

ΚΛΑΣΙΚΗ ΗΛΕΚΤΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗ-II (Κ. Ταμβάκης (2013))
ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ-5

Άσκηση 1. Θεωρήστε δύο γεγονότα O και A από τα οποία το πρώτο συμβαίνει στην αρχή των συντεταγμένων του χωρόχρονου Minkowski. Δείξτε ότι, εάν το δεύτερο βρίσκεται μέσα στον κώνο φωτός, η χρονική τους αλληλουχία είναι αναλλοίωτη.

Άσκηση 2. Δείξτε ότι δύο γεγονότα που βρίσκονται έξω από τον κώνο φωτός δεν μπορεί να συνδέονται αιτιοκρατικά.

Άσκηση 3. Μια στερεά ράβδος έχει μήκος ℓ_0 στο σύστημα ηρεμίας της (Σ). Εάν η ράβδος κινείται με ταχύτητα \vec{V} ως προς ένα σύστημα Σ' , ποιο είναι το μήκος της στο σύστημα αυτό; Η διεύθυνση της ράβδου δεν συμπίπτει με την διεύθυνση της ταχύτητας \vec{V} .

Άσκηση 4. Επαληθεύστε ότι ο μετασχηματισμός Lorentz («ώθηση»)

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ικανοποιεί την σχέση

$$\Lambda^\perp g \Lambda = g,$$

όπου $g = \text{Diag}(1, -1, -1, -1)$ ο μετρικός τανυστής.

Άσκηση 5. Δείξτε ότι το τετραδιάστατο gradient $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ μετασχηματίζεται με τον αντίστροφο μετασχηματισμό Lorentz $(\Lambda^{-1})_\mu^\nu$.

Άσκηση 6. Έστω x^μ το ανταλλοίωτο τετράνυσμα ενός σημείου (γεγονότος) στον χωρόχρονο Minkowski. Έστω και $f(x^2)$ μια συνάρτηση του $x^2 = g_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta$. Βρείτε πως μετασχηματίζεται το μέγεθος

$$T_\nu^\mu = x^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\nu}$$

κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz.

Άσκηση 7. Θεωρήστε την στατική πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου

$$\rho = \begin{cases} \rho_0 & 0 \leq r \leq R \\ 0 & r > R \end{cases}$$

Τί μορφή έχει η κατανομή αυτή σε ένα σύστημα Σ' το οποίο κινείται με ταχύτητα \vec{V} ως προς το σύστημα ηρεμίας της κατανομής (Σ). Ποιά είναι η πυκνότητα ρεύματος;

Άσκηση 8. Θεωρήστε το πεδίο Coulomb, το οποίο παράγεται από ένα στάσιμο σημειακό φορτίο. Βρείτε τα πεδία \vec{E}' , \vec{B}' ως προς ένα σύστημα Σ' που κινείται με ταχύτητα \vec{V} σε σχέση με το σύστημα ηρεμίας του φορτίου. Επαληθεύστε ότι τα πεδία αυτά ταυτίζονται με τα αντίστοιχα πεδία Lienard-Wiechert για την περίπτωση της ομαλής κίνησης.

Άσκηση 9. Ο Ηλεκτρομαγνητικός Τανυστής $\mathcal{F}^{\mu\nu}$ ορίζεται συναρτήσει των πεδίων ως

$$E_i = \mathcal{F}_{0i}, \quad B_i = -\frac{1}{2c} \epsilon_{ijk} \mathcal{F}_{jk}.$$

Επαληθεύστε ότι

$$E^2 - c^2 B^2 = -\frac{1}{2} \mathcal{F}^{\mu\nu} \mathcal{F}_{\mu\nu}$$

και ότι η ποσότητα αυτή είναι αναλλοίωτη σε μετασχηματισμούς Lorentz.

Άσκηση 10. Η φάση $\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t$ ενός μονοχρωματικού επιπέδου κύματος είναι ποσότητα αναλλοίωτη σε μετασχηματισμούς Lorentz.

- α) Βρείτε πως πρέπει να μετασχηματίζεται ο κυματαριθμός και η συχνότητα.
- β) Θεωρήστε ένα συγκεκριμένο κύμα με

$$\vec{E} = \hat{y} E_0 e^{i(kz - \omega t)}.$$

Υπολογίστε το διάνυσμα Poynting \vec{S} και την πυκνότητα ενέργειας U .

γ) Υπολογίστε τα μεγέθη \vec{S}' , U' σε ένα κινούμενο σύστημα Σ' με ταχύτητα $\vec{V} = \hat{x} V$.

δ) Επαληθεύστε την ισχύ του Θεωρήματος Poynting στο κινούμενο σύστημα.