Κβαντικό Σωμάτιο σε Ηλεκτρομαγνητικό Πεδίο

Δομή Διάλεξης

Χαμιλτονιανή και Ρεύμα Πιθανότητας για Σωμάτιο σε Ηλεκτρομαγνητικό Πεδίο

Μετασχηματισμοί Βαθμίδας

Αρμονικός Ταλαντωτής σε Ηλεκτρικό Πεδίο

Σωμάτιο σε Μαγνητικό Πεδίο

Φαινόμενο Aharonov-Bohm

Ηλεκτροδυναμική

Εξισώσεις Maxwell:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Δύναμη Lorentz:

$$m\mathbf{a} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

Βαθμωτό και διανυσματικό δυναμικό:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \qquad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

+11a

Μετασχηματισμοί βαθμίδας
(αφήνουν αναλλοίωτα τα πεδία **E** και **B**):

$$\phi' = \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \qquad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f(\mathbf{r}, t)$$

+11a

Χαμιλτονιανή

Χαμιλτονιανή σε ηλεκτρομαγνητικό πεδίο:

$$H = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A}\right)\cdot\left(\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A}\right) + q\phi$$

$$H = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A}\right)\cdot\left(\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A}\right) + q\phi \xrightarrow[\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}}]{\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}} m\mathbf{a} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B}$$

+++11b

http://quantummechanics.ucsd.edu/ph130a/130_notes/node302.html

Πυκνότητα πιθανότητας: $\rho(\mathbf{r}_0, t_0) = |\psi(\mathbf{r}_0, t_0)|^2 = \psi^*(\mathbf{r}_0, t_0)\,\psi(\mathbf{r}_0, t_0)$

Ρεύμα πιθανότητας:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\psi^*\psi) = \frac{\partial\psi^*}{\partial t}\psi + \psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} \xrightarrow{-i\hbar\frac{\partial\psi^*}{\partial t} = (H\psi)^*} \frac{\partial\rho}{\partial t} = -\frac{1}{i\hbar}\left[(H\psi^*)\psi - \psi^*(H\psi)\right]$$

$$H = \frac{1}{2m}\left(i\hbar\nabla + \frac{q}{c}\mathbf{A}\right)\cdot\left(i\hbar\nabla + \frac{q}{c}\mathbf{A}\right) + q\phi$$

+11c

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\frac{1}{i\hbar}\left\{\psi\frac{1}{2m}\left[\left(-i\hbar\nabla + \frac{q}{c}\mathbf{A}\right)\cdot\left(-i\hbar\nabla + \frac{q}{c}\mathbf{A}\right)\psi^*\right] - \psi^*\frac{1}{2m}\left[\left(i\hbar\nabla + \frac{q}{c}\mathbf{A}\right)\cdot\left(i\hbar\nabla + \frac{q}{c}\mathbf{A}\right)\psi\right]\right\}$$

+11d

Ρεύμα Πιθανότητας

Ρεύμα πιθανότητας:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\psi^*\psi) = \frac{\partial\psi^*}{\partial t}\psi + \psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} \xrightarrow{-i\hbar\frac{\partial\psi^*}{\partial t} = (H\psi)^*} \frac{\partial\rho}{\partial t} = -\frac{1}{i\hbar}[(H\psi^*)\psi - \psi^*(H\psi)]$$

$$H = \frac{1}{2m}\left(i\hbar\nabla + \frac{q}{c}\mathbf{A}\right)\cdot\left(i\hbar\nabla + \frac{q}{c}\mathbf{A}\right) + q\phi$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\frac{1}{i\hbar}\left\{\psi\frac{1}{2m}\left[\left(-i\hbar\nabla + \frac{q}{c}\mathbf{A}\right)\cdot\left(-i\hbar\nabla + \frac{q}{c}\mathbf{A}\right)\psi^*\right] - \psi^*\frac{1}{2m}\left[\left(i\hbar\nabla + \frac{q}{c}\mathbf{A}\right)\cdot\left(i\hbar\nabla + \frac{q}{c}\mathbf{A}\right)\psi\right]\right\}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\nabla\left\{\frac{1}{2m}\left[\frac{\hbar}{i}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi) - \frac{2q}{c}\mathbf{A}\psi^*\psi\right]\right\}$$

