ΚΛΑΣΙΚΗ ΗΛΕΚΤΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗ ΙΙ

ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΣΗΜΕΙΩΣΕΩΝ 5

Η ΕΙΔΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

1. Η Αρχή της Σχετικότητας και η Παγκοσμιότητα της Ταχύτητας του Φωτός.

Η μελέτη και η περιγραφή της εξέλιξης των φυσικών συστημάτων γίνεται πάντοτε ως προς κάποιο συγκεκριμένο *Σύστημα Αναφοράς*. Ένα Σύστημα Αναφοράς στην απλούστερή του εκδοχή αποτελείται από ένα σύστημα συντεταγμένων, ως προς το οποίο καθορίζονται οι θέσεις των σωματιδίων του φυσικού συστήματος, και από ένα ρολόϊ, ως προς το οποίο μετριέται ο χρόνος. Ένα Σύστημα Αναφοράς στο οποίο ένα ελεύθερο σωματίδιο σωματίδιο κινείται με σταθερή ταχύτητα ονομάζεται *Αδρανειακό Σύστημα Αναφοράς*. Ισοδύναμα, μπορούμε να πούμε ότι Αδρανειακό Σύστημα Αναφοράς είναι ένα Σύστημα Αναφοράς στο οποίο ισχύει ο πρώτος νόμος του Νεύτωνα. Είναι πειραματικό γεγονός ότι υπάρχει τουλάχιστο ένα τέτοιο σύστημα.

Ένα Σύστημα Αναφοράς το οποίο κινείται με σταθερή ταχύτητα ως προς ένα Αδρανειακό Σύστημα Αναφοράς είναι και αυτό αδρανειακό. Πράγματι, σε ένα τέτοιο σύστημα, κάθε ελεύθερο σωματίδιο θα κινείται με σταθερή ταχύτητα και, επομένως, και αυτό το σύστημα θα είναι αδρανειακό. Υπάρχει, συνεπώς, μια απειρία από Αδρανειακά Συστήματα Αναφοράς τα οποία κινούνται προς άλληλα με σταθερές ταχύτητες.

Η *Αρχή της Σχετικότητας* διατυπώνεται ως εξής:

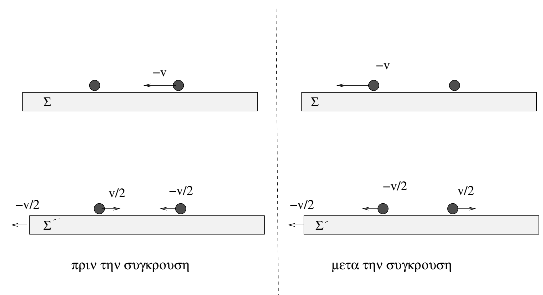
Οι Νόμοι της Φυσικής είναι οι ίδιοι σε όλα τα Αδρανειακά Συστήματα Αναφοράς.

Υποθέστε ότι ένα φυσικό αντικείμενο έχει μια σειρά από ιδιότητες ως προς ένα Αδρανειακό Σύστημα Αναφοράς στο οποίο το αντικείμενο ηρεμεί. Τότε, στην περίπτωση που το αντικείμενο κινηθεί με σταθερή ταχύτητα, θα εξακολουθήσει να έχει τις ίδιες ιδιότητες ως προς ένα Αδρανειακό Σύστημα Αναφοράς που κινείται με την ταχύτητα του αντικειμένου. Επί παραδείγματι, μια φωτεινή πηγή εκπέμπει κίτρινο φως στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου. Η πηγή αυτή θα εξακολουθήσει να εκπέμπει το ίδιο κίτρινο φως εάν μεταφερθεί σε ένα τραίνο και παρατηρηθεί στο σύστημα αναφοράς του τραίνου.

Σύμφωνα με την *Αρχή της Σχετικότητας* οι εξισώσεις που περιγράφουν τους φυσικούς νόμους θα έχουν την ίδια μορφή στα διάφορα αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Επί παραδείγματι, θεωρείστε ένα σωματίδιο με εξίσωση κίνησης $m\frac{d^2x_i}{dt^2} = F_i$ ως προς ένα αδρανειακό σύστημα Σ. Η Αρχή της Σχετικότητας υπαγορεύει ότι η εξίσωση κίνησης σε ένα άλλο αδρανειακό σύστημα Σ' θα είναι $m\frac{d^2x'_i}{dt'^2} = F'_i$, όπου x'_i, t' και F'_i οι συντεταγμένες, ο χρόνος και η δύναμη ως προς το Σ', ορισμένες με τον ίδιο τρόπο όπως και στο Σ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Δύο όμοιες μικρές σφαίρες της ίδιας μάζας συγκρούονται ελαστικά. Πριν από την κρούση η μια σφαίρα ("1") ηρεμεί ενώ η άλλη ("2") έχει μια ταχύτητα v. *Ποιές είναι οι ταχύτητες μετά την κρούση;*

Αυτό είναι ένα πολύ γνωστό πρόβλημα κρούσης, το οποίο επιλύεται συνήθως με εφαρμογή της διατήρησης της ορμής και της ενέργειας. Η απάντηση, φυσικά, είναι ότι μετά την κρούση η αρχικά ακίνητη σφαίρα κινείται με ταχύτητα v ενώ αυτή που αρχικά εκινείτο σταματά. Εδώ, θα επιχειρήσουμε να το λύσουμε *χωρίς να χρησιμοποιήσουμε την διατήρηση της ορμής και την διατήρηση ενέργειας*, στηριζόμενοι εξ ολοκλήρου στην Αρχή της Σχετικότητας[1].



Ας υποθέσουμε ότι οι ταχύτητες πρίν από την κρούση είναι $v_1 = 0$ και $v_2 = -v$ ως προς ένα αδρανειακό σύστημα Σ. Ας θεωρήσουμε τώρα και ένα αδρανειακό σύστημα Σ', το οποίο κινείται ως προς το Σ με ταχύτητα $-v/2$. Ως προς το Σ' το σωματίδιο «1» θα έχει πριν από την κρούση ταχύτητα $v/2$ ενώ το σωματίδιο «2» ταχύτητα $-v/2$. Επομένως, στο σύστημα Σ' έχουμε δύο σωματίδια της ίδιας μάζας που συγκρούονται με αντίθετες και ίσες κατά μέτρον ταχύτητες. Είναι φανερό ότι μετά την σύγκρουση, λόγω συμμετρίας, το σωματίδιο «1» θα έχει ταχύτητα $-v/2$ και το σωματίδιο «2» ταχύτητα $v/2$. Στο σύστημα αναφοράς Σ οι ταχύτητες μετά την κρούση θα είναι $-v$ για το σωματίδιο «1» και μηδενική για το σωματίδιο «2».

Ένα πειραματικό γεγονός, τεκμηριωμένο ποικιλοτρόπως, είναι το γεγονός ότι, εάν μια διαταραχή δημιουργηθεί σε κάποιο σημείο ενός φυσικού συστήματος, αυτή δεν θα γίνει αισθητή σε κάποιο άλλο σημείο του συστήματος παρά μόνο μετά την παρέλευση κάποιου ελάχιστου χρόνου. Διαιρώντας την απόσταση μεταξύ των δύο σημείων με τον χρόνο αυτό παίρνουμε την ταχύτητα διάδοσης της διαταραχής. Για την ακρίβεια, η ταχύτητα αυτή είναι η *μέγιστη* ταχύτητα διάδοσης των διαταραχών μεταξύ των σημείων του φυσικού συστήματος. Επί παραδείγματι, είναι πειραματικό γεγονός ότι ένα ταλαντούμενο ηλεκτρικό φορτίο εκπέμπει ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα (φως), το οποίο διαδίδεται στο κενό χώρο με ταχύτητα $c = 2.99793 \times 10^{10}\, cm/sec$, η οποία είναι *παγκόσμια σταθερά*.

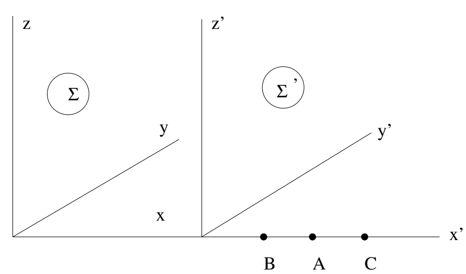
[1] Υποθέτουμε ότι οι ταχύτητες είναι σχετικά μικρές ώστε να ισχύει ο απλός προσθετικός κανόνας σύνθεσης ταχυτήτων.

Η ύπαρθη αυτής της μέγιστης ταχύτητας για όλα τα αδρανειακά συστήματα εκφράζεται με την *Αρχή της Παγκοσμιότητας της Ταχύτητας του Φωτός*, η οποία διατυπώνεται ως εξής:

Η ταχύτητα διάδοσης των ηλεκτρομαγνητικών διαταραχών στον κενό χώρο (ταχύτητα του φωτός) είναι η ίδια σε όλα τα Αδρανειακά Συστήματα Αναφοράς.

