m είναι +l. Άρα:

$$L_+ Y_{l,l}(\theta,\phi) = 0,$$

Δοκιμαστική λύση:

$$Y_{l,l}(\theta,\phi) = \Theta_{l,l}(\theta)\, e^{i l \phi}$$

$$L_\pm = \hbar\, e^{\pm i\phi}\left(\pm\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\,\frac{\partial}{\partial\phi}\right).$$

$$Y_{l,l}(\theta,\phi) = \Theta_{l,l}(\theta)\, e^{i l \phi}$$

$$\hbar\, e^{i\phi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\,\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\Theta_{l,l}(\theta)\, e^{i l\phi} = 0.$$

+3m

$$\frac{d\Theta_{l,l}}{d\theta} - l\cot\theta\,\Theta_{l,l} = 0.$$

$$\Theta_{l,l} \sim (\sin\theta)^l.$$

$$\Theta_{l,l} \sim (\sin\theta)^l.$$

$$Y_{l,l}(\theta,\phi) = \Theta_{l,l}(\theta)\, e^{i l\phi}$$

$$Y_{l,l}(\theta,\phi) \sim (\sin\theta)^l\, e^{i l\phi}.$$

Όμοια δείχνουμε ότι:

$$Y_{l,-l}(\theta,\phi) \sim (\sin\theta)^l\, e^{-i l\phi}.$$

+3n

Ιδιοκαταστάσεις των L^2, L_z
Σφαιρικές Αρμονικές

Ξεκινόντας από την Y_{ll} βρίσκουμε με δράση του L_- τις ιδιοκαταστάσεις με μικρότερο m:

$$Y_{l,l-1} \sim L_-\, Y_{l,l} \sim e^{-i\phi}\left(-\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\,\frac{\partial}{\partial\phi}\right)(\sin\theta)^l\, e^{i\,l\,\phi}, \quad \Rightarrow \quad Y_{l,l-1} \sim e^{i\,(l-1)\,\phi}\left(\frac{d}{d\theta} + l\cot\theta\right)(\sin\theta)^l.$$

Γενικά ισχύει:

$$\left(\frac{d}{d\theta} + l\cot\theta\right) f(\theta) \equiv \frac{1}{(\sin\theta)^l}\frac{d}{d\theta}\left[(\sin\theta)^l f(\theta)\right],$$

+3o

$$\left.\begin{aligned} &Y_{l,l-1} \sim e^{i\,(l-1)\,\phi}\left(\frac{d}{d\theta} + l\cot\theta\right)(\sin\theta)^l. \\ &\left(\frac{d}{d\theta} + l\cot\theta\right) f(\theta) \equiv \frac{1}{(\sin\theta)^l}\frac{d}{d\theta}\left[(\sin\theta)^l f(\theta)\right], \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad Y_{l,l-1}(\theta,\phi) \sim \frac{e^{i\,(l-1)\,\phi}}{(\sin\theta)^{l-1}}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\right)(\sin\theta)^{2l}.$$

Όμοια δείχνουμε ότι:

$$Y_{l,-l+1}(\theta,\phi) \sim L_+\, Y_{l,-l} \sim \frac{e^{-i\,(l-1)\,\phi}}{(\sin\theta)^{l-1}}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\right)(\sin\theta)^{2l}.$$

+3p

Ιδιοκαταστάσεις των L^2, L_z
Σφαιρικές Αρμονικές

Συνεχίζοντας από την $Y_{l\,l-1}$ βρίσκουμε με δράση του L_- τις ιδιοκαταστάσεις με μικρότερο m:

$$Y_{l,l-2} \sim L_-\, Y_{l,l-1} \sim e^{-i\phi}\left(-\frac{\partial}{\partial\theta} + i\,\underset{l-1}{\underset{\uparrow}{}}\cot\theta\,\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\frac{e^{i\,(l-1)\,\phi}}{(\sin\theta)^{l-1}}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\right)(\sin\theta)^{2l},$$

$$\left(\frac{d}{d\theta} + l\,\cot\theta\right)f(\theta) \equiv \frac{1}{(\sin\theta)^l}\frac{d}{d\theta}\left[(\sin\theta)^l\, f(\theta)\right],$$

$$Y_{l,l-2}(\theta,\phi) \sim \frac{e^{i\,(l-2)\,\phi}}{(\sin\theta)^{l-2}}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\right)^2(\sin\theta)^{2l}.$$ +3q

