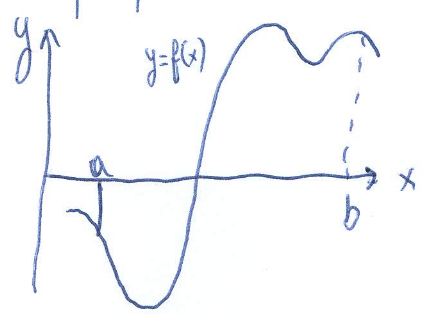
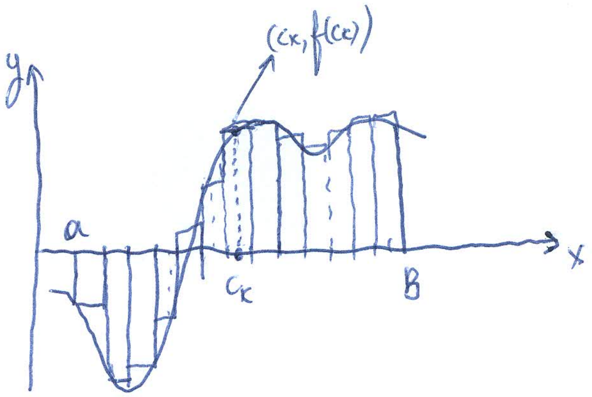
Αθροίσματα Riemann





Έστω $f(x)$ συνεχής συνάρτηση ορισμένη στο $[a, b]$. Διαμερίζω το $[a, b]$ σε υποδιαστήματα επιλέγοντας $n-1$ σημεία, έστω $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ μεταξύ a και b με μοναδικό περιορισμό $a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < b$

Θέτω $a = x_0$ και $b = x_n$. Το σύνολο $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ λέγεται διαμέριση του $[a,b]$

- Η διαμέριση P ορίζει n κλειστά υποδιαστήματα: $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots [x_{n-1}, x_n]$
- Το εύρος τυχόντος k-οστού υποδιαστήματος είναι $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$

- Από κάθε υποδιάστημα επιλέγω έναν αριθμό: έστω ο c_k από το υποδιάστημα k.
- Σε κάθε " ορθώνουμε ένα κατακόρυφο ορθογώνιο που η μια βάση του βρίσκεται στον άξονα x και η άλλη περιέχει το σημείο $(c_k, f(c_k))$ της καμπύλης
- Σε κάθε υποδιάστημα, σχηματίζω το γινόμενο $f(c_k)\,\Delta x_k$.
- Θεωρώ το άθροισμα των γινομένων $s_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \cdot \Delta x_k$

- Το άθροισμα αυτό που εξαρτάται από τη διαμέριση P και την επιλογή των αριθμών c_k είναι ένα <u>άθροισμα Riemann της f στο $[a, b]$</u>

- Καθώς πυκνώνουμε τη διαμέριση του $[a, b]$, τα ορθογώνια που ορίζονται από αυτές θα προσεγγίζουν όλο και περισσότερο το χωρίο που περικλείεται από τον x-άξονα και την καμπύλη της f.
- Αναμένουμε δηλ. τα αθροίσματα Riemann θα συγκλίνουν σε μια οριακή τιμή.