Η αρχή αυτή θέτει ένα ανώτατο όριο στην ταχύτητα με την οποία μπορεί να κινηθεί ένα οποιοδήποτε σωματίδιο, δεδομένου ότι η κίνηση ενός σωματιδίου με ταχύτητα μεγαλύτερη από c αντιστοιχεί στην διάδοση διαταραχών με ταχύτητα μεγαλύτερη από c. Ας σημειωθεί ότι η ύπαρξη μιας μέγιστης ταχύτητας διάδοσης αφορά κάθε είδους αλληλεπίδραση και όχι μόνο την ηλεκτρομαγνητική (φως). Οι βαρυτικές διαταραχές έχουν επίσης την ίδια ταχύτητα διάδοσης στο κενό c.

Η Αρχή της Παγκοσμιότητας της Ταχύτητας του Φωτός έχει ως άμεση συνέπεια το γεγονός ότι *ο χρόνος δεν είναι απόλυτος*. Πράγματι, ας θεωρήσουμε δύο αδρανειακά συστήματα Σ και Σ' με παράλληλους άξονες συντεταγμένων, εκ των οποίων το δεύτερο κινείται κατά την διέθυνση $\hat{x}$. Ένα φωτεινό σήμα που εκπέμπεται από το σημείο A του Σ' θα φθάσει στα σημεία B και C του Σ' ταυτόχρονα. Στο ακίνητο σύστημα αναφοράς όμως(δεδομένου ότι η ταχύτητα του φωτός είναι η ίδια και στα δύο συστήματα), το σήμα θα φθάσει στο σημείο B *νωρίτερα* από τον χρόνο που θα φθάσει στο σημείο C, μια και το B έχει μετακινηθεί προς την διεύθυνση της πηγής ενώ το C έχει απομακρυνθεί. Η αφίξεις των σημάτων δεν θα είναι ταυτόχρονες στο Σ, ενώ είναι ταυτόχρονες στο Σ'.

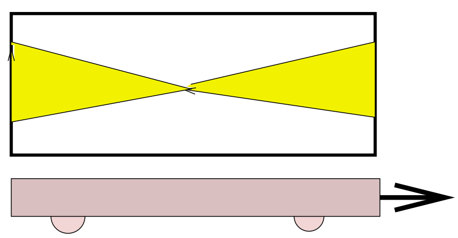


ΤΑ ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΤΗΣ ΕΙΔΙΚΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Οι Νόμοι της Φυσικής είναι οι ίδιοι σε όλα τα Αδρανειακά Συστήματα Αναφοράς.

Η ταχύτητα διάδοσης των ηλεκτρομαγνητικών διαταραχών στον κενό χώρο (ταχύτητα του φωτός) είναι η ίδια σε όλα τα Αδρανειακά Συστήματα Αναφοράς.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Θεωρείστε ένα λαμπτήρα πυρακτώσεως ακριβώς στο κέντρο μιας προθήκης καταστήματος. Όταν ανάψουμε τον λαμπτήρα, το φώς θα φθάσει στους δύο απέναντι τοίχους *ταυτόχρονα*. Για ένα παρατηρητή όμως, ο οποίος κινείται ομαλά ως προς την βιτρίνα, λόγω της σταθερότητας της ταχύτητας του φωτός, το φως θα φθάσει νωρίτερα στο δεξιό τοίχωμα και αργότερα στο αριστερό.



Άμεση συνέπεια της σταθερότητας της ταχύτητας του φωτός είναι ότι:

Δύο γεγονότα που είναι ταυτόχρονα σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς δεν είναι εν γένει ταυτόχρονα σε ένα άλλο σύστημα.

2. Το Αναλλοίωτο Διάστημα.

Ας θεωρήσουμε τώρα δύο αδρανειακά συστήματα Σ και Σ', όπως τα ανωτέρω, τα οποία κινούνται με μια σταθερή σχετική ταχύτητα. Ένα φωτεινό σήμα εκπέμπεται από το σημείο x_1, y_1, z_1 κατά την χρονική στιγμή t_1 και φθάνει στο σημείο x_2, y_2, z_2 κατά την χρονική στιγμή t_2. Προφανώς, θα ισχύει

$$c(t_2 - t_1) \,=\, \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

ή

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \,-c^2(t_2 - t_1)^2 \,=\, 0\,.$$

Παρατηρώντας τα ίδια γεγονότα στο σύστημα Σ', όπου αντιστοιχούν στις τετράδες x'_1, y'_1, z'_1, t'_1 και x'_2, y'_2, z'_2 και t'_2, λόγω της σταθερότητας της ταχύτητας του φωτός, καταλήγουμε στην ανάλογη σχέση

$$(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2 \,-c^2(t'_2 - t'_1)^2 \,=\, 0\,.$$

Συμπεραίνουμε, επομένως, ότι η ποσότητα

$$s_{12^2} \,=\, c^2(t_1 - t_2)^2 \,-(x_2 - x_1)^2 \,-(y_2 - y_1)^2 \,-(z_2 - z_1)^2 \qquad (1)$$

έχει την ίδια (στην περίπτωσή μας, μηδενική) τιμή και στα δύο συστήματα αναφοράς. Η ποσότητα s_{12} ονομάζεται *«απόσταση ή διάστημα»* μεταξύ των δύο γεγονότων "1" και "2" (στο συγκεκριμένο παράδειγμα, απόσταση μεταξύ της εκπομπής και της λήψης του φωτεινού σήματος). Το αξίωμα της σταθερότητας της ταχύτητας του φωτός διατυπώνεται συναρτήσει της έννοιας του διαστήματος ως εξής:

Εάν ο διάστημα μεταξύ δύο γεγονότων μηδενίζεται σε ένα αδρανειακό σύστημα, τότε θα είναι μηδενικό και σε όλα τα αδρανειακά συστήματα.

Η απόσταση μεταξύ δύο απειροστά γειτονικών γεγονότων x, y, z, t και $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$, $t + dt$ θα είναι, προφανώς, μια απειροστή ποσότητα

$$ds^2 \,=\, c^2dt^2 \,-dx^2 \,-dy^2 \,-dz^2\,. \qquad (2)$$

Έστω, ds^2 η απειροστή απόσταση σε ένα αδρανειακό σύστημα Σ και ds'^2 η αντίστοιχη ποσότητα στο αδρανειακό σύστημα Σ' που κινείται ως προς το Σ με σταθερή ταχύτητα v. Όπως είδαμε πιο πάνω, ο μηδενισμός του ds^2 συνεπάγεται τον μηδενισμό του ds'^2. Αυτό θα πρέπει να αποτυπώνεται σε μια σχέση μεταξύ τους, η οποία, δεδομένου ότι οι δύο ποσότητες είναι διαφορικά της ίδιας τάξης, θα πρέπει να είναι μια γραμμική σχέση αναλογίας

$$ds^2 \,=\, f\, ds'^2\,.$$

Η *ομοιογένεια του χώρου*[2] και η *ομοιογένεια του χρόνου*[3] επιβάλλουν η συνάρτηση αναλογίας f να μην εξαρτάται από τις συντεταγμένες και τον χρόνο. Επίσης, η *ισοτροπία του χώρου*[4] υπαγορεύει ότι η συνάρτηση f δεν μπορεί να εξαρτάται από την διεύθυνση της σχετικής ταχύτητας των δύο συστημάτων. Τελικά, μπορούμε να έχουμε μόνο $f = f(v)$, όπου v είναι το μέτρο της σχετικής ταχύτητας. Εφαρμόζοντας τα ανωτέρω για την τριάδα των συστημάτων Σ, Σ_1, Σ_2, με v_1 και v_2 τις αντίστοιχες ταχύτητες (με την ίδια διεύθυνση, έστω $\hat{x}$), παίρνουμε

$$ds^2 \,=\, f(v_1)\, ds_1^2, \quad ds^2 \,=\, f(v_2)\, ds_2^2, \quad ds_1^2 \,=\, f(v_{12})\, ds_2^2$$

ή

$$\frac{f(v_2)}{f(v_1)} \,=\, f(v_{12})\,.$$

Δεδομένου όμως ότι η σχετική ταχύτητα v_{12} είναι η απόλυτος τιμή της διαφοράς και, επομένως, ισχύει $v_{12} = v_{21}$, θα έχουμε και

$$\frac{f(v_1)}{f(v_2)} \,=\, f(v_{12})\,,$$

που συνεπάγεται[5]

$$f(v) \,=\, 1\,.$$

Επομένως, και στην γενική περίπτωση μη-μηδενικής απόστασης, η απόσταση μεταξύ δύο γεγονότων είναι ανεξάρτητη από το σύστημα αναφοράς, δηλαδή μπορούμε να γράψουμε

$$ds^2 \,=\, ds'^2\,. \tag{3}$$

Η ισότητα αυτή μεταξύ απειροστών αποστάσεων γενικεύεται πάραυτα στην ισότητα πεπερασμένων διαστημάτων

$$s_{12}^2 \,=\, {s'}_{12}^2\,. \tag{4}$$

Είναι φανερό ότι το τετράγωνο της απόστασης μεταξύ δύο γεγονότων s_{12}^2 δεν είναι ένας μη-αρνητικός αριθμός. Στην περίπτωση που τα δύο γεγονότα

---

[2] Το γεγονός ότι διαφορετικά σημεία του (κενού) χώρου είναι ισοδύναμα ή ότι ο χώρος είναι αναλλοίωτος σε μετατοπίσεις.