Όμοια δείχνουμε ότι:

$$Y_{l,-l+2}(\theta,\phi) \sim L_+\, Y_{l,-l+1} \sim \frac{e^{-i\,(l-2)\,\phi}}{(\sin\theta)^{l-2}}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\right)^2(\sin\theta)^{2l}.$$ +3r

Γενικεύοντας έχουμε:

$$Y_{l,l}(\theta,\phi) \sim (\sin\theta)^l\, e^{i\,l\,\phi}.$$

$$Y_{l,l-1}(\theta,\phi) \sim \frac{e^{i\,(l-1)\,\phi}}{(\sin\theta)^{l-1}}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\right)(\sin\theta)^{2l}.$$

$$Y_{l,l-2}(\theta,\phi) \sim \frac{e^{i\,(l-2)\,\phi}}{(\sin\theta)^{l-2}}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\right)^2(\sin\theta)^{2l}.$$

$$\Rightarrow\quad Y_{l,m}(\theta,\phi) \sim \frac{e^{i\,m\,\phi}}{(\sin\theta)^m}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\right)^{l-m}(\sin\theta)^{2l}.$$

Ιδιοκαταστάσεις των L^2, L_z
Σφαιρικές Αρμονικές

Αντίστοιχα έχουμε:

$$Y_{l,-l}(\theta,\phi) \sim (\sin\theta)^l e^{-il\phi}.$$

$$Y_{l,-l+1}(\theta,\phi) \sim L_+ Y_{l,-l} \sim \frac{e^{-i(l-1)\phi}}{(\sin\theta)^{l-1}} \left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\right)(\sin\theta)^{2l}.$$

$$Y_{l,-l+2}(\theta,\phi) \sim L_+ Y_{l,-l+1} \sim \frac{e^{-i(l-2)\phi}}{(\sin\theta)^{l-2}} \left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\right)^2(\sin\theta)^{2l}.$$

$$Y_{l,l}(\theta,\phi) \sim (\sin\theta)^l e^{il\phi}.$$

$$Y_{l,l-1}(\theta,\phi) \sim \frac{e^{i(l-1)\phi}}{(\sin\theta)^{l-1}} \left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\right)(\sin\theta)^{2l}.$$

$$Y_{l,l-2}(\theta,\phi) \sim \frac{e^{i(l-2)\phi}}{(\sin\theta)^{l-2}} \left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\right)^2(\sin\theta)^{2l}.$$

$$Y_{l,-m} \sim Y^*_{l,m}.$$

Γενικεύοντας έχουμε (m≥0):

