Πρόσθεση Στροφορμών

Δομή Διάλεξης

Ορισμός Ολικής Στροφορμής

Σχέση βάσης ολικής στροφορμής (j,m_j) με βάση επιμέρους στροφορμών (m_1,m_2)

Συντελεστές μετάβασης (Glebsch-Gordon) για σύνθεση από $l=1$, $s=1/2$

Συντελεστές μετάβασης (Glebsch-Gordon) για σύνθεση από $s_1=1/2$, $s_2=1/2$

Σύνοψη - Ασκήσεις

Ολική Στροφορμή J

Έστω σωμάτιο με τροχιακή στροφορμή **L**=(L_x, L_y, L_z) και spin **S**=(S_x, S_y, S_z).

Ορίζουμε το άθροισμα **J=L+S** . Θα δούμε ότι το **J** ικανοποιεί σχέσεις μετάθεσης στροφορμής

Οι σχέσεις μετάθεσης της τροχιακής στροφορμής **L** εκφράζονται περιεκτικά ως:

$$\mathbf{L} \times \mathbf{L} = \mathrm{i}\,\hbar\,\mathbf{L}.$$

Αντίστοιχα για το spin έχουμε:

$$\mathbf{S} \times \mathbf{S} = \mathrm{i}\,\hbar\,\mathbf{S}.$$

Ισχύει ακόμα: $[\mathrm{L_i}, \mathrm{S_j}] = 0,$ (ανεξάρτητες στροφορμές)

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}. \\ \mathbf{L} \times \mathbf{L} = \mathrm{i}\,\hbar\,\mathbf{L}. \\ \mathbf{S} \times \mathbf{S} = \mathrm{i}\,\hbar\,\mathbf{S}. \\ [\mathrm{L_i}, \mathrm{S_j}] = 0, \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \mathbf{J} \times \mathbf{J} & = & (\mathbf{L} + \mathbf{S}) \times (\mathbf{L} + \mathbf{S}) \\ & = & \mathbf{L} \times \mathbf{L} + \mathbf{S} \times \mathbf{S} + \mathbf{L} \times \mathbf{S} + \mathbf{S} \times \mathbf{L} = \mathbf{L} \times \mathbf{L} + \mathbf{S} \times \mathbf{S} \\ & = & \mathrm{i}\,\hbar\,\mathbf{L} + \mathrm{i}\,\hbar\,\mathbf{S} \\ & = & \mathrm{i}\,\hbar\,\mathbf{J}. \end{array}\right.$$

Ολική Στροφορμή J

Επομένως δείξαμε ότι: $\mathbf{J} \times \mathbf{J} = i\,\hbar\,\mathbf{J}.$

Άρα για την ολική στροφορμή J ισχύουν όσα δείξαμε για τα άλλα είδη στροφορμών χρησιμοποιώντας μόνο τις σχέσεις μετάθεσης:

Το $J^2=J_x^2+J_y^2+J_z^2$ μετατίθεται με μια συνιστώσα (πχ J_z) και έχει κοινό σύστημα ιδιοκαταστάσεων (βάση) με αυτή.

$$
\begin{aligned}
J_z\,\psi_{j,m_j} &= m_j\,\hbar\,\psi_{j,m_j}, \\
J^2\,\psi_{j,m_j} &= j\,(j+1)\,\hbar^2\,\psi_{j,m_j},
\end{aligned}
$$

όπου το j παίρνει ακέραιες και ημιακέραιες τιμές και το m_j παίρνει τις τιμές:

$$-j, -j+1, \cdots, j-1, j.$$

+6a

Σχέση J^2 με L^2 και S^2

Έχουμε ότι:

$$J^2 = (\mathbf{L}+\mathbf{S})\cdot(\mathbf{L}+\mathbf{S}) = L^2 + S^2 + 2\,\mathbf{L}\cdot\mathbf{S},$$

$$L_+S_- + L_-S_+ = \left(L_x + iL_y\right)\left(S_x - iS_y\right) + \left(L_x - iL_y\right)\left(S_x + iS_y\right) =$$
$$= \left(L_xS_x + L_yS_y - iL_xS_y + iL_yS_x\right) + \left(L_xS_x + L_yS_y + iL_xS_y - iL_yS_x\right) =$$
$$= 2\left(L_xS_x + L_yS_y\right)$$

$$J^2 = L^2 + S^2 + 2\,L_z\,S_z + L_+\,S_- + L_-\,S_+.$$

+6b

Χρήσιμές σχέσεις μετάθεσης:

$$J^2 = L^2 + S^2 + 2\,L_z\,S_z + L_+\,S_- + L_-\,S_+. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} [J^2, L^2] = 0. \\ [J^2, S^2] = 0. \\ [J^2, L_z] \neq 0. \\ [J^2, S_z] \neq 0. \end{array}\right.$$

+6c

Το J^2 έχει κοινές ιδιοκαταστάσεις με τα L^2 και S^2 αλλά όχι και με τα L_z και S_z!

Δύο σετ μετατιθέμενων στροφορμών

Το J^2 έχει κοινές ιδιοκαταστάσεις με τα L^2 και S^2 αλλά όχι και με τα L_z και S_z!