[3] Το γεγονός ότι διαφορετικές χρονικές στιγμές είναι ισοδύναμες ή ότι ο χρόνος είναι αναλλοίωτος σε μετατοπίσεις.

[4] Το γεγονός ότι οι διαφορετικές διευθύνσεις κίνησης είναι ισοδύναμες.

[5] Επί παραδείγματι, θεωρείστε $\vec{v}_2 \,=\, -\vec{v}_1$. Τότε, $v_{12} = |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| = 2v_1$ και η ανωτέρω σχέση δίνει

$$\frac{f(v_1)}{f(v_1)} = f(2v_1) \implies f(2v_1) \,=\, 1$$

για κάθε v_1.

συνδέονται μέσω μιας απόστασης με $s_{12}^2 > 0$, δεδομένου ότι αυτό αντιστοιχεί σε $c^2(t_1 - t_2)^2 > (x_1 - x_2)^2$, είναι φανερό ότι αυτά μπορούν να συνδεθούν με ένα φωτεινό σήμα. Η απόσταση δύο τέτοιων γεγονότων ονομάζεται *χρονοειδής*. Δεδομένου ότι η απόσταση είναι ανεξάρτητη από το σύστημα αναφοράς, αυτή η ιδιότητα είναι γενική. Στην αντίθετη περίπτωση που η απόσταση μεταξύ δύο γεγονότων αντιστοιχεί σε $s_{12}^2 < 0$, αυτή ονομάζεται *χωροειδής* και τα δύο γεγονότα δεν μπορούν να συνδεθούν με ένα φωτεινό σήμα. Και η έννοια της χωροειδούς απόστασης είναι ανεξάρτητη από το σύστημα αναφοράς. Τέλος, η οριακή περίπτωση $s_{12}^2 = 0$ ονομάζεται *φωτοειδής*. Αξίζει να υπογραμμίσουμε ότι οι έννοιες *«πριν»* και *«μετά»* έχουν νόημα, ανεξάρτητο από το σύστημα αναφοράς, μόνο για τα χρονοειδή γεγονότα, δεδομένου ότι μόνο για αυτά η διαφορά $t_1 - t_2$ δεν μπορεί να αλλάξει πρόσημο. Για τα χωροειδή γεγονότα η χρονική διαφορά μπορεί να μηδενισθεί και, επομένως, να αλλάξει πρόσημο.

Ο *Ιδιοχρόνος (Proper Time)* ενός σωματιδίου ορίζεται ως εξής: Θεωρείστε ένα σημειακό σωματίδιο. Στο σύστημα αναφοράς, το οποίο είναι προσαρτημένο στο σωματίδιο και κινείται μαζί του (*Σύστημα Ηρεμίας* Σ_0) το χρονικό διάστημα τ το οποίο καταγράφεται θα ικανοποιεί

$$ds^2 = c^2\,d\tau^2 \Longrightarrow \tau = \int \frac{ds}{c} = \int dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,, \tag{5}$$

όπου t και $v_i = \frac{dx_i}{dt}$ ο χρόνος και η ταχύτητα σε ένα οποιοδήποτε άλλο σύστημα αναφορτάς Σ. Είναι φανερό ότι ο ιδιοχρόνος είναι αναλλοίωτη ποσότητα, μια και δίνεται από το αναλλοίωτο μήκος διαιρεμένο με την ταχύτητα του φωτός που είναι παγκόσμια σταθερά.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Θεωρείστε δύο γεγονότα τα οποία είναι ταυτόχρονα σε ένα αδρανιακό σύστημα αναφοράς Σ. Μπορείτε να δείξετε ότι η χρονική διαφορά των δύο γεγονότων, για οποιοδήποτε άλλο σύστημα αναφοράς, είναι αυθαίρετα μεγάλη . Αντιθέτως, η χωρική απόσταση των δύο γεγονότων έχει ελάχιστη τιμή στο Σ.

Από το αναλλοίωτο διάστημα μεταξύ των δύο γεγονότων έχουμε

$$s_{12}^2 = -(x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2 = {s'}_{12}^2 = c^2(t_1' - t_2')^2 - (x_1' - x_2')^2 - (y_1' - y_2')^2 - (z_1' - z_2')^2$$

ή

$$c^2(t_1' - t_2')^2 = (x_1' - x_2')^2 + (y_1' - y_2')^2 + (z_1' - z_2')^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2\,.$$

Από την έκφραση αυτή είναι φανερό ότι η θετική ποσότητα $(t_1' - t_2')^2$ είναι αυθαίρετη και ότι για τις χωρικές αποστάσεις ισχύει $(\vec{r}_1{}' - \vec{r}_2{}')^2 > (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Δύο γεγονότα συμβαίνουν στο ίδιο σημείο σε διαφορετικές χρονικές στιγμές στο σύστημα Σ. Μπορείτε να αποδείξετε ότι η χρονική σειρά των δύο γεγονότων είναι η ίδια σε όλα τα συστήματα αναφοράς. Επίσης, μπορείτε να δείξετε ότι η χρονική διαφορά των δύο γεγονότων σε διάφορα συστήματα αναφοράς μεταβάλεται από το άπειρο μέχρι μια ελάχιστη τιμή, που αντιστοιχεί στο Σ. Αντιθέτως, δεν υπάρχει όριο στην χωρική τους απόσταση.

Έχουμε

$$s_{12}^2 = c^2(t_1 - t_2)^2 = {s'}_{12}^2 = c^2(t_1' - t_2')^2 - (x_1' - x_2')^2 - (y_1' - y_2')^2 - (z_1' - z_2')^2\,.$$

Για να αλλάξει η χρονική σειρά των γεγονότων θα πρέπει η χρονική τους απόσταση να μηδενισθεί. Αυτό όμως δεν είναι δυνατόν, μια και

$$c^2(t_1' - t_2')^2 = c^2(t_1 - t_2)^2 + (x_1' - x_2')^2 + (y_1' - y_2')^2 + (z_1' - z_2')^2 > 0\,.$$

Η ελάχιστη τιμή του δεξιού μέλους είναι όταν η χωρική απόσταση μηδενίζεται, πράγμα που συμβαίνει στο Σ.

3. Οι Μετασχηματισμοί Lorentz.

Θεωρείστε ένα ακίνητο αδρανειακό σύστημα αναφοράς Σ και ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς Σ' που κινείται κατά την διεύθυνση $\hat{x}$ με ταχύτητα V. Υποθέτουμε ότι οι άξονες συντεταγμένων των δύο συστημάτων είναι παράλληλοι και ότι κατά την χρονική στιγμή $t = 0$ τα δύο συστήματα αξόνων συμπίπτουν (προφανώς, από την ισότητα της απόστασης $s^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ στα δύο συστήματα αναφοράς θα έχουμε $t' = t = 0$). Ξεκινώντας από την ισότητα

$$s^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 \tag{6}$$

θα επιχειρήσουμε να βρούμε τις σχέσεις που συνδέουν τους χρόνους t, t' και τις συντεταγμένες x, y, z και x', y', z' στα δύο συστήματα.