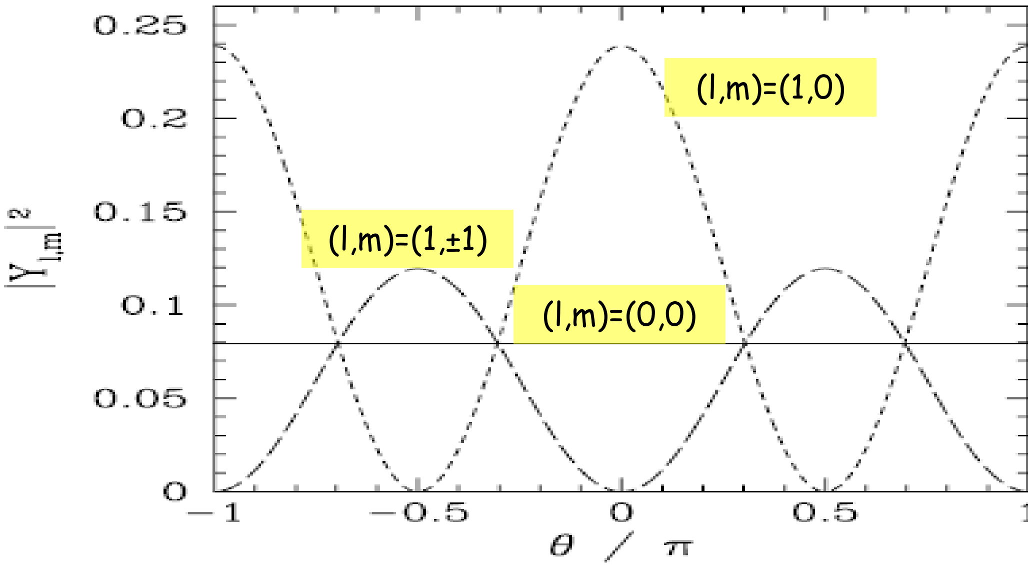
$$Y_{l,m}(\theta,\phi) \sim \frac{e^{im\phi}}{(\sin\theta)^m} \left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\right)^{l-m}(\sin\theta)^{2l}.$$

m≥0

$$u = \cos\theta \quad \Rightarrow \quad Y_{l,m}(u,\phi) \sim e^{im\phi}(1-u^2)^{-m/2}\left(\frac{d}{du}\right)^{l-m}(1-u^2)^l.$$

Ιδιοκαταστάσεις των L^2, L_z
Σφαιρικές Αρμονικές

Σφαιρική συμμετρία για (l,m)=(0,0)



$$Y_{0,0} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \qquad Y_{0,0} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$$

$$Y_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta \qquad Y_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\frac{z}{r}$$

$$Y_{1,\pm1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{\pm i\phi} \qquad Y_{1,\pm1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\frac{x \pm iy}{r}$$

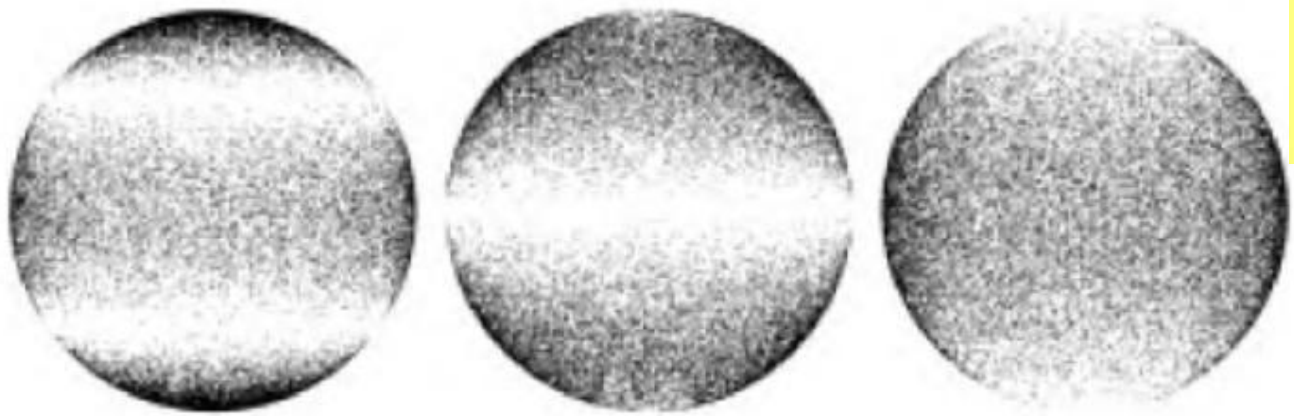
$$Y_{2,0} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}(3\cos^2\theta - 1) \qquad Y_{2,0} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}\frac{3z^2 - r^2}{r^2}$$

$$Y_{2,\pm1} = \mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta\, e^{\pm i\phi} \qquad Y_{2,\pm1} = \mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\frac{(x \pm iy)z}{r^2}$$

$$Y_{2,\pm2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta\, e^{\pm 2i\phi} \qquad Y_{2,\pm2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\frac{x^2 - y^2 \pm 2ixy}{r^2}$$