+11e

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{s} = 0$$

Ρεύμα πιθανότητας

$$\mathbf{s} = \frac{1}{2m}\left[\frac{\hbar}{i}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) - \frac{2q}{c}\mathbf{A}\psi^*\psi\right]$$

Μετασχηματισμός Βαθμίδας Κυματοσυνάρτησης

Αρχική Χαμιλτονιανή:

$$H = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A}\right)\cdot\left(\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A}\right) + q\phi$$

Μετασχηματισμένη Χαμιλτονιανή:

$$\tilde{H} = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A}'\right)\cdot\left(\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A}'\right) + q\phi'$$

$$\phi' = \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \qquad \Big\Downarrow \qquad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f(\mathbf{r}, t)$$

$$\tilde{H} = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A} - \frac{q}{c}\nabla f\right)\cdot\left(\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A} - \frac{q}{c}\nabla f\right) + q\phi - \frac{q}{c}\frac{\partial f}{\partial t}$$

Απαιτούμε:

$$H|\psi\rangle = i\hbar\frac{d|\psi\rangle}{dt} \Longrightarrow \tilde{H}|\tilde{\psi}\rangle = i\hbar\frac{d|\tilde{\psi}\rangle}{dt}$$

Ε: Ποια είναι η σχέση μεταξύ αρχικής και μετασχηματισμένης κυματοσυνάρτησης;

Απαιτούμε:

$$\left[\frac{1}{2m}\left(-i\hbar\nabla - \frac{q}{c}\mathbf{A} - \frac{q}{c}\nabla f\right)^2 + q\phi - \frac{q}{c}\frac{\partial f}{\partial t}\right]\tilde{\psi}(\mathbf{r}, t) = i\hbar\frac{\partial\tilde{\psi}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

Θα δείξουμε ότι για να ισχύει αυτό θα πρέπει:

$$\tilde{\psi}(\mathbf{r}, t) = e^{iqf(\mathbf{r}, t)/c\hbar}\psi(\mathbf{r}, t)$$

Μετασχηματισμός Βαθμίδας Κυματοσυνάρτησης

Ε: Ποια είναι η σχέση μεταξύ αρχικής και μετασχηματισμένης κυματοσυνάρτησης;

Απαιτούμε:
$$\left[\frac{1}{2m}\left(-i\hbar\nabla - \frac{q}{c}\mathbf{A} - \frac{q}{c}\nabla f\right)^2 + q\phi - \frac{q}{c}\frac{\partial f}{\partial t}\right]\tilde{\psi}(\mathbf{r}, t) = i\hbar\frac{\partial\tilde{\psi}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

Θα δείξουμε ότι για να ισχύει αυτό θα πρέπει:
$$\tilde{\psi}(\mathbf{r}, t) = e^{iqf(\mathbf{r}, t)/c\hbar}\psi(\mathbf{r}, t)$$

Έχουμε:
$$i\hbar\frac{\partial\tilde{\psi}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\frac{q}{c}\frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial t}e^{iqf(\mathbf{r}, t)/c\hbar}\psi(\mathbf{r}, t) + e^{iqf(\mathbf{r}, t)/c\hbar}\left(i\hbar\frac{\partial\psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t}\right)$$

$$H|\psi\rangle = i\hbar\frac{d|\psi\rangle}{dt}$$

$$= -\frac{q}{c}\frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial t}\tilde{\psi}(\mathbf{r}, t) + e^{iqf(\mathbf{r}, t)/c\hbar}\left[\frac{1}{2m}\left(-i\hbar\nabla - \frac{q}{c}\mathbf{A}\right)^2 + q\phi\right]e^{-iqf(\mathbf{r}, t)/c\hbar}\tilde{\psi}(\mathbf{r}, t)$$

Ο τελευταίος όρος γράφεται:
$$\left[\left(-i\hbar\nabla - \frac{q}{c}\mathbf{A}\right)\cdot\left(-i\hbar\nabla - \frac{q}{c}\mathbf{A}\right)\right]e^{-iqf(\mathbf{r}, t)/c\hbar}\tilde{\psi}(\mathbf{r}, t)$$

$$= \left(-i\hbar\nabla - \frac{q}{c}\mathbf{A}\right)\cdot\left[e^{-iqf(\mathbf{r}, t)/c\hbar}\left(-\frac{q}{c}\nabla f(\mathbf{r}, t) - i\hbar\nabla - \frac{q}{c}\mathbf{A}\right)\right]\tilde{\psi}(\mathbf{r}, t)$$

$$= e^{-iqf(\mathbf{r}, t)/c\hbar}\left(-\frac{q}{c}\nabla f - i\hbar\nabla - \frac{q}{c}\mathbf{A}\right)\cdot\left(-\frac{q}{c}\nabla f - i\hbar\nabla - \frac{q}{c}\mathbf{A}\right)\tilde{\psi}(\mathbf{r}, t)$$