Είναι λογικό να υποθέσουμε ότι η σχετική κίνηση των συστημάτων κατά την διεύθυνση $\hat{x}$ δεν επηρεάζει τις συντεταγμένες κατά τις εγκάρσιες διευθύνσεις και ότι

$$y' = y, \quad z' = z\,. \tag{7}$$

Τότε, η βασική μας σχέση είναι η

$$c^2t^2 - x^2 = c^2t'^2 - x'^2\,. \tag{8}$$

Το επόμενο βήμα είναι να γράψουμε μια γενική γραμμική σχέση μεταξύ των ζευγών x, t και x', t' με άγνωστους συντελεστές

$$ct' = a_0ct + a_1x, \;\; x' = a_2x + a_3ct\,. \tag{9}$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις αυτές στην συνθήκη σταθερότητας της απόστασης, παίρνουμε

$$a_0^2 - a_3^2 = 1, \;\; a_1^2 - a_1^2 = -1, \;\; a_0a_1 = a_2a_3$$

$$a_0 = a_2 = \sqrt{1 + a_1^2}, \;\; a_3 = a_1\,. \tag{10}$$

Οι αντίστοιχοι μετασχηματισμοί είναι

$$ct' = a_1\,x + ct\sqrt{1+a_1^2}, \quad x' = \sqrt{1+a_1^2}\,x + a_1\,ct\,. \tag{11}$$

Η εναπομείνασα ελεύθερη παράμετρος a_1 μπορεί να εξαρτάται μόνο από την ταχύτητα V. Η σχέση της προσδιορίζεται από τον απλό συλλογισμό ότι η αρχή των αξόνων του Σ' κινείται με ταχύτητα V. Αυτό μας δίνει

$$0 = \sqrt{1+a_1^2}\,x + ct\,a_1 \Longrightarrow \frac{x}{t} = -c\,\frac{a_1}{\sqrt{1+a_1^2}}$$

ή

$$V = -c\,\frac{a_1}{\sqrt{1+a_1^2}} \Longrightarrow a_1 = -\frac{\frac{V}{c}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\,.$$

Έτσι, καταλήγουμε στους μετασχηματισμούς

$$t' = \frac{(\,t - Vx/c^2\,)}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad x' = \frac{(\,x - V\,t\,)}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad y' = y,\; z' = z\,, \tag{12}$$

που ονομάζονται *Μετασχηματισμοί Lorentz*. Εισάγοντας την παραμετροποίηση

$$\beta \equiv \frac{V}{c}, \quad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,, \tag{13}$$

οι μετασχηματισμοί αυτοί παίρνουν την μορφή

$$t' = \gamma(\,t - \beta\,x/c\,)$$

$$x' = \gamma(\,x - \beta\,c\,t)$$

$$y' = y,\;\; z' = z$$

Μετασχηματισμοί Lorentz

Οι αντίστροφοι μετασχηματισμοί Lorentz προκύπτουν με την απλή αντικατάσταση $V \to -V$

$$x = \gamma(x' + \beta\,c\,t'),\; t = \gamma(t' + \beta\,x'/c),\; y = y',\; z = z'\,. \tag{14}$$

Στην περίπτωση που η ταχύτητα V είναι πολύ μικρότερη από την ταχύτητα του φωτός ($V << c$), μπορούμε να αναπτύξουμε τις εκφράσεις των μετασχηματισμών Lorentz ως προς τον μικρό αριθμό V/c. Τότε, οι μετασχηματισμοί Lorentz παίρνουν την μορφή

$$x' \approx x - Vt + O(V^2/c^2),\; t' \approx t - \frac{V}{c^2}x + O(V^2/c^2)\,. \tag{15}$$

Αγνοώντας τους όρους τάξεως $1/c$ ή μικρότερους παίρνουμε τους γνωστούς *Μετασχηματισμούς Γαλιλαίου*

$$x' = x - Vt, \quad t' = t \tag{16}$$

που δίνουν την σχέση συντεταγμένων μεταξύ Σ και Σ' στην περιοχή ισχύος της Νευτώνιας Μηχανικής.

Η Συστολή Μήκους κατά Lorentz (Lorentz Contraction). Μια άμεση εφαρμογή αυτών των τύπων οδηγεί στο φαινόμενο της *συστολής μήκους κατά Lorentz*:

Θεωρείστε μια ράβδο μήκους ℓ_0, η οποία ακινητεί στο σύστημα αναφοράς Σ (σύστημα ηρεμίας). Το μήκος της ράβδου στο σύστημα ηρεμίας $\ell_0 = x_2 - x_1$ ονομάζεται *«Ιδιομήκος» (Proper Length)*. Ως προς ένα σύστημα αναφοράς Σ', κινούμενο με ταχύτητα $\vec{V} = \hat{x}V$, το μήκος της θα ορίζεται από την διαφορά των συντεταγμένων των άκρων της, δηλαδή $\ell = x_2' - x_1'$, μετρούμενων κατά την ίδια χρονική στιγμή $t_2' = t_1'$. Με την βοήθεια των μετασχηματισμών Lorentz, έχουμε

$$\ell_0 = \gamma\,(x_2' + Vt_2' - x_1' - Vt_1') = \gamma\,(\,x_2' - x_1'\,)\;, \tag{17}$$

με $\gamma = 1/\sqrt{1 - V^2/c^2}$. Η σχέση

$$\ell = \ell_0\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \tag{18}$$

δηλώνει ότι το μήκος της ράβδου στο σύστημα Σ' είναι πάντοτε μικρότερο από το ιδιομήκος.

Η Διαστολή Χρόνου κατά Lorentz (Time Dilation). Ένα άλλο φαινόμενο είναι η λεγόμενη *διαστολή χρόνου κατά Lorentz*:

Θεωρείστε ένα ρολόϊ, το οποίο κινείται με ταχύτητα $\vec{V} = \hat{x}V$. Στο σύστημα ηρεμίας Σ ως προς το οποίο το ρολόϊ ακινητεί κάνουμε δύο διαδοχικές μετρήσεις χρόνου t_1 και t_2 στο ίδιο σημείο x, y, z. Το αντίστοιχο χρονικό διάστημα $\Delta t = t_2 - t_1$ μπορεί να εκφρασθεί με την βοήθεια των μετασχηματισμών Lorentz σε ένα ακίνητο σύστημα αναφοράς Σ' ως

$$\Delta t = \frac{t_2' + Vx_2'/c^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - \frac{t_1' + Vx_1'/c^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} + \frac{V}{c^2}\frac{(x_2' - x_1')}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

$$= \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} + \frac{V}{c^2}\frac{[(x_2 - Vt_2) - (x_1 - Vt_1)]}{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - \frac{V^2}{c^2}\frac{\Delta t}{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)}$$

$$\Delta t = \Delta t'\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$

ή

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\,. \tag{19}$$

Η τελευταία σχέση δηλώνει ότι το χρονικό διάστημα που καταγράφεται στο σύστημα ως προς το οποίο το ρολόϊ κινείται είναι πάντοτε μεγαλύτερο από το αντίστοιχο που καταγράφεται στο σύστημα ως προς το οποίο το ρολόϊ ακινητεί.

Μετασχηματισμοί Ταχυτήτων κατά Lorentz. Ας θεωρήσουμε τώρα τους μετασχηματισμούς Lorentz στην περίπτωση που οι συντεταγμένες και ο χρόνος είναι απειροστά κοντά στην αρχή των αξόνων $x = y = z = 0$ και στην χρονική στιγμή $t = 0$. Με άλλα λόγια θεωρούμε τις συντεταγμ΄ρνες dx, dy, dz και τον χρόνο dt. Προφανώς, και οι μετασχηματισμένες συντεταγμένες θα είναι διαφορικά της ίδιας τάξης. Έχουμε

$$dx' = \frac{dx - V dt}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad dt' = \frac{dt - V dx/c^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \, dy' = dy, \, dz' = dz\,.$$

Διαιρώντας τις δύο πρώτες σχέσεις με το διαφορικό dt, παίρνουμε

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{\frac{dx}{dt} - V}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad \frac{dt'}{dt} = \frac{1-\frac{V}{c^2}\frac{dx}{dt}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\,.$$

Διαιρώντας αυτές τις δύο σχέσεις, έχουμε

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{\frac{dx}{dt} - V}{1-\frac{V}{c^2}\frac{dx}{dt}} \implies v'_x = \frac{v_x - V}{1-\frac{V}{c^2}v_x}\,, \tag{20}$$

όπου $v_x \equiv \frac{dx}{dt}$ και $v'_x \equiv \frac{dx'}{dt'}$ είναι η ταχύτητα στα συστήματα αναφοράς Σ και Σ' αντίστοιχα. Ο υπόλοιπες δύο συνιστώσες της ταχύτητας μετασχηματίζονται ανάλογα ως

$$v'_y == v_y \frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1-\frac{V}{c^2}v_x}, \quad v'_z = v_z \frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1-\frac{V}{c^2}v_x}\,. \tag{21}$$

Οι ανωτέρω τύποι δίνουν τους μετασχηματισμούς ταχυτήτων κατά Lorentz.