Ιδιοκαταστάσεις των L^2, L_z
Σφαιρικές Αρμονικές

Γωνιακή Πυκνότητα Πιθανότητας



(2, 0) (2,±1) (2,±2)

$Y_{0,0} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$	$Y_{0,0} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$
$Y_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$	$Y_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\frac{z}{r}$
$Y_{1,\pm1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{\pm i\phi}$	$Y_{1,\pm1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\frac{x \pm iy}{r}$
$Y_{2,0} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}(3\cos^2\theta - 1)$	$Y_{2,0} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}\frac{3z^2 - r^2}{r^2}$
$Y_{2,\pm1} = \mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta\, e^{\pm i\phi}$	$Y_{2,\pm1} = \mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\frac{(x \pm iy)z}{r^2}$
$Y_{2,\pm2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta\, e^{\pm 2i\phi}$	$Y_{2,\pm2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\frac{x^2 - y^2 \pm 2ixy}{r^2}$

Κανονικοποίηση Σφαιρικών Αρμονικών

Για κανονικοποίηση απαιτούμε:

$$\oint |Y_{l,m}(\theta,\phi)|^2 \, d\Omega = 1.$$

Μετά από πράξεις βρίσκουμε:

$$Y_{l,m}(\theta,\phi) = (-1)^m \left[\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}\right]^{1/2} P_{l,m}(\cos\theta)\, e^{i m \phi}$$

όπου (m≥0):

$$P_{l,m}(u) = (-1)^{l+m} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{(1-u^2)^{-m/2}}{2^l\, l!} \left(\frac{d}{du}\right)^{l-m} (1-u^2)^l$$

και (m≤0):

$$P_{l,m}(u) = (-1)^l \frac{(1-u^2)^{m/2}}{2^l\, l!} \left(\frac{d}{du}\right)^{l+m} (1-u^2)^l,$$

Επομένως;

$$Y_{l,-m} = (-1)^m\, Y^*_{l,m}.$$

Ορθοκανονική βάση;

$$\oint Y^*_{l',m'}\, Y_{l,m}\, d\Omega = \delta_{ll'}\, \delta_{mm'},$$

Σύνοψη

Ο κβαντομηχανικός τελεστής της στροφορμής προκύπτει από την αντίστοιχη κλασική ποσότητα και θα παίξει σημαντικό ρόλο στην λύση της εξίσωσης του Schrodinger για κεντρικά δυναμικά V(r) σε 3D.

Οι συνιστώσες της στροφορμής δεν μετατίθενται μεταξύ τους και επομένως δεν έχουν κοινή βάση ιδιοκαταστάσεων.

Το τετράγωνο της στροφορμής L^2 μετατίθεται με κάθε συνιστώσα και επομένως υπάρχει κοινή βάση ιδιοκαταστάσεων μεταξύ L^2 και L_z.

Οι ιδιοτιμές των L^2 και L_z έχουν την μορφή $l(l+1)\hbar^2$ και $m\hbar$ αντίστοιχα όπου l είναι μη αρνητικός ακέραιος και για κάθε l ο m παιρνει τις τιμές –l, -l+1, …-1,0,1,…l-1,l.

Οι ιδιοκαταστάσεις στον χώρο των θέσεων των L^2 και L_z λέγονται Σφαιρικές Αρμονικές $Y_{lm}(\theta,\varphi)$ και αποτελούν ορθοκανονική βάση.