+11f

Μετασχηματισμός Βαθμίδας Κυματοσυνάρτησης

Ε: Ποια είναι η σχέση μεταξύ αρχικής και μετασχηματισμένης κυματοσυνάρτησης;

Απαιτούμε:

$$\left[\frac{1}{2m}\left(-i\hbar\nabla - \frac{q}{c}\mathbf{A} - \frac{q}{c}\nabla f\right)^2 + q\phi - \frac{q}{c}\frac{\partial f}{\partial t}\right]\tilde{\psi}(\mathbf{r}, t) = i\hbar\frac{\partial\tilde{\psi}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

Δείξαμε ότι :

$$i\hbar\frac{\partial\tilde{\psi}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left[-\frac{q}{c}\frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + q\phi\right]\tilde{\psi}(\mathbf{r}, t) + e^{iqf(\mathbf{r}, t)/c\hbar}\left[\frac{1}{2m}\left(-i\hbar\nabla - \frac{q}{c}\mathbf{A}\right)^2\right]e^{-iqf(\mathbf{r}, t)/c\hbar}\tilde{\psi}(\mathbf{r}, t)$$

Ο τελευταίος όρος γράφεται:

$$\left[\left(-i\hbar\nabla - \frac{q}{c}\mathbf{A}\right)\cdot\left(-i\hbar\nabla - \frac{q}{c}\mathbf{A}\right)\right]e^{-iqf(\mathbf{r}, t)/c\hbar}\tilde{\psi}(\mathbf{r}, t)$$

$$= \left(-i\hbar\nabla - \frac{q}{c}\mathbf{A}\right)\cdot\left[e^{-iqf(\mathbf{r}, t)/c\hbar}\left(-\frac{q}{c}\nabla f(\mathbf{r}, t) - i\hbar\nabla - \frac{q}{c}\mathbf{A}\right)\right]\tilde{\psi}(\mathbf{r}, t)$$

$$= e^{-iqf(\mathbf{r}, t)/c\hbar}\left(-\frac{q}{c}\nabla f - i\hbar\nabla - \frac{q}{c}\mathbf{A}\right)\cdot\left(-\frac{q}{c}\nabla f - i\hbar\nabla - \frac{q}{c}\mathbf{A}\right)\tilde{\psi}(\mathbf{r}, t)$$

Άρα η εξίσωση Schrodinger μένει αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας:

$$i\hbar\frac{\partial\tilde{\psi}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left[-\frac{q}{c}\frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + q\phi + \frac{1}{2m}\left(-\frac{q}{c}\nabla f - i\hbar\nabla - \frac{q}{c}\mathbf{A}\right)^2\right]\tilde{\psi}(\mathbf{r}, t)$$

+11g

Με την προϋπόθεση ότι η κυματοσυνάρτηση μετασχηματίζεται ως

$$\tilde{\psi}(\mathbf{r}, t) = e^{iqf(\mathbf{r}, t)/c\hbar}\psi(\mathbf{r}, t)$$

Άσκηση

Δείξτε ότι το ρεύμα πιθανότητας και η πυκνότητα πιθανότητας μένουν αναλλοίωτα κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας. Δείξτε ακόμα ότι η πιθανότητα μέτρησης μιας ιδιοτιμής Q μένει αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας.