Ακόμα το $J_z=L_z+S_z$ έχει κοινές ιδιοκαταστασεις με όλες τις στροφορμές αφου

$$[J_z, L_z] = [J_z, S_z] = 0.$$

Άρα υπάρχουν δυο σετ μετατιθέμενων μεγεθών

$L^2,\ S^2,\ L_z,\ S_z,$ Σετ (1): Κοινές ιδιοκαταστάσεις, ταυτόχρονη μέτρηση χωρίς αβεβαιότητα

$L^2,\ S^2,\ J^2,\ J_z$ Σετ (2): Κοινές ιδιοκαταστάσεις, ταυτόχρονη μέτρηση χωρίς αβεβαιότητα

Όμως το J^2 δεν μπορεί να μετρηθεί ταυτόχρονα με τα L_z και S_z αφού

$$[J^2, L_z] \neq 0.$$
$$[J^2, S_z] \neq 0.$$

Δύο σετ μετατιθέμενων στροφορμών

Άρα υπάρχουν δυο σετ μετατιθέμενων μεγεθών

$L^2,\ S^2,\ L_z,\ S_z,$

Σετ (1): Κοινές ιδιοκαταστάσεις, ταυτόχρονη μέτρηση χωρίς αβεβαιότητα

$L^2,\ S^2,\ J^2,\ J_z$

Σετ (2): Κοινές ιδιοκαταστάσεις, ταυτόχρονη μέτρηση χωρίς αβεβαιότητα

Βάση (1):

$$\begin{aligned}
L^2\,\psi^{(1)}_{l,s;m,m_s} &= l\,(l+1)\,\hbar^2\,\psi^{(1)}_{l,s;m,m_s},\\
S^2\,\psi^{(1)}_{l,s;m,m_s} &= s\,(s+1)\,\hbar^2\,\psi^{(1)}_{l,s;m,m_s},\\
L_z\,\psi^{(1)}_{l,s;m,m_s} &= m\,\hbar\,\psi^{(1)}_{l,s;m,m_s},\\
S_z\,\psi^{(1)}_{l,s;m,m_s} &= m_s\,\hbar\,\psi^{(1)}_{l,s;m,m_s}.
\end{aligned}$$

Δύο σετ μετατιθέμενων στροφορμών

Βάση (1):

$$
\begin{aligned}
L^2\,\psi^{(1)}_{l,s;m,m_s} &= l\,(l+1)\,\hbar^2\,\psi^{(1)}_{l,s;m,m_s}\,,\\
S^2\,\psi^{(1)}_{l,s;m,m_s} &= s\,(s+1)\,\hbar^2\,\psi^{(1)}_{l,s;m,m_s}\,,\\
L_z\,\psi^{(1)}_{l,s;m,m_s} &= m\,\hbar\,\psi^{(1)}_{l,s;m,m_s}\,,\\
S_z\,\psi^{(1)}_{l,s;m,m_s} &= m_s\,\hbar\,\psi^{(1)}_{l,s;m,m_s}\,.
\end{aligned}
$$

Οι ιδιοκαταστάσεις του σετ (1) είναι και ιδιοκαταστασεις του J_z

$$
\begin{aligned}
J_z\,\psi^{(1)}_{l,s;m,m_s} &= (L_z+S_z)\,\psi^{(1)}_{l,s;m,m_s} = (m+m_s)\,\hbar\,\psi^{(1)}_{l,s;m,m_s}\\
&= m_j\,\hbar\,\psi^{(1)}_{l,s;m,m_s}\,.
\end{aligned}
$$

Επομένως για το m_j του σετ (2) ισχύει η σύνδεση με το σετ (1): $m_j = m + m_s.$

Δύο σετ (βάσεις) μετατιθέμενων στροφορμών $|m,m_s>$, $|J,m_j>$

Βάση (1):

$$
\begin{aligned}
L^2\,\psi^{(1)}_{l,s;m,m_s} &= l\,(l+1)\,\hbar^2\,\psi^{(1)}_{l,s;m,m_s}\,,\\
S^2\,\psi^{(1)}_{l,s;m,m_s} &= s\,(s+1)\,\hbar^2\,\psi^{(1)}_{l,s;m,m_s}\,,\\
L_z\,\psi^{(1)}_{l,s;m,m_s} &= m\,\hbar\,\psi^{(1)}_{l,s;m,m_s}\,,\\
S_z\,\psi^{(1)}_{l,s;m,m_s} &= m_s\,\hbar\,\psi^{(1)}_{l,s;m,m_s}\,.
\end{aligned}
$$

Βάση (2):

$$
\begin{aligned}
L^2\,\psi^{(2)}_{l,s;j,m_j} &= l\,(l+1)\,\hbar^2\,\psi^{(2)}_{l,s;j,m_j}\,,\\
S^2\,\psi^{(2)}_{l,s;j,m_j} &= s\,(s+1)\,\hbar^2\,\psi^{(2)}_{l,s;j,m_j}\,,\\
J^2\,\psi^{(2)}_{l,s;j,m_j} &= j\,(j+1)\,\hbar^2\,\psi^{(2)}_{l,s;j,m_j}\,,\\
J_z\,\psi^{(2)}_{l,s;j,m_j} &= m_j\,\hbar\,\psi^{(2)}_{l,s;j,m_j}\,.
\end{aligned}
$$

όπου $m_j = m + m_s.$

Σύνδεση των δύο βάσεων: Άτομο Υδρογόνου

Βάση (1) στο άτομο υδρογόνου: $\psi^{(1)}_{l,1/2;m,\pm 1/2} = Y_{l,m}\,\chi_{\pm}.$

Ιδιοκατάσταση των

$L^2,\ S^2,\ L_z,\ S_z,$

$m_j = m + m_s.$

Μετάβαση σε βάση (2): $\psi^{(2)}_{l,1/2;j,m+1/2} = \alpha\,\psi^{(1)}_{l,1/2;m,1/2} + \beta\,\psi^{(1)}_{l,1/2;m+1,-1/2},$