$v'_x \,=\, \frac{v_x - V}{1-\frac{V}{c^2}v_x},\;\; v'_y \,=\, v_y\,\frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1-\frac{V}{c^2}v_x},\;\; v'_z \,=\, v_z\,\frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1-\frac{V}{c^2}v_x}$
Μετασχηματισμοί Ταχυτήτων

Ας θεωρήσουμε τον ανωτέρω κανόνα μετασχηματισμού ταχυτήτων στην απλή περίπτωση μονοδιάστατης κίνησης ενός σωματιδίου «σ» ως προς τα συστήματα Σ και Σ', το δεύτερο από τα οποία κινείται ως προς το πρώτο με ταχύτητα V. Ο κανόνας γράφεται και ως εξής:

$$V_{\sigma\Sigma'} \,=\, \frac{V_{\sigma\Sigma} \,+\, V_{\Sigma\Sigma'}}{1 \,+\, \frac{1}{c^2}V_{\sigma\Sigma}V_{\Sigma\Sigma'}}\,.$$

Γενικότερα, μπορούμε να γράψουμε

$$V_{AC} \,=\, \frac{V_{AB} + V_{BC}}{1 + \frac{1}{c^2}V_{AB}V_{BC}}\,. \tag{22}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. *Ένα πυροβόλο βάλει υπό γωνία 45^o. Εάν το πυροβόλο είναι τοποθετημένο σε ένα τραίνο που κινείται με σταθερή ταχύτηια V, ποα θα είναι η γωνία βολής για ένα ακίνητο παρατηρητή; Για ποιά ταχύτητα μπορεί η γωνία βολής να γίνει 30^o;*

Η οριζόντια προβολή του κανονιού $\ell\cos\theta$ θα υποστεί συστολή κατά Lorentz, ενώ η κάθετη ($\ell\sin\theta$) δεν θα επιρεασθεί. Συνεπώς, η γωνία βολής για τον ακίνητο παρατηρητή θα είναι

$$\tan\theta' \,=\, \frac{\ell\sin\theta}{\ell\cos\theta/\gamma} \,=\, \gamma\,\tan\theta \,=\, \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\,.$$

Για να γίνει $\theta' \,=\, \pi/6$, θα έχουμε

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \,=\, \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} \Longrightarrow v \,=\, c\sqrt{\frac{2}{3}}\,.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ο μέσος χρόνος ζωής στο σύστημα ηρεμίας του *μυονίου* είναι τ_μ. Όταν παρατηρούμε μια δέσμη μυονίων ταχύτητας v ως προς ένα ακίνητο σύστημα αναφοράς, ο χρόνος ζωής που θα μετρήσουμε είναι

$$\tau'_\mu \,=\, \frac{\tau_\mu}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,.$$

Για ταχύτητες πολύ κοντά στην ταχύτητα του φωτός, π.χ. $v \approx 0.866\,c$, ο χρόνος ζωής μπορεί να διπλασιασθεί.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Για κάθε χρονική στιγμή υπάρχει ένα επίπεδο στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς Σ στο οποίο τα ρολόγια συμφωνούν με τα ρολόγια ενός αδρανειακού συστήματος Σ', το οποίο κινείται με ταχύτητα $\vec{v}$ ως προς αυτό. Μπορείτε να δείξετε ότι αυτό το επίπεδο κινείται στο Σ με ταχύτητα

$$\frac{c^2}{v}\left(1 - \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right).$$

Έστω ότι το ζητούμενο επίπεδο βρίσκεται στην θέση x κατά την χρονική στιγμή t ως προς το Σ. Εξ υποθέσεως, ο ρόνος ως προς το Σ' θα είναι $t' = t$. Από τον μετασχηματισμό Lorentz, έχουμε

$$t' = t = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left(t - \frac{v}{c^2} x \right) .$$

Η ζητοένη ταχύτητα είναι $u \equiv x/t$, Από την πιο πάνωε σχέση έχουμε

$$\sqrt{1 - v^2/c^2} - 1 = -\frac{v}{c^2}\, u$$

ή

$$u = \frac{c^2}{v} \left(1 - \sqrt{1 - v^2/c^2} \right) .$$

4. Ο Χώρος Minkowski.

Η τετράδα των τριών συντεταγμένων x, y, z και του χρόνου t αντιστοιχεί σε ένα *«γεγονός»*, το οποίο συμβαίνει στο σημείο x, y, z κατά την χρονική στιγμή t. Κάθε γεγονός αντιπροσωπεύεται από ένα *«ανταλλοίωτο τετράνυσμα»* (contravariant four-vector) με συνιστώσες

$$x^\mu = \left\{ \begin{array}{l} x^0 \equiv ct \\ \\ x^i = \left\{ \begin{array}{l} x^1 = x \\ x^2 = y \\ x^3 = z \end{array} \right. \end{array} \right. \Longrightarrow x^\mu = \left(\begin{array}{c} ct \\ x \\ y \\ z \end{array} \right). \tag{23}$$

Οι συνιστώσες ενός ανταλλοίωτου τετρανύσματος συμβολίζονται *πάντοτε με τον δείκτη υπερυψωμένο*[6]. Ο δείκτης ενός τετρανύσματος συμβολίζεται με γράμμα του ελληνικού αλφαβήτου και παίρνει τις τέσσερις τιμές $\mu = 0$ (χρονοειδής), $\mu = 1,\, 2,\, 3$ (χωροειδείς). Για τις χωροειδείς συνιστώσες χρησιμοποιείται γράμμα του λατινικού αλφαβήτου ($x^i \to i = 1,\, 2,\, 3$).

Το άθροισμα δύο τετρανυσμάτων (καθώς και το γινόμενο ενός τετρανύσματος με ένα πραγματικό αριθμό) είναι επίσης ένα τετράνυσμα. Το σύνολο των τετρανυσμάτων χτίζει ένα *διανυσματικό χώρο*, ο οποίος ονομάζεται *Χώρος Minkowski*. Μια επί πλέον ιδιότητα του χώρου Minkowski είναι ότι σε κάθε τετράνυσμα αντιστοιχεί ένα *(γενικευμένο) «μήκος» ή «μέτρο»* s, οπου s η γνωστή μας από προηγούμενα εδάφια *απόσταση ή διάστημα* (από την αρχή των αξόνων $t = x = y = z = 0$)

$$s^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 . \tag{24}$$

Δεδομένου, ότι το τετράγωνο αυτού του μέτρου δεν είναι ένας θετικός αριθμός, όπως στον συνήθη τρισδιάστατο ευκλείδιο χώρο, ο χώρος Minkowski ονομάζεται *ψευδοευκλείδιος* διανυσματικός χώρος.

Οι μετασχηματισμοί Lorentz του προηγουμένου εδαφίου μπορούν να παρασταθούν ως πίνακες

$$(x'^\mu) = \left[\begin{array}{c} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc} \gamma & -\gamma\,\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\,\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{array} \right], \tag{25}$$

[6] Σε αντίθεση με τον συνηθισμένο τρισδιάστατο Ευκλείδιο χώρο, όταν αυτός περιγράφεται ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, όπου η θέση των δεικτών είναι καθαρά θέμα επιλογής συμβολισμού, στον τετραδιάστατο χωρόχρονο υπάρχουν δύο διακρίσιμοι τρόποι περιγραφής ενός τερανύσματος, εκ των οποίων ο ένας αντιστοιχεί στις ανταλλοίωτες συνιστώσες που εισήχθησαν ανωτέρω.

όπου

$$\beta \equiv \frac{V}{c}, \;\; \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,. \tag{26}$$

Ο χώρος Minkowski ορίζεται ως ο διανυσματικός χώρος των τετρανυσμάτων x^μ *με μέτρο αναλλοίωτο σε μετασχηματισμούς Lorentz.*

Ας σημειωθεί ότι ο ανωτέρω μετασχηματισμός Lorentz, με σχετική κίνηση μόνο κατά την διεύθυνση $\hat{x}$, είναι μια ειδική περίπτωση. Εν γένει μπορούμε να έχουμε ανάλογους μετασχηματισμούς που να συνδέουν τις συντεταγμένες αδρανειακών συστημάτων κινουμένων και κατά τις διευθύνσεις $\hat{y}$ ή $\hat{z}$. Ένας γενικός τέτοιος μετασχηματισμός έχει τρεις ανεξάρτητες παραμέτρους (π.χ. V_x, V_y και V_z). Επί πλέον, συνηθισμένες τρισδιάστατες στροφές αφήνουν το χωρικό μέρος του μήκους s αναλλοίωτο. Επομένως, ένας *γενικός μετασχηματισμόςLorentz* έχει 6 ανεξάρτητες παραμέτρους, τρεις συνιστώσες ταχύτητας και τρεις γωνίες στροφής. Για ένα γενικό μετασχηματισμό Lorentz $\Lambda^\mu{}_\nu$, πορούμε να γράψουμε

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu\, x^\nu\,, \tag{27}$$

όπου για κάθε επαναλαμβανόμενο δείκτη (άνω και κάτω) υπονοείται άθροιση (σύμβαση Einstein).