+11h

Υπόδειξη:

Η κυματοσυνάρτηση μετασχηματίζεται ως

$$\psi(\mathbf{r}, t) \to \psi'(\mathbf{r}, t) = e^{iqf(\mathbf{r}, t)/c\hbar}\psi(\mathbf{r}, t)$$

$$\rho(\mathbf{r}, t) = |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 = \psi(\mathbf{r}, t)\psi^*(\mathbf{r}, t)$$

$$\mathbf{s} = \frac{1}{2m}\left\{\frac{\hbar}{i}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) - \frac{2q}{c}\mathbf{A}\psi^*\psi\right\}$$

$$\mathbf{s}' = \frac{1}{2m}\left\{\frac{\hbar}{i}\left[e^{-iqf(\mathbf{r}, t)/c\hbar}\psi^*\nabla\left(e^{iqf(\mathbf{r}, t)/c\hbar}\psi\right) - e^{iqf(\mathbf{r}, t)/c\hbar}\psi\nabla\left(e^{-iqf(\mathbf{r}, t)/c\hbar}\psi^*\right)\right]\right.$$
$$\left. - \frac{2q}{c}(\mathbf{A} + \nabla f)\left(e^{-iqf(\mathbf{r}, t)/c\hbar}\psi^*\right)\left(e^{iqf(\mathbf{r}, t)/c\hbar}\psi\right)\right\}$$

$$Q\phi(\mathbf{r}, t) = q\phi(\mathbf{r}, t)$$

$$P_q = \langle\phi|\psi\rangle = \phi^*(\mathbf{r}, t)\psi(\mathbf{r}, t)$$

Αρμονικός Ταλαντωτής σε Ηλεκτρικό Πεδίο

Δυναμικό: $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$

Ηλεκτρικό πεδίο στην διεύθυνση x: $\mathbf{E} = E\hat{x} \Longrightarrow \mathbf{E} = -\nabla\phi \Longrightarrow \phi(x) = -\varepsilon x + c,$

$$c = 0: \quad \phi(x) = -\varepsilon x$$

Ολική Χαμιλτονιανή: $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 - \varepsilon x$

Μετασχηματισμένη Χαμιλτονιανή: $H_y = \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_y^2 y^2 + H_0$

Ε: Ποιος είναι ο απαιτούμενος μετασχηματισμός x->y,

Έστω: $y = x + b$

$$H_y = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 (x+b)^2 + H_0 = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + m\omega^2 bx + \frac{1}{2}m\omega^2 b^2 + H_0$$

Αρμονικός Ταλαντωτής σε Ηλεκτρικό Πεδίο

Μετασχηματισμένη Χαμιλτονιανή: $H_y = \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_y^2 y^2 + H_0$

Ε: Ποιος είναι ο απαιτούμενος μετασχηματισμός x->y,

Έστω: $y = x + b$

$$H_y = \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 (x+b)^2 + H_0 = \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + m\omega^2 bx + \frac{1}{2}m\omega^2 b^2 + H_0$$

$$H_0 = -\varepsilon^2/2m\omega^2 \qquad b = -\varepsilon/m\omega^2$$

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 - \varepsilon x$$

+11i

Ενεργειακό φάσμα μετασχηματισμένης Χαμιλτονιανής: $E_n = \frac{1}{2}\hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2}{m\omega^2}$

Κυματοσυναρτήσεις μετασχηματισμένης Χαμιλτονιανής: $\psi_n(y) = \psi_n\left(x - \frac{\varepsilon}{m\omega^2}\right)$

Διανυσματικό Δυναμικό Ομογενούς Μαγνητικού Πεδίου

Ομογενές μαγνητικό πεδίο: $\mathbf{B} = B_0\hat{z}.$

Συμμετρική βαθμίδα: $\mathbf{A} = -\frac{1}{2}\mathbf{r}\times\mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ x & y & z \\ 0 & 0 & B_0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}yB_0\hat{x} + \frac{1}{2}xB_0\hat{y}$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{A} = \frac{B_0}{2}(-y, x, 0)$$

Εύκολα επαληθεύεται ότι: $\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}$ +11j

Ασύμμετρη βαθμίδα. Έστω: $\mathbf{A} = \tilde{A}_x\hat{x}.$

Τότε: $\nabla\times\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \tilde{A}_x & 0 & 0 \end{pmatrix} = +\left(\frac{\partial\tilde{A}_x}{\partial z}\right)\hat{y} - \left(\frac{\partial\tilde{A}_x}{\partial y}\right)\hat{z} = B_0\hat{z} \longrightarrow \tilde{A}_x = -B_0y + c.$

$$\Downarrow \; c = 0$$

$$\tilde{A}_x = -B_0y \qquad \tilde{A}_y = \tilde{A}_z = 0$$

Εύρεση μετασχηματισμού βαθμίδας

Διανυσματικό πεδίο στις δυο βαθμίδες:

$$\begin{cases} \mathbf{A} = \frac{B_0}{2}(-y, x, 0) \\ \tilde{\mathbf{A}} = B_0(-y, 0, 0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{A} = \frac{B_0}{2}(-y, x, 0) \\ \tilde{\mathbf{A}} = B_0(-y, 0, 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_x = -\frac{B_0}{2}y = \tilde{A}_x + \partial_x f = -B_0 y + \partial_x f \\ A_y = \frac{B_0}{2}x = \tilde{A}y + \partial_y f = \partial_y f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{B_0}{2}y \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{B_0}{2}x \end{cases}$$

+11k

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{B_0}{2}y \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{B_0}{2}x \end{cases} \Rightarrow f(x, y) = \frac{B_0}{2}xy + \sigma\tau\alpha\theta\epsilon\rho\alpha$$

Σωμάτιο σε μαγνητικό πεδίο

Έστω ομογενές μαγνητικό πεδίο: $\mathbf{B} = B_0\hat{z}.$ $\mathbf{A} = (-By, 0, 0)$

Χαμιλτονιανή: $H = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A}\right)\cdot\left(p - \frac{q}{c}\mathbf{A}\right) = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{p} + \frac{q}{c}By\hat{e}_x\right)\cdot\left(\mathbf{p} + \frac{q}{c}By\hat{e}_x\right)$

$$H = \frac{1}{2m}(p_y^2 + p_z^2) + \frac{1}{2m}\left(p_x + \frac{q}{c}By\right)^2 = \frac{1}{2m}\left[p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + \frac{2q}{c}Byp_x + \left(\frac{q}{c}B\right)^2 y^2\right]$$

Η Χαμιλτονιανή μετατίθεται με p_x, p_z. Άρα έχει κοινό σύστημα ιδιοκαταστάσεων με p_x, p_z. :

$$\psi(x, y, z) = \psi_x(x)\,\psi_y(y)\,\psi_z(z).$$

$$\begin{cases} \psi_x(x) \equiv \psi_{p_x}(x) = e^{ip_x x/\hbar} \\ \psi_z(z) \equiv \psi_{p_z}(z) = e^{ip_z z/\hbar} \end{cases}$$

+11l

Εξίσωση ιδιοτιμών: $H\psi = \frac{1}{2m}\left[p_x^2 + p_z^2 + p_y^2 + \frac{2qBp_x}{c}y + \left(\frac{q}{c}B\right)^2 y^2\right]\psi(x, y, z) = E\psi(x, y, z)$

Σωμάτιο σε μαγνητικό πεδίο

Η Χαμιλτονιανή μετατίθεται με p_x, p_y. Άρα έχει κοινό σύστημα ιδιοκαταστάσεων με p_x, p_y. :

$$\psi(x,y,z) = \psi_x(x)\,\psi_y(y)\,\psi_z(z). \qquad \begin{cases} \psi_x(x) \equiv \psi_{p_x}(x) = e^{ip_x x/\hbar} \\ \psi_z(z) \equiv \psi_{p_z}(z) = e^{ip_z z/\hbar} \end{cases}$$

$$H = \frac{1}{2m}(p_y^2 + p_z^2) + \frac{1}{2m}\left(p_x + \frac{q}{c}By\right)^2 = \frac{1}{2m}\left[p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + \frac{2q}{c}Byp_x + \left(\frac{q}{c}B\right)^2 y^2\right]$$

Εξίσωση ιδιοτιμών:

$$H\psi = \frac{1}{2m}\left[\underset{\text{ιδιοτιμές}}{p_x^2 + p_z^2} + \underset{\text{τελεστής}}{p_y^2} + \frac{2qBp_x}{c}y + \left(\frac{q}{c}B\right)^2 y^2\right]\psi(x,y,z) = E\psi(x,y,z)$$

$$\frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) = a$$

$$\left[\frac{1}{2m}p_y^2 + \left(\frac{qBp_x}{mc}\right)y + \frac{1}{2m}\left(\frac{qB}{c}\right)^2 y^2\right]\psi(x,y,z) = (E-a)\,\psi(x,y,z)$$