+6d

όπου α, β σταθερές που θα προσδιοριστούν με χρήση των

$\alpha^2 + \beta^2 = 1.$ και

$$J^2\,\psi^{(2)}_{l,1/2;j,m+1/2} = j\,(j+1)\,\hbar^2\,\psi^{(2)}_{l,1/2;j,m+1/2},$$

$$J^2 = L^2 + S^2 + 2\,L_z\,S_z + L_+\,S_- + L_-\,S_+.$$

$$\psi^{(2)}_{l,1/2;j,m+1/2} = \alpha\,Y_{l,m}\,\chi_+ + \beta\,Y_{l,m+1}\,\chi_-.$$

$$\begin{aligned}
L_+\,Y_{l,m} &= [l\,(l+1) - m\,(m+1)]^{1/2}\,\hbar\,Y_{l,m+1},\\
L_-\,Y_{l,m} &= [l\,(l+1) - m\,(m-1)]^{1/2}\,\hbar\,Y_{l,m-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_+\,\chi_{s,m_s} &= [s\,(s+1) - m_s\,(m_s+1)]^{1/2}\,\hbar\,\chi_{s,m_s+1},\\
S_-\,\chi_{s,m_s} &= [s\,(s+1) - m_s\,(m_s-1)]^{1/2}\,\hbar\,\chi_{s,m_s-1}.
\end{aligned}$$

Εύρεση α και β

$$J^2 \psi^{(2)}_{l,1/2;j,m+1/2} = j(j+1)\hbar^2 \psi^{(2)}_{l,1/2;j,m+1/2},$$

$$J^2 = L^2 + S^2 + 2 L_z S_z + L_+ S_- + L_- S_+.$$

$$\psi^{(2)}_{l,1/2;j,m+1/2} = \alpha Y_{l,m}\chi_+ + \beta Y_{l,m+1}\chi_-.$$

$$L_+ Y_{l,m} = [l(l+1) - m(m+1)]^{1/2}\hbar Y_{l,m+1},$$
$$L_- Y_{l,m} = [l(l+1) - m(m-1)]^{1/2}\hbar Y_{l,m-1}.$$

$$S_+\chi_+ = S_-\chi_- = 0,$$
$$S_\pm\chi_\mp = \hbar\chi_\pm.$$

$$J^2\left(\alpha Y_{lm}\chi_+ + \beta Y_{lm+1}\chi_-\right) = \left(L^2 + S^2 + 2L_zS_z + L_+S_- + L_-S_+\right)\left(\alpha Y_{lm}\chi_+ + \beta Y_{lm+1}\chi_-\right) \Rightarrow$$

$$j(j+1)\hbar^2\left(\alpha Y_{lm}\chi_+ + \beta Y_{lm+1}\chi_-\right) = \alpha\left(l(l+1)\hbar^2 Y_{lm}\chi_+ + \frac{3}{4}\hbar^2 Y_{lm}\chi_+ + mY_{lm}\chi_+ + \left(l(l+1) - m(m+1)\right)^{1/2}\hbar^2 Y_{lm+1}\chi_-\right) +$$

$$\beta\left(l(l+1)\hbar^2 Y_{lm+1}\chi_- + \frac{3}{4}\hbar^2 Y_{lm+1}\chi_- - (m+1)Y_{lm+1}\chi_- + \left(l(l+1) - m(m+1)\right)^{1/2}\hbar^2 Y_{lm}\chi_+\right) \Rightarrow$$

$$\left(j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} - m\right)\alpha - \left(l(l+1) - m(m+1)\right)^{1/2}\beta = 0$$

$$\left(j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} + (m+1)\right)\beta - \left(l(l+1) - m(m+1)\right)^{1/2}\alpha = 0$$

Εύρεση α και β

Άρα έχουμε:

$$\left(j(j+1)-l(l+1)-\frac{3}{4}-m\right)\alpha-\left(l(l+1)-m(m+1)\right)^{1/2}\beta=0$$

$$\left(j(j+1)-l(l+1)-\frac{3}{4}+(m+1)\right)\beta-\left(l(l+1)-m(m+1)\right)^{1/2}\alpha=0$$

+6e

που γράφεται και ως:

$$\begin{aligned}(x-m)\,\alpha-[l\,(l+1)-m\,(m+1)]^{1/2}\,\beta &= 0,\\ -[l\,(l+1)-m\,(m+1)]^{1/2}\,\alpha+(x+m+1)\,\beta &= 0,\end{aligned}$$

όπου

$$x=j\,(j+1)-l\,(l+1)-3/4.$$

με λύση

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\left[(l-m)(l+m+1)\right]^{1/2}}{x-m}=\frac{x+m+1}{\left[(l-m)(l+m+1)\right]^{1/2}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (l-m)(l+m+1)=(x-m)(x+m+1)\Rightarrow$$

$$l^2+lm+l-lm-m^2-m=x^2+xm+x-xm-m^2-m\Rightarrow$$

$$\Rightarrow l(l+1)=x(x+1)$$

Εύρεση α και β

Επομένως έχουμε

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\left[(l-m)(l+m+1)\right]^{1/2}}{x-m}=\frac{x+m+1}{\left[(l-m)(l+m+1)\right]^{1/2}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow l(l+1)=x(x+1)\Rightarrow$$

$$x=l$$

+6f

$$x=-l-1$$

Για την μία λύση:

$$x=l\Rightarrow j^2+j-l^2-l-\frac{3}{4}-l=0\Rightarrow j^2+j-\left(l^2+2l+\frac{3}{4}\right)=0\Rightarrow$$

$$j=\frac{-1\pm\sqrt{1+4l^2+8l+3}}{2}=\frac{-1\pm 2(l+1)}{2}\xrightarrow{j>0} j=l+\frac{1}{2}$$

+6g

Όμοια δείχνουμε:

$$x=-l-1\Rightarrow j=l-\frac{1}{2}$$

+6h

Γενικά ισχύει:

$$j_{\min}=\left|j_1-j_2\right|$$

$$j_{\max}=j_1+j_2$$

+6i (δείτε και Τραχανά Κβαντομηχανική ΙΙ)

Η απόδειξη γίνεται με χρήση της σχέσης $m_j=m_{j1}+m_{j2}$ και εύρεση όλων των δυνατών m_J που αντιστοιχούν σε ζεύγος m_{j1},m_{j2}. Μετά, από τα m_j βρίσουμε και τα αντίστοιχα j.

