ΚΛΑΣΙΚΗ ΗΛΕΚΤΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗ-ΙΙ (Κ. Ταμβάκης (2013))
ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ-2

Άσκηση 1. Θεωρήστε ένα άπειρο σωληνοειδές κυκλικής διατομής ακτίνας a, το οποίο δημιουργεί μαγνητικό πεδίο

$$\vec{B} = \begin{cases} \hat{z}B_0 & (0 \leq \rho < a) \\ \\ 0 & (\rho > a) \end{cases}$$

όπου B_0 σταθερά.

α) Προσδιορίστε το αντίστοιχο διανυσματικό δυναμικό.

β) Ποια είναι η πυκνότητα ηλεκτρικού ρεύματος που διαρρέει την κυλινδρική επιφάνεια του σωληνοειδούς;

Άσκηση 2. Θεωρήστε το ακόλουθο στατικό μαγνητικό πεδίο

$$\vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} B_-\,\hat{z} & (r < R) \\ \\ B_+R^3\left(\vec{\nabla}\times\left(\hat{z}\times\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right)\right)\right) & (r > R) \end{cases}$$

Τα B_-, B_+, R είναι γνωστές σταθερές.

Υπολογίστε την πυκνότητα ηλεκτρικού ρεύματος παντού.

Άσκηση 3. Θεωρήστε το ακόλουθο μαγνητικό πεδίο

$$\vec{B}(\rho,\,t) = \hat{z}\,B_0\,e^{-\frac{\rho}{a}}\,\tanh(t/\tau)\,,$$

όπου B_0, a, τ γνωστές παράμετροι. Το πεδίο αυτό είναι πρακτικά σταθερό με εξαίρεση το χρονικό διάστημα $[-\tau,\,\tau]$, κατά το οποίο μεταβαίνει από την τιμή $-B_0e^{-\rho/a}$ στην τιμή $+B_0e^{-\rho/a}$. Επιπλέον, το πεδίο αυτό είναι και χωρικά εντοπισμένο στην περιοχή εύρους $\sim a$.

α) Προσδιορίστε το επαγόμενο ηλεκτρικό πεδίο; Διερευνείστε τον χρονικό και τοπικό εντοπισμό αυτού του πεδίου.

β) Προσδιορίστε τις πηγές $\tilde{\rho}$ και $\vec{J}$ που δημιουργούν αυτά τα πεδία.

γ) Υπολογίστε το διάνυσμα Poynting και την ισχύ που διαπερνά μια κυλινδρική επιφάνεια ύψους L και ακτίνας R.

Θέμα 4. Θεωρήστε το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο

$$\vec{E} = g\,(-y\hat{x} + x\hat{y}), \quad \vec{B} = -2g\,t\,\hat{z}\,,$$

όπου g γνωστή παράμετρος.

α) Δείξτε ότι τα πεδία αυτά ικανοποιούν τις εξισώσεις Maxwell χωρίς πηγές.

β) Κατασκευάστε (σε καρτεσιανές συντεταγμένες) τον τανυστή ηλεκτρομαγνητικής τάσης

$$\sigma_{ij} \,=\, \epsilon_0 E_i E_j \,+\, \mu_0^{-1} B_i B_j \,-\, \frac{\delta_{ij}}{2}\left(\epsilon_0 E^2 + \mu_0^{-1} B^2\right) .$$

γ) Υπολογίστε την συνολική δύναμη που εξασκείται σε ένα ημισφαίριο ακτίνας R (μαζί με τον πάτο).

δ) Επαλήθεύστε την διατήρηση ορμής

$$\nabla_j \sigma_{ij} \,=\, \frac{1}{c^2}\frac{\partial S_i}{\partial t} ,$$

όπου S_i το διάνυσμα Poynting.