+11m

$$p_y \rightarrow p_{\bar{y}} = p_y \qquad y \rightarrow \bar{y} = y + \frac{cp_x}{qB}$$

$$\left[\frac{1}{2m}p_{\bar{y}}^2 + \frac{1}{2m}\left(\frac{qB}{c}\right)^2 \bar{y}^2 - \frac{p_x^2}{2m}\right]\psi = (E-a)\,\psi$$

+11n

Σωμάτιο σε μαγνητικό πεδίο

Η Χαμιλτονιανή μετατίθεται με p_x, p_y. Άρα έχει κοινό σύστημα ιδιοκαταστάσεων με p_x, p_y. :

+11ο

$$\left[\frac{1}{2m}p_{\tilde{y}}^2 + \frac{1}{2m}\left(\frac{qB}{c}\right)^2\tilde{y}^2 - \frac{p_x^2}{2m}\right]\psi = (E - a)\psi \xrightarrow{\frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) = a} \left[\frac{1}{2m}p_{\tilde{y}}^2 + \frac{1}{2m}\left(\frac{qB}{c}\right)^2\tilde{y}^2\right]\psi = \left(E - \frac{p_z^2}{2m}\right)\psi$$

$$\omega_B^2 = \left(\frac{qB}{cm}\right)^2 \qquad \tilde{E} = E - p_z^2/2m,$$

$$\left[\frac{1}{2m}p_{\tilde{y}}^2 + \frac{1}{2}m\omega_B^2\,\tilde{y}^2\right]\psi(x, \tilde{y}, z) = \tilde{E}\psi(x, \tilde{y}, z)$$

$$\left[\frac{1}{2m}p_{\tilde{y}}^2 + \frac{1}{2}m\omega_B^2\,\tilde{y}^2\right]\psi(x, \tilde{y}, z) = \tilde{E}\psi(x, \tilde{y}, z) \Rightarrow \begin{cases} \tilde{E}_n = \hbar\omega_B\left(n + \frac{1}{2}\right) = \hbar\frac{qB}{mc}\left(n + \frac{1}{2}\right) \\ \psi_{\tilde{y}}(\tilde{y}) = \left(\frac{m\omega_B}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-m\omega_B\,\tilde{y}^2/2\hbar} H_n(\tilde{y}) \end{cases}$$

+11p

Σωμάτιο σε μαγνητικό πεδίο

Οι ενεργειακές ιδιοτιμές και οι αντίστοιχες ιδιοκαταστάσεις είναι:

$$\left[\frac{1}{2m}p_{\tilde{y}}^2 + \frac{1}{2}m\omega_B^2\,\tilde{y}^2\right]\psi(x,\tilde{y},z) = \tilde{E}\psi(x,\tilde{y},z) \Rightarrow \begin{cases} \tilde{E}_n = \hbar\omega_B\left(n+\frac{1}{2}\right) = \hbar\frac{qB}{mc}\left(n+\frac{1}{2}\right) \\ \psi_{\tilde{y}}(\tilde{y}) = \left(\frac{m\omega_B}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-m\omega_B\,\tilde{y}^2/2\hbar} H_n(\tilde{y}) \end{cases}$$

Επιστρέφοντας στο αρχικό σύστημα ιδιοτιμών – συντεταγμένων έχουμε:

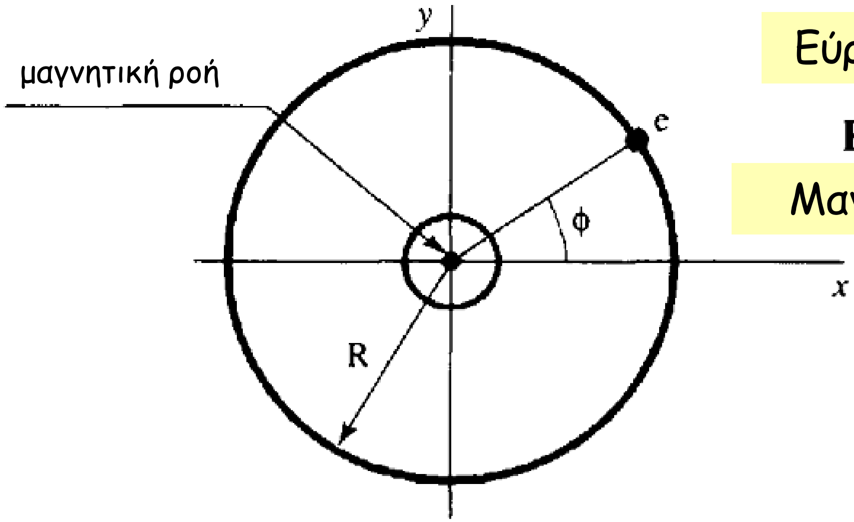
$$\tilde{E}_n = \hbar\omega_B\left(n+\frac{1}{2}\right) = \hbar\frac{qB}{mc}\left(n+\frac{1}{2}\right) \xrightarrow{\tilde{E} = E - p_z^2/2m,} E_n = \tilde{E}_n + \frac{p_z^2}{2m} = \hbar\frac{qB}{mc}\left(n+\frac{1}{2}\right) + \frac{p_z^2}{2m}$$

