ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

Απλοποίηση με αντικατάσταση

$I=\int \frac{2x-9}{\sqrt{x^2-9x+1}}\,dx = ;$ Θέτω $u=x^2-9x+1 \Rightarrow du=(2x-9)dx$. Άρα $I=\int \frac{du}{\sqrt{u}} =$

$$\int u^{-1/2}\,du = \frac{u^{-1/2+1}}{(-1/2)+1} = 2u^{1/2}+C = 2\sqrt{x^2-9x+1}+C$$

—·—

Συμπλήρωση του τετραγώνου

$I=\int \frac{dx}{\sqrt{8x-x^2}}\,dx = ;$ Συμπληρώνω το τετράγωνο γράφοντας την υπόρριζη ποσότητα στη μορφή $8x-x^2 = -(x^2-8x) = -(x^2-8x+16-16) = -(x^2-8x+16)+16 = 16-(x-4)^2$

Άρα $I=\int \frac{dx}{\sqrt{16-(x-4)^2}}$. Θέτω $a=4$, $u=x-4$, $du=dx$ και $I=\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)+C$

$= \sin^{-1}\left(\frac{x-4}{4}\right)+C$

—·—

Ανάπτυξη δύναμης και χρήση τριγων. ταυτότητας

$I=\int (\sec x+\tan x)^2\,dx = ;$ $(\sec x+\tan x)^2 = \sec^2 x + 2\sec x\tan x + \tan^2 x$

Οι δύο πρώτοι όροι του δεξιού μέλους έχουν γνωστά ολοκληρώματα. Για τον τρίτο γράφουμε: $\tan^2 x+1=\sec^2 x \Rightarrow \tan^2 x = \sec^2 x - 1$

Αντικαθιστώ το $\tan^2 x$ με το $\sec^2 x-1$ και έχω: $I=\int (\sec^2 x + 2\sec x\tan x + \sec^2 x - 1)\,dx$

$= 2\int \sec^2 x\,dx + 2\int \sec x\tan x\,dx - \int dx = 2\tan x + 2\sec x - x + C$

Απαλοιφή τετραγωνικής ρίζας

$I = \int_0^{\pi/4} \sqrt{1+\cos 4x}\, dx = ;$ $\qquad \cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2} \Rightarrow 1+\cos 2\theta = 2\cos^2\theta$

Για $\theta = 2x$ η ταυτότητα γίνεται $1+\cos 4x = 2\cos^2 2x$. Άρα $I = \int_0^{\pi/4} \sqrt{2}\sqrt{\cos^2 2x}\, dx$

$$= \sqrt{2}\int_0^{\pi/4} |\cos 2x|\, dx = \sqrt{2}\int_0^{\pi/4} \cos 2x\, dx = \sqrt{2}\left[\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi/4} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} - 0\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

στο $[0, \pi/4] \rightarrow \cos 2x \geq 0$

Αναγωγή καταχρηστικού κλάσματος

$I = \int \frac{3x^2 - 7x}{3x+2}\, dx = ;$ Η ολοκληρωτέα ποσότητα είναι ένα καταχρηστικό κλάσμα (δηλ. ο αριθμητής είναι μεγαλύτερου βαθμού από τον παρονομαστή). Για να ολοκληρώσουμε κάνουμε πρώτα τη διαίρεση οπότε παίρνουμε ένα πηλίκο συν ένα υπόλοιπο το οποίο τώρα είναι γνήσιο κλάσμα: $\frac{3x^2-7x}{3x+2} = x - 3 + \frac{6}{3x+2}$. Έτσι: $I = \int\left(x - 3 + \frac{6}{3x+2}\right) dx =$

$$\frac{x^2}{2} - 3x + 2\ln|3x+2| + C$$

Χωρισμός κλάσματος σε δύο

$I = \int \frac{3x+2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = ;$ Χωρίζω την ολοκληρωτέα ποσότητα σε δύο κλάσματα:

$\int \frac{3x+2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = 3\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx + 2\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ Για το 1ο ολοκλήρωμα θέτω $u = 1 - x^2 \Rightarrow du = -2x\, dx$

$\Rightarrow x\, dx = -\frac{1}{2} du$ Άρα $3\int \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = 3\int \frac{(-1/2)\, du}{\sqrt{u}} = -\frac{3}{2}\int u^{-1/2}\, du = -\frac{3}{2}\frac{u^{1/2}}{1/2} + C_1 = -3\sqrt{1-x^2} + C_1$

Για το δεύτερο: $2\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 2\sin^{-1}x + C_2$

Άρα $I = -3\sqrt{1-x^2} + 2\sin^{-1}x + C$