Εφαπτομένη καμπύλης

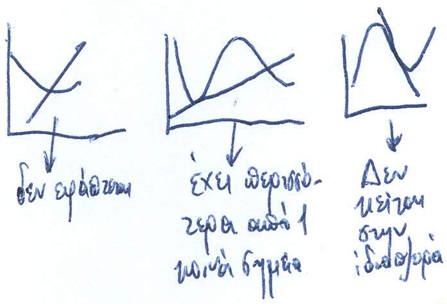
L → εφαπτομένη στο σημείο P

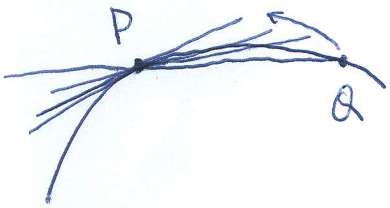
Για κύκλο γνωστά.

Για γενικές καμπύλες: { → η L διέρχεται από το P κάθετα στην ευθεία που ενώνει το P με το κέντρο της.

→ η L διέρχεται από ένα μόνο σημείο της C, το P

→ η L διέρχεται από το P και κείται πάντα από τη μια πλευρά της καμπύλης





→ Έστω ότι θέλω να βρω την εφαπτομένη καμπύλης στο P. Ξεκινώ από σημείο Q. Υπολογίζω την κλίση της τέμνουσας PQ.

→ Εξετάζουμε το όριο της κλίσης της τέμνουσας καθώς το Q προσεγγίζει το P κινούμενο επί της καμπύλης.

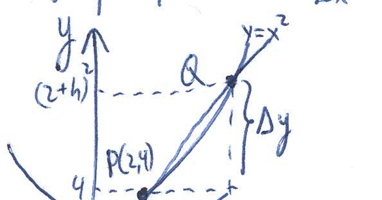
→ Αν το όριο αυτό υπάρχει, το θεωρούμε ως την κλίση της καμπύλης στο P και ορίζω την εφαπτομένη στο P ως την ευθεία που διέρχεται από το P με την κλίση αυτή

Παράδειγμα

Βρείτε την κλίση της παραβολής $y=x^2$ στο σημείο $P(2,4)$. Γράψτε μια εξίσωση για την εφαπτομένη στο σημείο αυτό.

Θεωρώ την τέμνουσα που διέρχεται από το $P(2,4)$ και από γειτονικό $Q(2+h,(2+h)^2)$. Γράφω την κλίση της PQ και την εξετάζω καθώς το Q προσεγγίζει το P κινούμενο επί της καμπύλης:

Κλίση τέμνουσας $= \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{(2+h)^2-2^2}{h} = \dfrac{h^2+4+4h-4}{h} = \dfrac{h^2+4h}{h} = h+4$



Αν $h>0$, το Q κείται άνω δεξιά του P όπως στο σχήμα

" $h<0$, " Q " αριστερά " P

Σε κάθε περίπτωση, καθώς το Q προσεγγίζει το P κινούμενο επί της καμπύλης $\Rightarrow h\to 0$ και η κλίση της τέμνουσας είναι $\lim_{h\to 0}(h+4)=4$

Θεωρούμε ότι η κλίση της παραβολής στο P ισούται με 4

Η εφαπτόμενη στο P είναι η ευθεία που διέρχεται από το $P(2,4)$ με κλίση 4: $y=4+4(x-2)$

$\Rightarrow y=4x-4$

Ορισμός

Η κλίση της καμπύλης $y=f(x)$ στο σημείο $P(x_0, f(x_0))$ ισούται με $m=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ (αν $\exists$ το όριο). Η εφαπτομένη ευθεία της καμπύλης στο P είναι η ευθεία που διέρχεται από το P με κλίση ίση με m