Άσκηση 1

Δείξτε ότι $$[L_i, r_j] = i\hbar \sum_k \varepsilon_{ijk} r_k$$

Από τον ορισμό της στροφορμής έχουμε: $$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \Longrightarrow L_i = \sum_{kl} \varepsilon_{kli} r_k p_l$$

Επομένως: $$[L_i, r_j] = \sum_{kl} \varepsilon_{kli} [r_k p_l, r_j] = \sum_{kl} \varepsilon_{kli} (r_k [p_l, r_j] + [r_k, r_j] p_l)$$

Χρησιμοποιούμε τις γνωστές σχέσεις μετάθεσης: $$[r_k, r_j] = 0 \qquad [p_l, r_j] = -i\hbar \delta_{lj}.$$

$$[L_i, r_j] = \sum_{kl} \varepsilon_{kli} (-i\hbar)\, \delta_{lj} r_k = -i\hbar \sum_k \varepsilon_{kji} r_k = -i\hbar \sum_k \varepsilon_{ikj} r_k = i\hbar \sum_k \varepsilon_{ijk} r_k$$

Άσκηση 2

Δείξτε ότι $\mathbf{L}\times\mathbf{L} = i\hbar\mathbf{L}.$

Για κάθε συνιστώσα έχουμε:

$$\begin{cases} (\mathbf{L}\times\mathbf{L})_x = L_yL_z - L_zL_y = [L_y, L_z] = i\hbar L_x \\ (\mathbf{L}\times\mathbf{L})_y = L_zL_x - L_xL_z = [L_z, L_x] = i\hbar L_y \\ (\mathbf{L}\times\mathbf{L})_z = L_xL_y - L_yL_x = [L_x, L_y] = i\hbar L_z \end{cases}$$

Επομένως $\mathbf{L}\times\mathbf{L} = i\hbar\mathbf{L}.$

Άσκηση 3

Θεωρήστε σύστημα με l=1 βρείτε την αναπαράσταση των τελεστών L_x, L_y, L_z και L^2 στην βάση των ιδιοκαταστάσεων των L_z και L^2 .

Συμβολίζουμε τις ιδιοκαταστάσεις ως:

$$\begin{cases} |1\rangle & l = 1,\ m = 1 \\ |0\rangle & l = 1,\ m = 0 \\ |-1\rangle & l = 1,\ m = -1 \end{cases}$$

$$|1\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |0\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |-1\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Η δράση του L_x στην βάση αυτή είναι:

$$\begin{cases} L_x|1\rangle = \frac{1}{2}(L_+ + L_-)|1\rangle = \frac{1}{2}L_-|1\rangle = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}|0\rangle \\ L_x|0\rangle = \frac{1}{2}(L_+ + L_-)|0\rangle = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |-1\rangle) \\ L_x|-1\rangle = \frac{1}{2}(L_+ + L_-)|-1\rangle = \frac{1}{2}L_+|-1\rangle = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}|0\rangle \end{cases}$$

Επομένως:

$$L_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_+ Y_{l,m} = [l(l+1) - m(m+1)]^{1/2}\,\hbar\, Y_{l,m+1},$$
$$L_- Y_{l,m} = [l(l+1) - m(m-1)]^{1/2}\,\hbar\, Y_{l,m-1}.$$

Άσκηση 3

Θεωρήστε σύστημα με l=1 βρείτε την αναπαράσταση των τελεστών L_x, L_y, L_z και L^2 στην βάση των ιδιοκαταστάσεων των L_z και L^2 .

Αντίστοιχα για την L_y έχουμε:

$$\begin{cases} L_y|1\rangle = \frac{1}{2i}(L_+ - L_-)|1\rangle = \frac{i\hbar}{\sqrt{2}}|0\rangle \\ L_y|0\rangle = \frac{1}{2i}(L_+ - L_-)|0\rangle = \frac{i\hbar}{\sqrt{2}}(|-1\rangle - |1\rangle) \\ L_y|-1\rangle = \frac{1}{2i}(L_+ - L_-)|-1\rangle = -\frac{i\hbar}{\sqrt{2}}|0\rangle \end{cases}$$

$$L_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

Επίσης για την L_z έχουμε:

$$L_z|1\rangle = \hbar|1\rangle,\ L_z|0\rangle = 0,\ L_z|-1\rangle = -\hbar|-1\rangle$$

$$L_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 3

Θεωρήστε σύστημα με l=1 βρείτε την αναπαράσταση των τελεστών L_x, L_y, L_z και L^2 στην βάση των ιδιοκαταστάσεων των L_z και L^2 .