Ενεργειακά επίπεδα Landau

$$\psi_{\tilde{y}}(\tilde{y}) = \left(\frac{m\omega_B}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-m\omega_B\,\tilde{y}^2/2\hbar} H_n(\tilde{y}) \xrightarrow[y \to \tilde{y} = y + \frac{cp_x}{qB}]{} \psi_n(x,y,z) = \left(\frac{m\omega_B}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{ip_x x/\hbar} e^{ip_z z/\hbar} \exp\left[-\frac{m\omega_B}{2\hbar}\left(y + \frac{cp_x}{qB}\right)^2\right] H_n\left(y + \frac{cp_x}{qB}\right)$$

Σωμάτιο γύρω από μαγνητική ροή

Έστω σωμάτιο σε δακτύλιο γύρω από μαγνητική ροή:



Εύρεση διανυσματικού δυναμικού:

$$\mathbf{B} = B\hat{z}$$

Μαγνητική ροή:

$$\Phi = \int dx \int \mathbf{B} \cdot \hat{n}\, dy = \int dx \int \mathbf{B} \cdot \hat{z}\, dy$$

εσωτερικό δακτυλίου — εσωτερικό δακτυλίου

$$\Phi = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{z}\, dS$$

Θ. Stokes

$$\Phi = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

$d\mathbf{l} = (R\,d\phi)\,\hat{\phi}$ $\quad \rho = R$

$$\Phi = \int_0^{2\pi} A_\phi R\, d\phi$$

$$\Phi = \int_0^{2\pi} A_\phi R\, d\phi \xrightarrow{\text{Βαθμίδα ανεξ. του φ}} \begin{cases} A_r = A_z = 0 \\ A_\phi = \dfrac{\Phi}{2\pi R} \end{cases}$$

+11q

Σωμάτιο γύρω από μαγνητική ροή

Ιδιοκαταστάσεις - Ιδιοτιμές:

$$\nabla = \hat{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \hat{\phi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z} \xrightarrow[z=\text{σταθερό}]{\rho=R} \hat{\phi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}$$

Χαμιλτονιανή:

$$\begin{cases} A_r = A_z = 0 \\ A_\phi = \dfrac{\Phi}{2\pi R} \end{cases}$$

$$\nabla = \hat{\phi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}$$

$$\Rightarrow \quad H = \frac{1}{2m}\left(-i\hbar\nabla - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 = \frac{1}{2m}\left(-i\hbar\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\phi} - \frac{e}{c}\frac{\Phi}{2\pi R}\right)^2 = \frac{1}{2mR^2}\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi} - \frac{e}{c}\frac{\Phi}{2\pi}\right)^2$$

Εξίσωση Schrodinger:

$$\frac{1}{2mR^2}\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi} - \frac{e}{c}\frac{\Phi}{2\pi}\right)^2\psi(\phi) = E\psi(\phi)$$

Δοκιμαστική λύση:

$$\psi(\phi) = \frac{1}{N}e^{ik\phi}$$

Κανονικοποίηση:

$$R\int_0^{2\pi}|\psi(\phi)|^2 d\phi = 2\pi R\frac{1}{N^2} = 1 \longrightarrow N = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}}.$$

+11r

Σωμάτιο γύρω από μαγνητική ροή

Εξίσωση Schrodinger: $$\frac{1}{2mR^2}\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}-\frac{e}{c}\frac{\Phi}{2\pi}\right)^2\psi(\phi) = E\psi(\phi)$$