Το μήκος s μπορεί να γραφτεί και ως εξής

$$s^2 = \left(x^0,\, x^1,\, x^2,\, x^3\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = x^\mu\, g_{\mu\nu}\, x^\nu\,, \tag{28}$$

έχοντας εισαγάγει τον, λεγόμενο, *μετρικό τανυστή*

$$g_{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Με την βοήθεια του μετρικού τανυστή, το αναλλοίωτο του μήκους εκφράζεται και ως συνθήκη πάνω στους μετασχηματισμούς Lorentz. Πράγματι, έχουμε

$$s^2 = x'^\mu\, g_{\mu\nu}\, x'^\nu = \Lambda^\mu{}_\alpha\, x^\alpha\, g_{\mu\nu}\, \Lambda^\nu{}_\beta\, x^\beta = x^\alpha \left(\Lambda^\mu{}_\alpha g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\beta\right) x^\beta\,,$$

που θα πρέπει να είναι ίσο με $s^2 = x^\alpha\, g_{\alpha\beta}\, x^\beta$ και, επομένως,

$$\Lambda^\mu{}_\alpha\, g_{\mu\nu}\, \Lambda^\nu{}_\beta = g_{\alpha\beta}\,. \tag{30}$$

Είναι απλό να επαληθευθεί αυτή η ιδιότητα στην ειδική περίπτωση του μετασχηματισμού Lorentz ταχύτητας $\hat{x}V$ που θεωρήσαμε πιο πάνω.

Σε αντίθεση με τον συνηθισμένο τρισδιάστατο ευκλείδιο χώρο, εκφρασμένο ως συνήθως ως προς ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων, στον χώρο Minkowski υπάρχει και η εναλλακτική αναπαράσταση ενός γεγονότος ως ενός *συναλλοίωτου τετρανύσματος* (covariant four-vector)

$$x_\mu \,=\, \left\{ \begin{array}{c} x_0 \,\equiv\, c\,t \\ \\ x_i \,=\, \left\{ \begin{array}{l} x_1 \,=\, -x \\ x_2 \,=\, -y \\ x_3 \,=\, -z \end{array} \right. \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \; x_\mu \,=\, \left(\begin{array}{c} ct \\ -x \\ -y \\ -z \end{array} \right) . \tag{31}$$

Ένα συναλλοίωτο τετράνυσμα συμβολίζεται πάντοτε με τον δείκτη *κάτω* και οι χωροειδείς του συνιστώσες διαφέρουν ως προς το πρόσημο από τις αντίστοιχες ανταλλοίωτες συνιστώς, ενώ οι χρονοειδείς συνιστώσες είναι ίσες.

Οι συναλλοιώτες και ανταλλοίωτες συντεταγμένες ενός τετρανύσματος συνδέονται απλά μέσω του μετρικού τανυστή ως εξής

$$x_\mu \,=\, g_{\mu\nu}\, x^\nu \,. \tag{32}$$

Με την χρήση των συναλλοίωτων συνιστωσών μπορούμε να έχουμε και την ακόλουθη έκφραση για το μήκος

$$s^2 \,=\, x_\mu\, x^\mu \,. \tag{33}$$

Πώς μετασχηματίζεται κατά Lorentz ένα συναλλοίωτο τετράνυσμα x_μ*;* Είναι φανερό ότι, εφόσον το ανταλλοίωτο τετράνυσμα x^μ μετασχηματίζεται μέσω του πίνακα $\Lambda^\alpha_{\ \beta}$, ο τύπος $s^2 = x^\mu x_\mu$ για το μήκος επιβάλλει ότι το τετράνυσμα x_μ θα πρέπει να μετασχηματίζεται μέσω του *αντιστρόφου πίνακα* $\left(\Lambda^{-1}\right)_\beta^{\ \alpha}$

$$x'_\mu \,=\, \left(\Lambda^{-1}\right)_\mu^{\ \nu}\, x_\nu \,, \tag{34}$$

όπου ο *αντίστροφος μετασχηματισμός Lorentz* ορίζεται ως

$$\left(\Lambda^{-1}\right)_\mu^{\ \rho}\, \Lambda^\nu_{\ \rho} \,=\, \delta^\nu_\mu, \qquad \left(\Lambda^{-1}\right)_\mu^{\ \rho}\, \Lambda^\mu_{\ \sigma} \,=\, \delta^\rho_\sigma \,. \tag{35}$$

Αξίζει να επαληθεύσουμε ότι, πράγματι, το s^2 είναι αναλλοίωτο. Πράγματι, έχουμε

$$x'_\mu\, x'^\mu \,=\, \left(\Lambda^{-1}\right)_\mu^{\ \rho} x_\rho\, \Lambda^\mu_{\ \sigma} x^\sigma \,=\, \left(\left(\Lambda^{-1}\right)_\mu^{\ \rho} \Lambda^\mu_{\ \sigma} \right) x_\rho x^\sigma \,=\, \delta^\rho_\sigma x_\rho x^\sigma \,=\, x_\rho x^\rho \,.$$

Η έννοια του τετρανύσματος δεν περιορίζεται μόνο στο τετράνυσμα της θέσης x^μ. *Μια οποιαδήποτε διανυσματική συνάρτηση* $\mathcal{A}^\mu(x)$, *η οποία μετασχηματίζεται κατά Lorentz ως*

$$\mathcal{A}'^\mu(x') = \Lambda^\mu_{\ \nu}\, \mathcal{A}^\nu(x) \tag{36}$$

είναι-εξ ορισμού, ανταλλοίωτο τετράνυσμα.

Με παρόμοιο τρόπο ορίζεται ένα *συναλλοίωτο τετράνυσμα* $\mathcal{A}_\mu(x) = g_{\mu\nu}\mathcal{A}^\nu(x)$. Οι χρονοειδείς συνιστώσες ενός συναλλοίωτου τετρανύσματος είναι ίσες με τις αντίστοιχες ανταλλοίωτες ενώ οι χωροειδείς διαφέρουν κατά το πρόσημο

$$\mathcal{A}_0(x) = \mathcal{A}^0(x), \quad \mathcal{A}_i(x) = -\mathcal{A}^i(x)\,. \tag{37}$$

Ένα συναλλοίωτο τετράνυσμα μετασχηματίζεται με τον αντίστροφο μετασχηματισμό Lorentz

$$\mathcal{A}'_\mu(x') = \left(\Lambda^{-1}\right)_\mu^{\ \nu}\, \mathcal{A}_\nu(x)\,. \tag{38}$$

Τα τετρανύσματα είναι μια ειδική περίπτωση μιας γενικότερης έννοιας, της έννοιας του *τανυστή*. *Μια συνάρτηση* $\mathcal{T}^{\mu\nu\dots}_{\alpha\beta\dots}$ *που μετασχηματίζεται ως*

$$\mathcal{T}'^{\mu\nu\dots}_{\alpha\beta\dots}(x') = \Lambda^\mu_{\ \mu'}\,\Lambda^\nu_{\ \nu'}\,\cdots\left(\Lambda^{-1}\right)_\alpha^{\ \alpha'}\left(\Lambda^{-1}\right)_\beta^{\ \beta'}\cdots\,\mathcal{T}^{\mu'\nu'\dots}_{\alpha'\beta'\dots}(x) \tag{39}$$

ονομάζεται τανυστής. Ειδικότερα ονομάζεται «ανταλλοίωτος τάξης n *και συναλλοίωτος τάξης* n'*», όπου* n *είναι ο αριθμός των άνω δεικτών και* n' *ο αντίστοιχος των κάτω.* Έχουμε ήδη συναντήσει ένα συναλλοίωτο τανυστή δεύτερης τάξης, τον (σταθερό) μετρικό τανυστή $g_{\mu\nu}$. Μια ακραία ειδική περίπτωση τανυστή είναι ο τανυστής χωρίς καθόλου δείκτες $\mathcal{S}(x)$, ο οποίος ονομάζεται *βαθμωτό* μέγεθος και, σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, θα πρέπει να είναι αναλλοίωτος σε κάθε σύστημα αναφοράς

$$\mathcal{S}'(x') = \mathcal{S}(x)\,. \tag{40}$$

Εκτός από τον μετρικό τανυστή $g_{\mu\nu}$, άλλοι σταθεροί τανυστές του χώρου Minkowsi είναι ο ανταλλοίωτος τανυστής δεύτερης τάξης $g^{\mu\nu}$ που είναι ο αντίστροφος του μετρικού τανυστή ($g_{\mu\nu}\, g^{\nu\rho} = \delta^\rho_\mu$) και παριστάνεται από τον ίδιο διαγώνιο πίνακα. Άλλο παράδειγμα είναι ο *μεικτός* τανυστής Kronecker δ^ν_μ. Τέλος, ιδιαιτέρως χρήσιμος είναι ο *πλήρως αντισυμμετρικός τανυστής τέταρτης τάξης* $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$, ο οποίος έχει την ιδιότητα να αλλάζει πρόσημο σε κάθε εναλλαγή δύο διαδοχικών δεικτών. Λόγω της ιδιότητας αυτής κάθε στοιχείο με δύο ίδιους δείκτες μηδενίζεται. Τα μη-μηδενικά στοιχεία έχουν την τιμή ± 1 με σημείο αναφοράς το στοιχείο $\epsilon^{0123} = +1$. Με την βοήθεια του μετρικού τανυστή και του αντιστρόφου του μπορούμε να ορίσουμε και συναλλοίωτο ή μεικτό πλήρως αντισυμμετρικό τανυστή

$$\epsilon_{\mu}{}^{\nu\rho\sigma} \,=\, g_{\mu\mu'}\,\epsilon^{\mu'\nu\rho\sigma}, \,\ldots\,\ldots\,\, \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \,=\, g_{\mu\mu'}g_{\nu\nu'}g_{\rho\rho'}g_{\sigma\sigma'}\,\epsilon^{\mu'\nu'\rho'\sigma'}\,.$$