Τέλος για την L^2 έχουμε:

$$L^2|1\rangle = 2\hbar^2|1\rangle, \; L^2|0\rangle = 2\hbar^2|0\rangle, \qquad L^2|-1\rangle = 2\hbar^2|-1\rangle$$

$$L^2 = 2\hbar^2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Συγκεντρωτικά:

$$L_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad L_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \qquad L_z = \hbar\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 4

Θεωρήστε σύστημα με l=1 βρείτε πιθανότητα να δώσει μια μέτρηση της L_x τιμή ίση με 0 αν η κατάσταση του συστήματος στην βάση των L_z και L^2 είναι

$$\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Θα βρούμε τις ιδιοκαταστάσεις και τις ιδιοτιμές του L_x και μετά θα προβάλουμε την κατάσταση που δίνεται στην ιδιοκατάσταση με $L_x = 0$.

Σύμφωνα με την προηγούμενη άσκηση, αναπαράσταση του L_x είναι: $L_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Έστω ότι οι ιδιοτιμές του L_x είναι της μορφής $\hbar\lambda/\sqrt{2}$.

Η ιδιοτιμή λ είναι λύση της $\det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - 1) + \lambda = 2\lambda - \lambda^3 = 0$

Άσκηση 4

Έστω ότι οι ιδιοτιμές του L_x είναι της μορφής $\hbar\lambda/\sqrt{2}$.

Η ιδιοτιμή λ είναι λύση της

$$\det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(\lambda^2-1)+\lambda = 2\lambda-\lambda^3 = 0$$

Με λύσεις $\lambda = 0, \pm\sqrt{2}$

Επομένως οι ιδιοτιμές της L_x είναι $\pm\hbar$ και 0.

Έστω το ιδιοδιάνυσμα της L_x που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $+\hbar$:

$$|1\rangle_x = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a|1\rangle + b|0\rangle + c|-1\rangle$$

με συνθήκη κανονικοποίησης:

$$|a|^2+|b|^2+|c|^2 = 1$$

Άσκηση 4

Έστω το ιδιοδιάνυσμα της L_x που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $+\hbar$:

$$|1\rangle_x = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a|1\rangle + b|0\rangle + c|-1\rangle$$

με συνθήκη κανονικοποίησης:

$$|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 = 1$$

Η εξίσωση ιδιοτιμών είναι:

$$\frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \hbar \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

που οδηγεί σε

$$\text{I} \quad b = \sqrt{2}a \qquad \text{II} \quad a + c = \sqrt{2}(a+b) \qquad \text{III} \quad b = \sqrt{2}c$$

$$\Downarrow$$

$$b = \sqrt{2}a = \sqrt{2}c$$

$$\Downarrow$$

$$a^2 + 2a^2 + a^2 = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$|1\rangle_x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(|1\rangle + \sqrt{2}|0\rangle + |-1\rangle\right)$$

Άσκηση 4

Έστω το ιδιοδιάνυσμα της L_x που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 0:

$$|0\rangle_x = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a|1\rangle + b|0\rangle + c|-1\rangle$$

με συνθήκη κανονικοποίησης:

$$|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 = 1$$

Η εξίσωση ιδιοτιμών είναι:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

που οδηγεί σε

$$\mathbf{I} \quad b = 0 \qquad\qquad \mathbf{II} \quad a + c = 0$$

$$a^2 + 0 + a^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad a = 1/\sqrt{2}.$$

$$|0\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |-1\rangle)$$

Όμοια βρίσκουμε:

+3s

$$|-1\rangle_x = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(|1\rangle - \sqrt{2}|0\rangle + |-1\rangle)$$

