Κβαντική II

Τεστ 11

30/5/12

Όνομα: Πλατής Νίκος

ΑΜ: 6341

1. Βρείτε τον ρυθμό μετάβασης που αντιστοιχεί σε αυθόρμητη εκπομπή και τον αντίστοιχο χρόνο ζωής. Δίνεται ο ρυθμός μετάβασης εξαναγκασμένης εκπομπής: $R_{b\to a} = \frac{\pi}{3\epsilon_0\hbar^2}|\wp|^2\rho(\omega_0)$ και η κατανομή θερμικής ακτινοβολίας μέλανος σώματος $\rho(\omega) = \frac{\hbar}{\pi^2c^3}\frac{\omega^3}{e^{\hbar\omega/k_BT}-1}$ (+++)

2. Από τον μετασχηματισμό βαθμίδας των δυναμικών, βρείτε τον μετασχηματισμό βαθμίδας κυματοσυνάρτησης. (+++)

1) Έστω σύστημα με δύο καταστάσεις β και A, και N_b N_a ο αριθμός των ατόμων σε κάθε κατάσταση. A είναι ο ρυθμός αυθόρμητης εκπομπής, άρα ο ρυθμός μεταβολής των ατόμων στην κατάσταση β είναι

$\frac{dN_b}{dt} = -AN_b - R_{b\to a}N_b + R_{a\to b}N_a$, σε ισορροπία $\frac{dN_b}{dt} = 0$

άρα $-AN_b + R_{ab}N_a = R_{ba}N_b \Rightarrow -AN_b + \frac{\pi}{3\epsilon_0\hbar^2}|P|^2\rho(\omega_0)N_a = \frac{\pi}{3\epsilon_0\hbar^2}|P|^2\rho(\omega_0)N_b$

$$\frac{\pi}{3\epsilon_0\hbar^2}|P|^2\rho(\omega_0)(N_a - N_b) = AN_b$$

$$\rho(\omega_0) = \frac{AN_b 3\epsilon_0\hbar^2}{(N_a-N_b)\pi|P|^2} = \frac{A3\epsilon_0\hbar^2}{\left(\frac{N_a}{N_b}-1\right)\pi|P|^2}$$

Επίσης $\frac{N_a}{N_b} = \frac{e^{-E_a/k_BT}}{e^{-E_b/k_BT}} = \cancel{e^{-E_a+E_b}} = e^{(-E_a+E_b)/k_BT} = e^{(E_b-E_a)/k_BT} = e^{\hbar\omega_0/k_BT}$

$\rho(\omega_0) = \frac{A3\epsilon_0\hbar^2}{\left(e^{\hbar\omega_0/k_BT}-1\right)\pi|P|^2}$ Σύγκριση με $\rho(\omega) = \frac{\hbar}{\pi^2c^3}\frac{\omega^3}{e^{\hbar\omega/k_BT}-1}$

$\Rightarrow \frac{A3\epsilon_0\hbar^2}{\pi|P|^2} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3} \Rightarrow A3\epsilon_0\hbar = \frac{\omega^3|P|^2}{\pi c^3} \Rightarrow A = \frac{\omega^3|P|^2}{3\epsilon_0\hbar\pi c^3}$

~~Όλος~~ ο αριθμός ατόμων που αποδιεγείρονται αυθόρμητα είναι:

$dN_b = -AN_b dt \Rightarrow \frac{dN_b}{N_b} = -A\,dt \Rightarrow \ln N_b = -At$

$\Rightarrow \cancel{N_b = N_b e^{-At}}$ $N_b(t) = N_b(0)e^{-At}$

Ορίζουμε $\frac{1}{A} = \tau$. χρόνος ζωής διεγερμένης κατάστασης $\tau = \frac{3\varepsilon_0 \hbar \pi c^3}{\omega^3 |P|^2}$

2) Έστω ότι κάτω από τους μετασχηματισμούς βαθμίδας η κυματοσυνάρτηση γίνεται $\tilde{\Psi}(\vec{r},t) = \Psi(\vec{r},t)\, e^{iqf(\vec{r},t)/c\hbar}$