Εκτός από τους συνεχείς μετασχηματισμούς Lorentz $\Lambda^{\mu}_{\ \nu}$ οι οποίοι, εν γένει, εξαρτώνται από έξη παραμέτρους, υπάρχουν και *Διάκριτοι Μετασχηματισμοί Lorentz*, οι οποίοι δεν εξαρτώνται από κάποια συνεχή παράμετρο. Μετασχηματισμοί τέτοιου είδους είναι ο *Χωρικός Κατοπτρισμός (Parity)* Λ_P και η *Αναστροφή Χρόνου* Λ_T

$$\Lambda_P \,=\, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_T \,=\, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (41)$$

Η δράση των μετασχηματισμών αυτών είναι αυτή που καθορίζεται με το όνομά τους. Πράγματι, έχουμε

$$x'^{\mu} \,=\, (\Lambda_P)^{\mu}_{\ \nu}x^{\nu} \,=\, \begin{pmatrix} x^0 \\ -x^i \end{pmatrix}, \quad x'^{\mu} \,=\, (\Lambda_T)^{\mu}_{\ \nu}x^{\nu} \,=\, \begin{pmatrix} -x^0 \\ x^i \end{pmatrix}.$$

Από την σχέση ορισμού των μετασχηματισμών Lorentz $\Lambda\, g\, \Lambda^{\perp} \,=\, g$ μπορούμε αμέσως να δούμε ότι

$$det(\Lambda) \,=\, \pm 1\,. \qquad (42)$$

Με βάση την ιδιότητα αυτή οι μετασχηματισμοί Lorentz χωρίζονται σε δύο κατηγορίες: στους μετασχηματισμούς που έχουν ορίζουσα $+1$, όπως οι συνεχείς μετασχηματισμοί που θεωρήσαμε αρχικά, και σε όσους έχουν ορίζουσα -1, όπως οι ανωτέρω διάκριτοι μετασχηματισμοί. Οι πρώτοι ονομάζονται *κανονικοί (proper)*, ενώ οι δεύτεροι *μη-κανονικοί (improper)*.

Μια ποσότητα η οποία κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz μετασχηματίζεται ως

$$\Delta'_{\mu\nu\ldots} \,=\, det(\Lambda)\,(\Lambda^{-1})^{\rho}_{\mu}\,(\Lambda^{-1})^{\sigma}_{\nu}\ldots\,\Delta_{\rho\sigma\ldots} \qquad (43)$$

ονομάζεται *ττανυστική πυκνότητα ή ψευδοτανυστής*. Χαρακτηριστικό παράδειγμα ψευδοτανυστή αποτελει ο πληρως αντισυμμετρικός τανυστής $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$. Για κάθε τανυστή δεύτερης τάξης $\mathcal{T}_{\mu\nu}$ ή $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ μπορούμε, με την βοήθεια του πλήρως αντισυμμετρικού τανυστή, να ορίσου ένα ψευδοτανυστή δεύτερης τάξης

$$\tilde{\mathcal{T}}^{\mu\nu} \,\equiv\, \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\mathcal{T}_{\rho\sigma}, \quad \tilde{\mathcal{T}}_{\mu\nu} \,\equiv\, \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,\mathcal{T}^{\rho\sigma}\,. \qquad (44)$$

Ο τανυστής $\tilde{\mathcal{T}}^{\mu\nu}$ ή $\tilde{\mathcal{T}}_{\mu\nu}$ ονομάζεται *δυϊκός τανυστής* του $\mathcal{T}_{\mu\nu}$ ή του $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ αντίστοιχα.

5. Η Έννοια της Συμμεταβλητότητας (Covariance).

Η Αρχή της Σχετικότητας υπαγορεύει την ισχύ των ίδιων φυσικών νόμων σε κάθε αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Οι νόμοι αυτοί, εκφραζόμενοι ως σχέσεις μεταξύ φυσικών ποσοτήτων, θα πρέπει να διατηρούν την μορφή τους. Προϋπόθεση για να μπορεί να συμβαίνει κάτι τέτοιο είναι οι διάφορες φυσικές ποσότητες να έχουν καλώς ορισμένο τρόπο μετασχηματισμού κατά Lorentz ή, ισοδύναμα, να είναι τανυστές. Τότε, οι διάφοροι φυσικοί νόμοι γραμμένοι αποκλειστικά συναρτήσει τανυστών διατηρούν την μορφή τους σε κάθε σύστημα αναφοράς. Η ιδιότητα αυτή λέγεται *Συμμεταβλητότητα (Covariance)*. Επί παραδείγματι, μια σχέση της μορφής

$$\mathcal{A}'^{\mu\nu}\,\mathcal{B}'_{\nu} \,=\, \mathcal{C}'^{\mu}$$

δίνει

$$\Lambda^{\mu}_{\ \alpha}\,\Lambda^{\nu}_{\ \beta}\,\left(\Lambda^{-1}\right)_{\nu}^{\ \gamma}\,\mathcal{A}^{\alpha\beta}\,\mathcal{B}_{\gamma} \,=\, \Lambda^{\mu}_{\ \delta}\mathcal{C}^{\delta}$$

ή

$$\Lambda^{\mu}_{\ \alpha}\,\delta^{\gamma}_{\beta}\,\mathcal{A}^{\alpha\beta}\,\mathcal{B}_{\gamma} \,=\, \Lambda^{\mu}_{\ \delta}\mathcal{C}^{\delta} \implies \Lambda^{\mu}_{\ \alpha}\,\mathcal{A}^{\alpha\gamma}\,\mathcal{B}_{\gamma} \,=\, \Lambda^{\mu}_{\ \delta}\mathcal{C}^{\delta}$$

ή

$$\Lambda^{\mu}_{\ \alpha}\,\left(\mathcal{A}^{\alpha\gamma}\,\mathcal{B}_{\gamma}\, - \mathcal{C}^{\alpha}\right) \,=\, 0 \implies \mathcal{A}^{\alpha\gamma}\,\mathcal{B}_{\gamma} \,=\, \mathcal{C}^{\alpha}\,.$$

Επομένως, η περιγραφή ενός φυσικού συστήματος απολειστικά μέσω φυσικών μεγεθών τα οποία έχουν συγκεκριμένη ταυτότητα κατά Lorentz (βαθμωτά, τετρανύσματα, τανυστές ανώτερης τάξης,.... κλπ.) εξασφαλίζει αυτόματα την ισχύ της Αρχής της Σχετικότητας. Μια τέτοια περιγραφή ονομάζεται *εκπεφρασμένα συμμεταβλητή ή συναλλοίωτη (manifestly covariant)*.

Κανόνες του Συναλλοίωτου Φορμαλισμού. Η ορθή διαχείριση συμμεταβλητών ποσοτήτων συνοδεύεται από κάποιους (προφανείς) κανόνες.

1) *Ένας επαναλαμβανόμενος άνω και κάτω δείκτης νοείται αθροιζόμενος. Τέτοιοι αθροιζόμενοι δείκτες ονομάζονται «βουβοί» σε αντίθεση με τους υπολοίπους που ονομάζονται ελεύθεροι. Επί παραδείγματι, η ποσότητα $A^{\mu}_{\ \mu}$ έχει ένα αθροιζόμενο βουβό δείκτη και κανένα ελεύθερο και, συνεπώς, είναι ένα βαθμωτό μέγεθος. Το σύμβολο που χρησιμοποιείται για ένα βουβό δείκτη είναι άνευ σημασίας, δηλαδή, ισχύει $A^{\mu}_{\ \mu} = A^{\nu}_{\ \nu}$.*

2) *Κάθε διαφορετικός όρος ενός αθροίσματος θα πρέπει να έχει ακριβώς τον ίδιο χαρακτήρα Lorentz με τον ίδιο αριθμό δεικτών, στην ίδια θέση και με τα ίδια σύμβολα. Επί παραδείγματι,*

$$A^{\mu} \,+\, C^{\mu}_{\ \alpha}\,B^{\alpha} \,+\, D^{\mu\beta}_{\beta}\,.$$

Αντιθέτως, οι εκφράσεις

$$A^{\mu} \,+\, B_{\mu}$$

ή

$$A^\mu + C^{\nu\alpha}_{\ \ \alpha}$$

είναι λανθασμένες.

