+3j

$$\oint (L_- Y_{\ell m})^* \cdot (L_- Y_{\ell m}) d\Omega \geq 0$$

$$= \oint L_-^+ Y^*_{\ell m} \cdot L_- Y_{\ell m} d\Omega \geq 0$$

$$= \oint Y^*_{\ell m} L_+ L_- Y_{\ell m} d\Omega \geq 0 \quad *$$

Πρέπει να υπολογίσουμε το $L_+ L_-$:

$$\left.\begin{array}{l} L_+ = L_x + i L_y \\ L_- = L_x - i L_y \end{array}\right\} \quad L_+ . L_- = (L_x + i L_y)(L_x - i L_y)$$

$$= L_x^2 - i L_x . L_y + i L_y . L_x + L_y^2$$

$$= L_x^2 + L_y^2 + i(L_y . L_x - L_x . L_y)$$

Γνωρίζουμε ότι: $[AB] = AB - BA$

Επομένως: $[L_y, L_x] = L_y . L_x - L_x . L_y$

το $[L_y L_x] = -i\hbar L_z$

Επομένως: $L_+ L_- = L^2 - L_z^2 + \hbar L_z$

Το αντικαθιστούμε στην $*$:

$$\oint Y^*_{\ell m} (L^2 - L_z^2 + \hbar L_z) Y_{\ell m} d\Omega \geq 0$$

$$\Rightarrow \left[\ell(\ell+1)\hbar^2 - m^2\hbar^2 + \hbar m \hbar\right] \oint Y^*_{\ell m} Y_{\ell m} d\Omega \geq 0$$

$$\Rightarrow \hbar^2 \left[\ell(\ell+1) - m(m-1)\right] \geq 0$$

Άρα: $\boxed{\ell(\ell+1) \geq m(m-1)}$

+3k

ορίζουμε την ελάχιστη τιμή m_- του m και να ισχύει ότι: $L_- Y_{\ell m} = 0$.

Γνωρίζουμε ότι: $L^2 Y_{\ell m}(\theta, \phi) = \ell(\ell+1)\hbar^2 Y_{\ell m}(\theta, \phi)$ *

Επίσης: $L_+ L_- = (L_x + iL_y)(L_x - iL_y) = L_x^2 - iL_xL_y + iL_y \cdot L_x + L_y^2$

$= L_x^2 + L_y^2 + i(L_y \cdot L_x - L_x L_y) = L_x^2 + L_y^2 + i[L_y, L_x]$

$= L^2 - L_z^2 + \hbar L_z$

$\Rightarrow L^2 = L_+L_- + L_z^2 - \hbar L_z$

Άρα: $L^2 Y_{\ell m}(\theta, \phi) = L_+ L_- Y_{\ell m}(\theta, \phi) + L_z^2 Y_{\ell m}(\theta, \phi) - \hbar L_z Y_{\ell m}(\theta, \phi)$

$= 0 - \hbar m_- \hbar Y_{\ell m}(\theta, \phi) + m_-^2 \hbar^2 Y_{\ell m}(\theta, \phi)$

Αντικαθιστώντας στην * , έχουμε:

$\ell(\ell+1)\cancel{\hbar^2} = m_-^2 \cancel{\hbar^2} - m_- \cancel{\hbar^2}$

$\ell(\ell+1) = m_-(m_- - 1)$

Για να βρω το m_- αρκεί να λύσω την παραπάνω εξίσωση:

$\ell^2 + \ell = m_-^2 - m_-$

$\Rightarrow m_-^2 - m_- - \ell^2 - \ell = 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1(-1)(\ell^2 + \ell)$

$\Delta = 1 + 4(\ell^2 + \ell)$

Άρα: $m_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4\ell^2+4\ell}}{2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{(2\ell+1)^2}}{2} = \dfrac{1 \pm (2\ell+1)}{2}$

$m_{1-} = \dfrac{1+2\ell+1}{2} = \dfrac{2+2\ell}{2} = \ell+1$ (απορρίπτεται για $m_- < 0$)

$m_{2-} = \dfrac{1-2\ell-1}{2} = -\ell$

Επομένως $\boxed{m_- = -\ell}$