Σύνδεση βάσεων: Συντελεστές Glebsch-Gordon

$$\psi^{(2)}_{l,1/2;j,m+1/2} = \alpha\, Y_{l,m}\, \chi_+ + \beta\, Y_{l,m+1}\, \chi_- .$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\left[(l-m)(l+m+1)\right]^{1/2}}{x-m}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1.$$

$$\xrightarrow[j = l + \frac{1}{2}]{x = l}$$

$$\psi^{(2)}_{l+1/2,m+1/2} = \left(\frac{l+m+1}{2l+1}\right)^{1/2} \psi^{(1)}_{m,1/2} + \left(\frac{l-m}{2l+1}\right)^{1/2} \psi^{(1)}_{m+1,-1/2},$$

+6j

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\left[(l-m)(l+m+1)\right]^{1/2}}{x-m}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1.$$

$$\xrightarrow[j = l - \frac{1}{2}]{x = -l-1}$$

$$\psi^{(2)}_{l-1/2,m+1/2} = \left(\frac{l-m}{2l+1}\right)^{1/2} \psi^{(1)}_{m,1/2} - \left(\frac{l+m+1}{2l+1}\right)^{1/2} \psi^{(1)}_{m+1,-1/2}.$$

+6k

αγνοούμε τους κοινούς δείκτες l, 1/2

	$m, 1/2$	$m+1, -1/2$	m, m_s
$l+1/2, m+1/2$	$\sqrt{(l+m+1)/(2l+1)}$	$\sqrt{(l-m)/(2l+1)}$	
$l-1/2, m+1/2$	$\sqrt{(l-m)/(2l+1)}$	$-\sqrt{(l+m+1)/(2l+1)}$	
j, m_j			

Συντελεστές Glebsch-Gordon

Σύνδεση βάσεων: Συντελεστές Glebsch-Gordon

$$\psi^{(2)}_{l+1/2,m+1/2} = \left(\frac{l+m+1}{2l+1}\right)^{1/2} \psi^{(1)}_{m,1/2} + \left(\frac{l-m}{2l+1}\right)^{1/2} \psi^{(1)}_{m+1,-1/2},$$

$$\psi^{(2)}_{l-1/2,m+1/2} = \left(\frac{l-m}{2l+1}\right)^{1/2} \psi^{(1)}_{m,1/2} - \left(\frac{l+m+1}{2l+1}\right)^{1/2} \psi^{(1)}_{m+1,-1/2}.$$

$$\Rightarrow$$

$$\psi^{(1)}_{m,1/2} = \left(\frac{l+m+1}{2l+1}\right)^{1/2} \psi^{(2)}_{l+1/2,m+1/2} + \left(\frac{l-m}{2l+1}\right)^{1/2} \psi^{(2)}_{l-1/2,m+1/2},$$

$$\psi^{(1)}_{m+1,-1/2} = \left(\frac{l-m}{2l+1}\right)^{1/2} \psi^{(2)}_{l+1/2,m+1/2} - \left(\frac{l+m+1}{2l+1}\right)^{1/2} \psi^{(2)}_{l-1/2,m+1/2}.$$

+6l

	$m, 1/2$	$m+1, -1/2$	m, m_s
$l+1/2, m+1/2$	$\sqrt{(l+m+1)/(2l+1)}$	$\sqrt{(l-m)/(2l+1)}$	
$l-1/2, m+1/2$	$\sqrt{(l-m)/(2l+1)}$	$-\sqrt{(l+m+1)/(2l+1)}$	
j, m_j			

Συντελεστές Glebsch-Gordon

Ειδική Περίπτωση l=1

Συντελεστές Glebsch-Gordon	$m, 1/2$	$m+1, -1/2$	m, m_s
$l+1/2, m+1/2$	$\sqrt{(l+m+1)/(2l+1)}$	$\sqrt{(l-m)/(2l+1)}$	
$l-1/2, m+1/2$	$\sqrt{(l-m)/(2l+1)}$	$-\sqrt{(l+m+1)/(2l+1)}$	
j, m_j			

+6m

$$\psi^{(2)}_{3/2,\pm3/2} = \psi^{(1)}_{\pm1,\pm1/2},$$

$$\psi^{(2)}_{3/2,1/2} = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\psi^{(1)}_{0,1/2} + \sqrt{\frac{1}{3}}\,\psi^{(1)}_{1,-1/2},$$

$$\psi^{(2)}_{1/2,1/2} = \sqrt{\frac{1}{3}}\,\psi^{(1)}_{0,1/2} - \sqrt{\frac{2}{3}}\,\psi^{(1)}_{1,-1/2},$$

$$\psi^{(2)}_{1/2,-1/2} = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\psi^{(1)}_{-1,1/2} - \sqrt{\frac{1}{3}}\,\psi^{(1)}_{0,-1/2},$$

$$\psi^{(2)}_{3/2,-1/2} = \sqrt{\frac{1}{3}}\,\psi^{(1)}_{-1,1/2} + \sqrt{\frac{2}{3}}\,\psi^{(1)}_{0,-1/2},$$