Άσκηση 4

$$|0\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |-1\rangle)$$

Η κατάσταση του συστήματος γράφεται:

$$|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{14}}(|1\rangle + 2|0\rangle + 3|-1\rangle)$$

Επομένως:

$${}_x\langle 0|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{28}}(1-3) = -\frac{1}{\sqrt{7}}$$

Άρα η πιθανότητα να δώσει η μέτρηση την τιμή $L_x = 0$ είναι

$$P_x(0) = |{}_x\langle 0|\alpha\rangle|^2 = \frac{1}{7}$$

Άσκηση 5

Έστω σωμάτιο με κυματοσυνάρτηση: $\psi(x, y, z) = N(x+y+z)\, e^{-[(x^2+y^2+z^2)/\alpha^2]}$

Βρείτε την πιθανότητα μέτρηση των L_z και L^2 να δώσει τις τιμές $L_z = 0$ και $L^2 = 2\hbar^2$. Δίνονται οι γνωστές σχέσεις:

$$Y_1^1(\theta, \phi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta\, e^{i\phi} \qquad Y_1^0(\theta, \phi) = +\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta \qquad Y_1^{-1}(\theta, \phi) = +\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta\, e^{-i\phi}$$

Εκφράζουμε την κυματοσυνάρτηση σε σφαιρικές συν/νες

$$x = r \sin\theta \cos\phi \qquad y = r \sin\theta \sin\phi \qquad z = r\cos\theta$$

όπου $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

Έχουμε: $\psi(r, \theta, \phi) = N[\sin\theta(\cos\phi + \sin\phi) + \cos\theta]\, r e^{-r^2/\alpha^2}$

$$R(r) = N r e^{-r^2/\alpha^2}$$

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r)\, T(\theta, \phi)$$

$$T(\theta, \phi) = \sum_{l\,m} a_{lm} Y_l^m(\theta, \phi) = \sin\theta \cos\phi + \sin\theta \sin\phi + \cos\theta$$

Άσκηση 5

$$Y_1^1(\theta,\phi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{i\phi} \qquad Y_1^0(\theta,\phi) = +\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta \qquad Y_1^{-1}(\theta,\phi) = +\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{-i\phi}$$

$$T(\theta,\phi) = \sum_{l\,m} a_{lm}\, Y_l^m(\theta,\phi) = \sin\theta\,\cos\phi + \sin\theta\,\sin\phi + \cos\theta$$

Από την μορφή των σφαιρικών αρμονικών που δίνονται, εύκολα προκύπτει ότι:

$$T(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{8\pi}{3}}\left[\,\frac{1}{2}(Y_1^{-1} - Y_1^1) - \frac{1}{2i}(Y_1^{-1} + Y_1^1)\,\right] + \sqrt{\frac{4\pi}{3}}Y_1^0$$

+3t

$$= \sqrt{\frac{2\pi}{3}}\left[\,(1+i)\,Y_1^{-1} - (1-i)\,Y_1^1 + \sqrt{2}Y_1^0\,\right]$$

Έστω η κανονικοποιημένη γωνιακή κυματοσυνάρτηση $T'(\theta,\phi) = \beta T(\theta,\phi)$

Έχουμε: $\beta^2\int T^*(\theta,\phi)\,T(\theta,\phi)\,d\theta\,d\phi = \beta^2\frac{2\pi}{3}(2+2+2) = 4\pi\beta^2 = 1 \Longrightarrow \beta = 1/\sqrt{4\pi}.$

+3u

Άσκηση 5

$$T(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{8\pi}{3}}\left[\frac{1}{2}(Y_1^{-1} - Y_1^1) - \frac{1}{2i}(Y_1^{-1} + Y_1^1)\right] + \sqrt{\frac{4\pi}{3}}Y_1^0$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi}{3}}\left[(1+i)Y_1^{-1} - (1-i)Y_1^1 + \sqrt{2}Y_1^0\right]$$

$$T'(\theta,\phi) = \beta T(\theta,\phi)$$

$$\beta = 1/\sqrt{4\pi}.$$

$$T'(\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{6}}\left[(1+i)Y_1^{-1} - (1-i)Y_1^1 + \sqrt{2}Y_1^0\right]$$