Δοκιμαστική λύση: $$\psi(\phi) = \frac{1}{N}e^{ik\phi}$$

Κανονικοποίηση: $$R\int_0^{2\pi}|\psi(\phi)|^2 d\phi = 2\pi R\frac{1}{N^2} = 1 \Longrightarrow N = \sqrt{2\pi R}$$

$$\frac{1}{2mR^2}\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}-\frac{e}{c}\frac{\Phi}{2\pi}\right)^2\psi(\phi) = E\psi(\phi) \xrightarrow{\psi(\phi) = \frac{1}{N}e^{ik\phi}} \frac{1}{2mR^2}\left[\hbar^2k^2-\hbar k\left(\frac{e\Phi}{c\pi}\right)+\left(\frac{e\Phi}{2\pi c}\right)^2\right] = E$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\hbar k-\frac{e\Phi}{2\pi c}\right)^2 = 2mR^2E$$

$$\Downarrow \quad \Phi_0 = \frac{c}{e\hbar}$$

$$\left(k-\frac{\Phi}{\Phi_0}\right)^2 = \frac{2mR^2}{\hbar^2}E$$

Ιδιοτιμές ενέργειας:

$$\left(k-\frac{\Phi}{\Phi_0}\right)^2 = \frac{2mR^2}{\hbar^2}E \xrightarrow[2\pi k = 2\pi n]{} E_n = \frac{\hbar^2}{2mR^2}\left(n-\Phi/\Phi_0\right)^2$$

+11s

Μονοτιμία κυματοσυνάρτησης

$$|\psi(\phi+2\pi)| = |\psi(\phi)|$$

Φαινόμενο Aharonov-Bohm

Ιδιοτιμές ενέργειας:

$$\left(k - \frac{\Phi}{\Phi_0}\right)^2 = \frac{2mR^2}{\hbar^2}E \xrightarrow[2\pi k = 2\pi n]{} E_n = \frac{\hbar^2}{2mR^2}\left(n - \Phi/\Phi_0\right)^2$$

$$\Phi_0 \equiv \frac{c}{e\hbar}$$

Μονοτιμία κυματοσυνάρτησης

$$|\psi(\phi + 2\pi)| = |\psi(\phi)|$$

Ιδιοκαταστάσεις:

$$\psi_n(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}}e^{in\phi}$$

$$N = \sqrt{2\pi R}$$

Κλασικά η ενέργεια δεν επηρεάζεται από την ροή αφού το σωμάτιο είναι εκτός του μαγνητικού πεδίου. Κβαντομηχανικά υπάρχει επίδραση της ροής. Αυτή η επίδραση εμφανίζεται και κατά την σκέδαση και λέγεται 'φαινόμενο Aharonov-Bohm'.

Σύνοψη

Η Χαμιλτονιανή σωματίου σε ηλεκτρομαγνητικό πεδίο περιλαμβάνει μετατόπιση της ορμής κατά το διανυσματικό δυναμικό καθώς και το βαθμωτό δυναμκό. Το ρεύμα πιθανότητας συμπεριλαμβάνει επίσης το διανυσματικό δυναμικό.

Κατά τον μετασχηματισμό βαθμίδας το διανυσματικό δυναμικό και το βαθμωτό δυναμικό μεταβάλλονται κατά την παράγωγο μια αυθαίρετης συνάρτησης ενώ η κυματοσυνάρτηση λαμβάνει μια φάση ανάλογη με την αυθαίρετη αυτή συνάρτηση. Το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο καθώς και η εξίσωση Schrodinger μένουν αναλλοίωτα.

Η εξίσωση Schrodinger για σωμάτιο σε ομογενές ηλεκτρικό με αρμονικό ταλαντωτή ή σε ομογενές μαγνητικό πεδίο μετασχηματίζεται σε εξίσωση Schrodinger για απλό αρμονικό ταλαντωτή.

Σε δακτύλιο που περικλείει μαγνητική ροή, η κυματοσυνάρτηση εξαρτάται από την μαγνητική ροή ακόμα και αν το σωμάτιο περιορίζεται σε περιοχή όπου κλασσικά δεν υπάρχουν ηλεκτρομαγνητικά πεδία (φαινόμενο Aharonov-Bohm). Αυτή η συμπεριφορά εκφράζει την μη τοπικότητα της κβαντομηχανικής.