+6n

$$\psi^{(1)}_{\pm1,\pm1/2} = \psi^{(2)}_{3/2,\pm3/2},$$

$$\psi^{(1)}_{1,-1/2} = \sqrt{\frac{1}{3}}\,\psi^{(2)}_{3/2,1/2} - \sqrt{\frac{2}{3}}\,\psi^{(2)}_{1/2,1/2},$$

$$\psi^{(1)}_{0,1/2} = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\psi^{(2)}_{3/2,1/2} + \sqrt{\frac{1}{3}}\,\psi^{(2)}_{1/2,1/2},$$

$$\psi^{(1)}_{0,-1/2} = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\psi^{(2)}_{3/2,-1/2} - \sqrt{\frac{1}{3}}\,\psi^{(2)}_{1/2,-1/2},$$

$$\psi^{(1)}_{-1,1/2} = \sqrt{\frac{1}{3}}\,\psi^{(2)}_{3/2,-1/2} + \sqrt{\frac{2}{3}}\,\psi^{(2)}_{1/2,-1/2},$$

Ειδική Περίπτωση l=1

Συντελεστές Glebsch-Gordon

	$m, 1/2$	$m+1, -1/2$	m, m_s
$l+1/2, m+1/2$	$\sqrt{(l+m+1)/(2l+1)}$	$\sqrt{(l-m)/(2l+1)}$	
$l-1/2, m+1/2$	$\sqrt{(l-m)/(2l+1)}$	$-\sqrt{(l+m+1)/(2l+1)}$	
j, m_j			

	$-1, -1/2$	$-1, 1/2$	$0, -1/2$	$0, 1/2$	$1, -1/2$	$1, 1/2$	m, m_s
$3/2, -3/2$	1						
$3/2, -1/2$		$\sqrt{1/3}$	$\sqrt{2/3}$				
$1/2, -1/2$		$\sqrt{2/3}$	$-\sqrt{1/3}$				
$3/2, 1/2$				$\sqrt{2/3}$	$\sqrt{1/3}$		
$1/2, 1/2$				$\sqrt{1/3}$	$-\sqrt{2/3}$		
$3/2, 3/2$						1	
j, m_j							

Ειδική Περίπτωση s$_1$=s$_2$=1/2

Αντί για $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}.$ θεωρούμε $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$

Βάση (1): $S_1^2,\ S_2^2,\ S_{1z},\ S_{2z},\ S_z.$

$$
\begin{aligned}
S_1^2\,\chi^{(1)}_{s_1,s_2;m_{s_1},m_{s_2}} &= s_1\,(s_1+1)\,\hbar^2\,\chi^{(1)}_{s_1,s_2;m_{s_1},m_{s_2}},\\
S_2^2\,\chi^{(1)}_{s_1,s_2;m_{s_1},m_{s_2}} &= s_2\,(s_2+1)\,\hbar^2\,\chi^{(1)}_{s_1,s_2;m_{s_1},m_{s_2}},\\
S_{1z}\,\chi^{(1)}_{s_1,s_2;m_{s_1},m_{s_2}} &= m_{s_1}\,\hbar\,\chi^{(1)}_{s_1,s_2;m_{s_1},m_{s_2}},\\
S_{2z}\,\chi^{(1)}_{s_1,s_2;m_{s_1},m_{s_2}} &= m_{s_2}\,\hbar\,\chi^{(1)}_{s_1,s_2;m_{s_1},m_{s_2}},\\
S_z\,\chi^{(1)}_{s_1,s_2;m_{s_1},m_{s_2}} &= m_s\,\hbar\,\chi^{(1)}_{s_1,s_2;m_{s_1},m_{s_2}}.
\end{aligned}
$$

Βάση (2): $S_1^2,\ S_2^2,\ S^2,\ S_z,$

$$
\begin{aligned}
S_1^2\,\chi^{(2)}_{s_1,s_2;s,m_s} &= s_1\,(s_1+1)\,\hbar^2\,\chi^{(2)}_{s_1,s_2;s,m_s},\\
S_2^2\,\chi^{(2)}_{s_1,s_2;s,m_s} &= s_2\,(s_2+1)\,\hbar^2\,\chi^{(2)}_{s_1,s_2;s,m_s},\\
S^2\,\chi^{(2)}_{s_1,s_2;s,m_s} &= s\,(s+1)\,\hbar^2\,\chi^{(2)}_{s_1,s_2;s,m_s},\\
S_z\,\chi^{(2)}_{s_1,s_2;s,m_s} &= m_s\,\hbar\,\chi^{(2)}_{s_1,s_2;s,m_s}.
\end{aligned}
$$

$$s_1 = s_2 = 1/2, \Longrightarrow s_{1z},\ s_{2z} = \pm 1/2.$$

$$m_s = m_{s_1} + m_{s_2}.$$

Ειδική Περίπτωση $s_1=s_2=1/2$

Συντελεστές Glebsch-Gordon

j, m_j \ m, m_s	$m, 1/2$	$m+1, -1/2$
$l+1/2, m+1/2$	$\sqrt{(l+m+1)/(2l+1)}$	$\sqrt{(l-m)/(2l+1)}$
$l-1/2, m+1/2$	$\sqrt{(l-m)/(2l+1)}$	$-\sqrt{(l+m+1)/(2l+1)}$

s, m_s \ m_{s_1}, m_{s_2}	$-1/2, -1/2$	$-1/2, 1/2$	$1/2, -1/2$	$1/2, 1/2$
$1, -1$	1			
$1, 0$		$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	
$0, 0$		$1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	
$1, 1$				1

$$\chi^{(2)}_{1,-1} = \chi^{(1)}_{-1/2,-1.2},$$

$$\chi^{(2)}_{1,0} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\chi^{(1)}_{-1/2,1/2} + \chi^{(1)}_{1/2,-1/2}\right),$$

$$\chi^{(2)}_{1,1} = \chi^{(1)}_{1/2,1/2},$$

Κατάσταση Triplet

$$\chi^{(2)}_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\chi^{(1)}_{-1/2,1/2} - \chi^{(1)}_{1/2,-1/2}\right).$$