3) *Κάθε φυσικός νόμος ανάγεται πάντα σε μια από τις ακόλουθες μορφές*

$$\mathcal{S} = 0\,, \quad \mathcal{V}^\mu = 0\,, \quad \mathcal{V}_\mu = 0$$

$$\mathcal{T}_{\mu\nu} = 0, \;\; \mathcal{T}^\mu_\nu = 0, \;\; \mathcal{T}_\mu^{\ \nu} = 0, \;\; \mathcal{T}^{\mu\nu} = 0$$

$$\mathcal{T}^{\mu\nu\cdots} = \ldots = 0\,.$$

6. Συμμεταβλητή Διατύπωση της Μηχανικής. Ως εφαρμογή της περιγραφής ενός συστήματος συναρτήσει τανυστικών ποσοτήτων θα θεωρήσουμε ένα σημειακό σωματίδιο μάζας m. Η μάζα ενός σωματιδίου είναι μια σταθερή ποσότητα. Πολλές φορές χρησιμοποιείται ο παραπλαντικός όρος «μάζα ηρεμίας», ο οποίος, για μας, ταυτίζεται με τον όρο «μάζα».

Μια απειροστή μετατόπιση του σωματιδίου στον χώρο Minkowski περιγράφεται με το διαφορικό dx^μ. Η *τετραταχύτητα* του σωματιδίου ορίζεται ως

$$u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau}\,, \tag{45}$$

όπου $d\tau = ds/c$ είναι ο *ιδιοχρόνος* του σωματιδίου. Η χρονική συνιστώσα της τετραταχύτητας είναι

$$u^0 = c\frac{dt}{d\tau} = c^2\frac{dt}{ds} = c^2\frac{dt}{\sqrt{c^2dt^2 - (d\vec{x})^2}} = \frac{c^2}{\sqrt{c^2 - (\dot{\vec{x}})^2}} = \frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,,$$

όπου $\vec{v} = \dot{\vec{x}}$ είναι η συνήθης ταχύτητα. Μπορούμε να γράψουμε

$$u^0 = c\,\gamma(v)\,, \tag{46}$$

όπου εξ ορισμού $\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$. Οι χωρικές συνιστώσες της τετραταχύτητας είναι

$$u^i = \frac{dx^i}{d\tau} = \frac{dx^i}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma(v)\,v_i\,. \tag{47}$$

Τελικά, έχουμε

$$u^\mu = \gamma\,(c,\ \vec{v})\,. \tag{48}$$

Σημειώστε την ενδιαφέρουσα ιδιότητα

$$u^2 = u^\mu\,u_\mu = \gamma^2\left(c^2 - v^2\right) = c^2\,. \tag{49}$$

Η *τετραορμή* του σωματιδίου ορίζεται ως το γινόμενο της τετραταχύτητας επί την μάζα του σωματιδίου

$$p^\mu \equiv m\, u^\mu = m\, \gamma\, (c, \vec{v}) \,. \tag{50}$$

Σημειώστε ότι η χρονοειδής συνιστώσα

$$p^0 \equiv \frac{E}{c} = \frac{mc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{51}$$

ταυτίζεται με την ενέργεια του σωματιδίου διαιρεμενη με την σταθερά c. Αυτό φαίνεται ακόμα καλύτερα αν αναπτύξουμε ως προς τον (συνήθως μικρό) αριθμό v^2/c^2

$$p^0 c \approx mc^2 + \frac{mv^2}{2} + O(v^4/c^2)\,.$$

Η χωρική συνιστώσα της τετραορμής είναι

$$p^i = \frac{mv_i}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\,. \tag{52}$$

Όπως και το τετράγωνο της τετραταχύτητας έτσι και το τετράγωνο της τετραορμής είναι βαθμωτό μέγεθος

$$p^\mu p_\mu = \frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}\left(m^2c^2 - m^2v^2\right) = m^2c^2\,. \tag{53}$$

Η σχέση αυτή γράφεται

$$p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - (p^i)^2 = m^2c^2 \tag{54}$$

και ταυτίζεται με την περίφημη σχετικιστική σχέση ορμής-ενέργειας

$$E^2 = \vec{p}^2 c^2 + (mc^2)^2\,. \tag{55}$$

Συναλλοίωτη Διατύπωση της Αρχής της Ελάχιστης Δράσης και Εξισώσεις Κίνησης. Οι εξισώσεις κίνησης μπορούν να παραχθούν από την *Αρχή της Ελάχιστης Δράσης* ξεκινώντας από μια κατάλληλη Δράση. Είναι φανερό ότι η Δράση ενός ελευθέρου σωματιδίου θα πρέπει να είναι ένα βαθμωτό μέγεθος ανεξάρτητο από το σύστημα αναφοράς. Το μόνο βαθμωτό μέγεθος αυτού του είδους που έχουμε μέχρι στιγμής εισαγάγει είναι το αναλλοίωτο μήκος ds. Ας αρχίσουμε λοιπόν πολλαπλασιάζοντας το αναλλοίωτο μήκος με μια σταθερά, χαρακτηριστική του σωματιδίου, ώστε η δράση να έχει τις κατάλληλες διαστάσεις και ας γράψουμε

$$\mathcal{S} \,=\, -mc \int_a^b ds\,, \tag{56}$$

όπου a και b είναι ένα *αρχικό* και ένα *τελικό* χωροχρονικό σημείο. Το αναλλοίωτο μήκος γράφεται συναρτήσει της χωροχρονικής μετατόπισης dx^μ ως $ds \,=\, \sqrt{dx^\mu dx_\mu}$. Εάν θεωρήσουμε μια *δυνατή μεταβολή* της τροχιάς δx^μ, η οποία να μηδενίζεται στα ακρικά σημεία $\delta x^\mu(a) \,=\, \delta x^\mu(b) \,=\, 0$, έχουμε

$$\delta\mathcal{S} \,=\, -mc\int \delta(ds) \,=\, -mc\int \frac{1}{\sqrt{dx^\rho dx_\rho}}\,\delta(dx^\mu)dx_\mu$$

$$= -mc\int \delta(dx^\mu)\frac{dx_\mu}{ds} \,=\, -m\int \delta(dx^\mu)\,\frac{dx_\mu}{d\tau}$$

$$= -m\int \delta(dx^\mu)u_\mu \,=\, -m\int d(\delta x^\mu)u_\mu \,=$$

$$-m\int \left(d(\delta x^\mu u_\mu) - \delta x^\mu\, du_\mu\right) \,=\, m\int \delta x^\mu\, du_\mu \,=\, m\int d\tau\,\delta x^\mu\,\frac{du_\mu}{d\tau}\,.$$

Επομένως, έχουμε

$$\delta\mathcal{S} \,=\, 0 \implies m\frac{du^\mu}{d\tau} \,=\, 0\,. \tag{57}$$

Αυτές είναι οι εξισώσεις κίνησης για ένα ελεύθερο σωματίδιο σε συναλλοίωτη μορφή. Ισοδύναμα, μπορούμε να γράψουμε τις εξισώσεις ως

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} \,=\, 0 \;\; \eta' \quad m\,\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} \,=\, 0\,. \tag{58}$$

Η χρονοειδής συνιστώσα αντιστοιχεί στην διατήρηση της ενέργειας

$$\frac{dp^0}{d\tau} \,=\, 0 \implies p^0 \,=\, \frac{E}{c} \,=\, \frac{mc}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \,=\, \sigma\tau\alpha\theta\,, \tag{59}$$

ενώ η χωροειδής αντιστοιχεί στην διατήρηση της ορμής

$$\frac{dp^i}{d\tau} = 0 \Longrightarrow p^i = \frac{mv_i}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \sigma\tau\alpha\theta\,. \tag{60}$$

Και οι δύο αυτές εξισώσεις αντιστοιχούν στην διατήρηση της ταχύτητας του ελευθέρου σωματιδίου.

Ποια είναι η συνάρτηση Lagrange από την οποία απορρέουν αυτές οι εξισώσεις; Μπορούμε να γράψουμε την δράση ως

$$\mathcal{S} = -mc\int dt\left(\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx_\mu}{dt}\right)^{1/2} = -mc^2\int dt\sqrt{1-\left(\frac{dx^i}{cdt}\right)^2}$$

ή

$$\mathcal{S} = \int dt\,L \Longrightarrow L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,. \tag{61}$$

Οι εξισώσεις Lagrange που προκύπτουν είναι

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial x^i} \Longrightarrow m\frac{d}{dt}\left(\frac{v_i}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) = 0 \tag{62}$$

και συμπίπτουν με ότι βρήκαμε πιο πάνω.