για την Ψ ισχύει $H\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$, απαιτούμε να ισχύει το ίδιο για τους μετασχηματισμούς βαθμίδας $\tilde{H}\tilde{\Psi} = i\hbar \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial t}$

$H = (\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A})(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}) - q\phi$ αν $\vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} - \vec{\nabla} f$

$\phi \to \phi' = \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}$

$$\tilde{H} = (\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}')(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}') - q\phi'$$

$$= (\vec{p} - \frac{q}{c}(\vec{A} - \vec{\nabla} f))(\vec{p} - \frac{q}{c}(\vec{A} - \vec{\nabla} f)) - q(\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t})$$

$$= (-i\hbar\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A} + \frac{q}{c}\vec{\nabla} f)(-i\hbar\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A} + \frac{q}{c}\vec{\nabla} f) - q\phi + \frac{q}{c}\frac{\partial f}{\partial t}$$

$$i\hbar\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial t} = i\hbar \frac{\partial(\Psi(\vec{r},t)\, e^{iqf(\vec{r},t)/(c\hbar)})}{\partial t} = i\hbar e^{iqf(\vec{r},t)/c\hbar}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \Psi \frac{iq}{c\hbar}\frac{\partial f}{\partial t}\right)$$

$$\tilde{H}\tilde{\Psi} = \left((-i\hbar\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A} + \frac{q}{c}\vec{\nabla} f)(-i\hbar\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A} + \frac{q}{c}\vec{\nabla} f) - q\phi + \frac{q}{c}\frac{\partial f}{\partial t}\right)\Psi(\vec{r},t)\, e^{iqf(\vec{r},t)/c\hbar}$$

Ειδικότερα όρος $\left((-i\hbar\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A} + \frac{q}{c}\vec{\nabla} f)(-i\hbar\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A} + \frac{q}{c}\vec{\nabla} f)\right)\Psi(\vec{r},t)\, e^{iqf(\vec{r},t)/c\hbar}$

$$= (-i\hbar\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A} + \frac{q}{c}\vec{\nabla} f)\, e^{iqf(\vec{r},t)/c\hbar}\left(-\frac{i\hbar iq\vec{\nabla} f}{c\hbar} - \frac{q}{c}\vec{A} + \frac{q}{c}\vec{\nabla} f - i\hbar\vec{\nabla}\right)\Psi(\vec{r},t)$$

$$= e^{iqf(\vec{r},t)/c\hbar}\left(-\frac{i\hbar iq}{c\hbar}\vec{\nabla} f - \frac{q}{c}\vec{A} + \frac{q}{c}\vec{\nabla} f - i\hbar\vec{\nabla}\right)\left(\frac{2q\vec{\nabla} f}{c} - \frac{q}{c}\vec{A} - i\hbar\vec{\nabla}\right)\Psi(\vec{r},t)$$

$$= e^{iqf(\vec{r},t)/c\hbar}\left(-i\hbar\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A} + \frac{2q\vec{\nabla} f}{c}\right)^2 \Psi(\vec{r},t)$$

Άρα $\tilde{H}\tilde{\Psi} = e^{iqf(\vec{r},t)/c\hbar}\left(-i\hbar\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A} + \frac{2q\vec{\nabla} f}{c}\right)^2 \Psi(\vec{r},t) + \left(-q\phi + \frac{q}{c}\frac{\partial f}{\partial t}\right) e^{\frac{iqf(\vec{r},t)}{c\hbar}}\Psi$

$$\tilde{H}\tilde{\Psi} = i\hbar\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial t} \Rightarrow \left(-i\hbar\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A} + \frac{2q\vec{\nabla} f}{c}\right)^2 \Psi(\vec{r},t) - q\phi\Psi(\vec{r},t) + \frac{q}{c}\frac{\partial f}{\partial t}\Psi(\vec{r},t)$$

$$= \frac{\partial \Psi}{\partial t} i\hbar - \frac{q}{c}\frac{\partial f}{\partial t}$$