Κατάσταση Singlet

Σύνοψη

Για την περιγραφή συστημάτων που συνθέτονται από υποσυστήματα με στροφορμή μπορούν να χρησιμοποιηθούν δύο βάσεις καταστάσεων: η βάση των επιμέρους στροφορμών και η βάση της ολικής στροφορμής

Οι δύο βάσεις συνδέονται με χρήση των συντελεστών Glebsch-Gordon.

Οι συντελεστές Glebsch-Gordon δίνουν την πιθανότητα μέτρησης τιμών για τις επιμέρους στροφορμές όταν έχει μετρηθεί αρχικά η ολική στροφορμή (οπότε αρχικά το σύστημα περιγράφεται από ιδιοκατάσταση της ολικής στροφορμής).

Οι συντελεστές Glebsch-Gordon υπολογίστηκαν σε απλές περιπτώσεις συστημάτων όπου η μία από τις δύο επιμέρους στροφορμές αντιστοιχεί σε spin $\frac{1}{2}$.

Άσκηση 1

Ηλεκτρόνιο σε άτομο υδρογόνου βρίσκεται στην κατάσταση $R_{2,1}\left(\sqrt{1/3}\,Y_{1,0}\,\chi_+ + \sqrt{2/3}\,Y_{1,1}\,\chi_-\right)$

Βρείτε τις πιθανές τιμές και τις αντίστοιχες πιθανότητες που αντιστοιχούν σε μέτρηση των μεγεθών L^2, L_z, S^2, S_z, J^2, J_z. Ποια είναι η πυκνότητα πιθανότητας να βρεθεί το σωμάτιο στην θέση r, θ, φ; Ποια είναι η αντίστοιχη πυκνότητα πιθανότητας να βρεθεί το σωμάτιο σε θέση r με spin πάνω;

Έχουμε και για τις δύο καταστάσεις που υπερτίθενται l=1. Επομένως για το L^2 θα μετρηθεί η τιμή $\hbar^2\, 1(1+1)=2\,\hbar^2$ με πιθανότητα 1.

Για το L_z θα μετρήσουμε 0 με πιθανότητα 1/3 και $\hbar$ με πιθανότητα 2/3.

Έχουμε και για τις δύο καταστάσεις που υπερτίθενται s=1/2. Επομένως για το S^2 θα μετρηθεί η τιμή $\hbar^2\, 1/2(1/2+1)=3/4\,\hbar^2$ με πιθανότητα 1.

Για το J^2 θα πρέπει να εκφράσουμε την κατάσταση στην βάση (2) $|j,m_j\rangle$. Έχουμε:

$$\psi^{(1)}_{0,1/2} = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\psi^{(2)}_{3/2,1/2} + \sqrt{\frac{1}{3}}\,\psi^{(2)}_{1/2,1/2},$$

$$\psi^{(1)}_{1,-1/2} = \sqrt{\frac{1}{3}}\,\psi^{(2)}_{3/2,1/2} - \sqrt{\frac{2}{3}}\,\psi^{(2)}_{1/2,1/2},$$

$$\psi = R_{21}\left(\sqrt{1/3}Y_{1,0}\chi_+ + \sqrt{2/3}Y_{1,1}\chi_-\right) = R_{21}\left(\sqrt{1/3}\;\psi^{(1)}{}_{0,\frac{1}{2}} + \sqrt{2/3}\;\psi^{(1)}{}_{1,-\frac{1}{2}}\right)$$

$$= R_{21}\left[\sqrt{1/3}\left(\sqrt{2/3}\;\psi^{(2)}{}_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}} + \sqrt{1/3}\;\psi^{(2)}{}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\right) + \sqrt{2/3}\left(\sqrt{1/3}\;\psi^{(2)}{}_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}} - \sqrt{2/3}\;\psi^{(2)}{}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\right)\right]$$

$$= R_{21}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\psi^{(2)}{}_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}\psi^{(2)}{}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\right)$$

Άσκηση 1

Για το J^2 θα πρέπει να εκφράσουμε την κατάσταση στην βάση (2) $|j,m_j\rangle$. Έχουμε:

$$\psi^{(1)}_{0,1/2} = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\psi^{(2)}_{3/2,1/2} + \sqrt{\frac{1}{3}}\,\psi^{(2)}_{1/2,1/2},$$

$$\psi^{(1)}_{1,-1/2} = \sqrt{\frac{1}{3}}\,\psi^{(2)}_{3/2,1/2} - \sqrt{\frac{2}{3}}\,\psi^{(2)}_{1/2,1/2},$$

$$\psi = R_{21}\left(\sqrt{1/3}Y_{1,0}\chi_+ + \sqrt{2/3}Y_{1,1}\chi_-\right) = R_{21}\left(\sqrt{1/3}\;\psi^{(1)}{}_{0,\frac{1}{2}} + \sqrt{2/3}\;\psi^{(1)}{}_{1,-\frac{1}{2}}\right)$$

$$= R_{21}\left[\sqrt{1/3}\left(\sqrt{2/3}\;\psi^{(2)}{}_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}} + \sqrt{1/3}\;\psi^{(2)}{}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\right) + \sqrt{2/3}\left(\sqrt{1/3}\;\psi^{(2)}{}_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}} - \sqrt{2/3}\;\psi^{(2)}{}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\right)\right]$$

$$= R_{21}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\psi^{(2)}{}_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}\psi^{(2)}{}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\right)$$

$$\psi = R_{21}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\psi^{(2)}{}_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}\psi^{(2)}{}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\right) \Rightarrow$$