Άρα η πιθανότητα να δώσει η μέτρηση $L_z = 0$ και $L^2 = 2\hbar^2$ είναι

$$P = |\langle 1,0|T'\rangle|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{2}\right|^2 = \frac{1}{3}$$

Όμοια έχουμε:

$$P = |\langle 1,1|T'\rangle|^2 = \left|-\frac{1-i}{\sqrt{6}}\right|^2 = \frac{1}{3}$$

$$P = |\langle 1,-1|T'\rangle|^2 = \left|\frac{1+i}{\sqrt{6}}\right|^2 = \frac{1}{3}$$

Άλυτες Ασκήσεις

1. Συμμετρική σβούρα έχει ενέργεια της μορφής $H = \frac{1}{2I_x}(L_x^2 + L_y^2) + \frac{1}{2I_z}L_z^2$

Βρείτε τις ιδιοκαταστάσεις και τις ιδιοτιμές της Χαμιλτονιανής

Βρείτε την αναμενόμενη (μέση) τιμή του τελεστή $L_x + L_y + L_z$ σε μια από τις ιδιοκαταστάσεις της Χαμιλτονιανής.

Την t=0 το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση |l,m>=|3,0>. Ποια μέτρηση θα προκύψει για την L_z σε μια επόμενη χρονική στιγμή;

2. Σύστημα βρίσκεται σε ιδιοκατάσταση |l,m>. Βρείτε το άθροισμα των αβεβαιοτήτων $\Delta L_x^2 + \Delta L_y^2$.

3. Δείξτε ότι $(a)\ [L_i, p_j] = i\hbar \sum_k \varepsilon_{ijk}\, p_k$. $(b)\ [L_i, p^2] = [L_i, r^2] = [L_i, \mathbf{r}\cdot\mathbf{p}] = 0.$

Άλυτες Ασκήσεις

4. Αποδείξτε τις σχέσεις που δεν αποδείχτηκαν στην διάλεξη. Συγκεκριμένα:

$$L_x = -i\hbar\left(-\sin\phi\,\frac{\partial}{\partial\theta} - \cos\phi\,\cot\theta\,\frac{\partial}{\partial\phi}\right),$$

$$L_y = -i\hbar\left(\cos\phi\,\frac{\partial}{\partial\theta} - \sin\phi\,\cot\theta\,\frac{\partial}{\partial\phi}\right),$$

$$L_z = -i\hbar\,\frac{\partial}{\partial\phi},$$

$$L_\pm = \hbar\, e^{\pm i\phi}\left(\pm\frac{\partial}{\partial\theta} + i\,\cot\theta\,\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$

$$[L_-, L_z] = \hbar\, L_-.$$

$$\boxed{m_+ = +l.}$$

$$\left(\frac{d}{d\theta} + l\,\cot\theta\right) f(\theta) \equiv \frac{1}{(\sin\theta)^l}\frac{d}{d\theta}\left[(\sin\theta)^l f(\theta)\right],$$

$$Y_{l,-l}(\theta,\phi) \sim (\sin\theta)^l\, e^{-il\phi}.$$

$$Y_{l,-l+1}(\theta,\phi) \sim L_+\,Y_{l,-l} \sim \frac{e^{-i(l-1)\phi}}{(\sin\theta)^{l-1}}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\right)(\sin\theta)^{2l}.$$

$$L_-\,L_+ = L^2 - L_z^2 - \hbar\,L_z,$$

$$Y_{l,-l+2}(\theta,\phi) \sim L_+\,Y_{l,-l+1} \sim \frac{e^{-i(l-2)\phi}}{(\sin\theta)^{l-2}}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\right)^2(\sin\theta)^{2l}.$$

$$L_- Y_{l\,m} \sim Y_{l\,m-1}$$