Για το J^2 θα μετρήσουμε $\hbar^2\, 3/2(3/2+1)=15/4\,\hbar^2$ με πιθανότητα 8/9 και μετρήσουμε $\hbar^2\, 1/2(1/2+1)=3/4\,\hbar^2$ με πιθανότητα 1/9

$$\psi = R_{21}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\psi^{(2)}{}_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}\psi^{(2)}{}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\right) \Rightarrow$$

Για το J_z θα μετρήσουμε ½ ħ με πιθανότητα 1.

Η πυκνότητα πιθανότητας να βρεθεί το σωμάτιο στην θέση r, θ, φ είναι:

$$P(r,\theta,\phi) = R_{21}{}^2\left(1/3\;Y_{1,0}{}^2 + 2/3\;\left|Y_{1,1}\right|^2\right)r^2\sin^2\theta$$

Η πυκνότητα πιθανότητας να βρεθεί το σωμάτιο στην θέση r, θ, φ με spin πάνω είναι:

$$P(r,\theta,\phi) = 1/3\;R_{21}{}^2\;Y_{1,0}{}^2 r^2\sin^2\theta$$

Άσκηση 2

Δυο σωμάτια με spin ½ αλληλεπιδρούν σύμφωνα με την Χαμιλτονιανή: $H = A\,\vec{s}_1 \bullet \vec{s}_2$

όπου A δεδομένη σταθερά. Βρείτε τις ενεργειακές ιδιοτιμές του συστήματος και τον αντίστοιχο εκφυλισμό.

Το ολικό spin του συστήματος είναι της μορφής: $\vec{S}^2 = \left(\vec{s}_1 + \vec{s}_2\right)^2 = s_1{}^2 + s_2{}^2 + 2\,\vec{s}_1 \bullet \vec{s}_2$

Άρα η Χαμιλτονιανή εκφράζεται συναρτήσει του ολικού spin ως: $H = \frac{A}{2}\left(\vec{S}^2 - \vec{s}_1{}^2 - \vec{s}_2{}^2\right)$

και οι ιδιοτιμές δύνονται από την σχέση:

$$E = \frac{A}{2}\hbar^2 \left(S(S+1) - s_1(s_1+1) - s_2(s_2+1)\right) = \frac{A}{2}\hbar^2 \left(S(S+1) - 3/2\right)$$

Οι δυνατές τιμές του S είναι 0 και 1 με εκφυλισμούς (2S+1) (1 και 3 αντίστοιχα).

Άλυτες Ασκήσεις

1. Θεωρήστε δύο ηλεκτρόνια σε κατάσταση s=0 (singlet).
a. Μέτρηση της z συνιστώσας του spin του ενός ηλεκτρονίου δίνει την τιμή $S_z=\hbar/2$. Ποια η πιθανότητα να μετρηθεί η ίδια συνιστώσα του άλλου ηλεκτρονίου στην τιμή $\hbar/2$.
b. Μέτρηση της y συνιστώσας του spin του ενός ηλεκτρονίου δίνει την τιμή $S_y=\hbar/2$. Ποια η πιθανότητα να μετρηθεί η x συνιστώσα του spin του άλλου ηλεκτρονίου στην τιμή $S_x=-\hbar/2$.
c. Αν το ηλεκτρόνιο 1 είναι στην κατάσταση $\cos a_1\, \chi_+ + \sin a_1 e^{i\beta 1}\, \chi_-$ και το ηλεκτρονιο 2 στην κατάσταση $\cos a_2\, \chi_+ + \sin a_2\, e^{i\beta 2}\, \chi_-$ ποια είναι η πιθανότητα να βρεθεί το σύστημα σε κατάσταση ολικού spin s=1 (triplet)?

2. Βρείτε τους συντελεστές Glebsch-Gordon για l,1/2,j,m-1/2.

Άλυτες Ασκήσεις

3. Αποδείξτε τις σχέσεις που δεν αποδείξαμε (ή που σχεδόν αποδείξαμε) στην διάλεξη:

$$S_+\chi_+ = S_-\chi_- = 0,$$

$$S_\pm\chi_\mp = \hbar\chi_\pm.$$

$$\psi^{(2)}_{l+1/2,m+1/2} = \left(\frac{l+m+1}{2l+1}\right)^{1/2}\psi^{(1)}_{m,1/2} + \left(\frac{l-m}{2l+1}\right)^{1/2}\psi^{(1)}_{m+1,-1/2},$$

$$\psi^{(2)}_{l-1/2,m+1/2} = \left(\frac{l-m}{2l+1}\right)^{1/2}\psi^{(1)}_{m,1/2} - \left(\frac{l+m+1}{2l+1}\right)^{1/2}\psi^{(1)}_{m+1,-1/2}.$$

$$\psi^{(1)}_{m,1/2} = \left(\frac{l+m+1}{2l+1}\right)^{1/2}\psi^{(2)}_{l+1/2,m+1/2} + \left(\frac{l-m}{2l+1}\right)^{1/2}\psi^{(2)}_{l-1/2,m+1/2},$$

$$\psi^{(1)}_{m+1,-1/2} = \left(\frac{l-m}{2l+1}\right)^{1/2}\psi^{(2)}_{l+1/2,m+1/2} - \left(\frac{l+m+1}{2l+1}\right)^{1/2}\psi^{(2)}_{l-1/2,m+1/2}.$$

$$\mathbf{S}\times\mathbf{S} = i\,\hbar\,\mathbf{S}.$$

$$x = l$$

$$x = -l-1$$

Άλυτες Ασκήσεις

4. Αποδείξτε τις σχέσεις που δεν αποδείξαμε (ή που σχεδόν αποδείξαμε) στην διάλεξη:

$$
\begin{aligned}
\psi^{(2)}_{3/2,\pm 3/2} &= \psi^{(1)}_{\pm 1,\pm 1/2}, \\
\psi^{(2)}_{3/2,1/2} &= \sqrt{\frac{2}{3}}\,\psi^{(1)}_{0,1/2} + \sqrt{\frac{1}{3}}\,\psi^{(1)}_{1,-1/2}, \\
\psi^{(2)}_{1/2,1/2} &= \sqrt{\frac{1}{3}}\,\psi^{(1)}_{0,1/2} - \sqrt{\frac{2}{3}}\,\psi^{(1)}_{1,-1/2}, \\
\psi^{(2)}_{1/2,-1/2} &= \sqrt{\frac{2}{3}}\,\psi^{(1)}_{-1,1/2} - \sqrt{\frac{1}{3}}\,\psi^{(1)}_{0,-1/2}, \\
\psi^{(2)}_{3/2,-1/2} &= \sqrt{\frac{1}{3}}\,\psi^{(1)}_{-1,1/2} + \sqrt{\frac{2}{3}}\,\psi^{(1)}_{0,-1/2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\psi^{(1)}_{\pm 1,\pm 1/2} &= \psi^{(2)}_{3/2,\pm 3/2}, \\
\psi^{(1)}_{1,-1/2} &= \sqrt{\frac{1}{3}}\,\psi^{(2)}_{3/2,1/2} - \sqrt{\frac{2}{3}}\,\psi^{(2)}_{1/2,1/2}, \\
\psi^{(1)}_{0,1/2} &= \sqrt{\frac{2}{3}}\,\psi^{(2)}_{3/2,1/2} + \sqrt{\frac{1}{3}}\,\psi^{(2)}_{1/2,1/2}, \\
\psi^{(1)}_{0,-1/2} &= \sqrt{\frac{2}{3}}\,\psi^{(2)}_{3/2,-1/2} - \sqrt{\frac{1}{3}}\,\psi^{(2)}_{1/2,-1/2}, \\
\psi^{(1)}_{-1,1/2} &= \sqrt{\frac{1}{3}}\,\psi^{(2)}_{3/2,-1/2} + \sqrt{\frac{2}{3}}\,\psi^{(2)}_{1/2,-1/2},
\end{aligned}
$$

Άλυτες Ασκήσεις

5. Αποδείξτε τις σχέσεις που δεν αποδείξαμε (ή που σχεδόν αποδείξαμε) στην διάλεξη:

$$\chi^{(2)}_{1,-1} = \chi^{(1)}_{-1/2,-1.2},$$

$$\chi^{(2)}_{1,0} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\chi^{(1)}_{-1/2,1/2} + \chi^{(1)}_{1/2,-1/2}\right), \qquad \chi^{(2)}_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\chi^{(1)}_{-1/2,1/2} - \chi^{(1)}_{1/2,-1/2}\right).$$

$$\chi^{(2)}_{1,1} = \chi^{(1)}_{1/2,1/2},$$

6. Σύστημα νετρονίου – πρωτονίου με μηδενική τροχιακή στροφορμή διέπεται από το δυναμικό:

$$V(r) = V_1(r) + V_2(r)\left(3\,\frac{(\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\mathbf{r})\,(\boldsymbol{\sigma}_2\cdot\mathbf{r})}{r^2} - \boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}_2\right) + V_3(r)\,\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}_2,$$

όπου $\boldsymbol{\sigma}_1$ ($\boldsymbol{\sigma}_2$) το διάνυσμα των πινάκων Pauli που αντιστοιχεί στο νετρόνιο (πρωτόνιο).

Α. Δείξτε ότι:

$$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k \qquad [\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k$$

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}. \qquad (\sigma\cdot\mathbf{a})(\sigma\cdot\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + i\sigma\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$$

Άλυτες Ασκήσεις

6. Σύστημα νετρονίου – πρωτονίου με μηδενική τροχιακή στροφορμή διέπεται από το δυναμικό:

$$V(r) = V_1(r) + V_2(r)\left(3\,\frac{(\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\mathbf{r})\,(\boldsymbol{\sigma}_2\cdot\mathbf{r})}{r^2} - \boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}_2\right) + V_3(r)\,\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}_2,$$

όπου $\boldsymbol{\sigma}_1$ ($\boldsymbol{\sigma}_2$) το διάνυσμα των πινάκων Pauli που αντιστοιχεί στο νετρόνιο (πρωτόνιο).

Α. Δείξτε ότι:

$$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k \qquad [\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k$$

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}. \qquad (\sigma\cdot\mathbf{a})\,(\sigma\cdot\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + i\sigma\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$$

Β. Βρείτε την μέση τιμή του δυναμικού στην κατάσταση ολικού spin s=1 (triplet) και ολικού spin s=0 (singlet).