ΚΛΑΣΙΚΗ ΗΛΕΚΤΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗ ΙΙ

ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΣΗΜΕΙΩΣΕΩΝ 6

ΣΧΕΤΙΚΙΣΤΙΚΗ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΗΣ ΗΛΕΚΤΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ

1. Το Τετράνυσμα της Πυκνότητας Ηλεκτρικού Ρεύματος.

Σύμφωνα με όσα αναπτύχθηκαν στα προηγούμενα, κάθε φυσική ποσότητα θα πρέπει να έχει συγκεκριμένη ταυτότητα ως προς τον τρόπο μετασχηματισμού της κατά Lorentz. Η τετράδα των ποσοτήτων ρ και $\vec{J}$ δεν μπορεί παρά να εντάσσεται σε ένα τετράνυσμα. Πολλαπλασιάζοντας την πυκνότητα φορτίου με c ώστε να έχει τις ίδιες διαστάσεις με την πυκνότητα ρεύματος, ορίζουμε το ανταλλοίωτο τετράνυσμα

$$\mathcal{J}^\mu \,=\, \left(\rho\, c,\, \vec{J}\right) \,=\, \begin{cases} \mathcal{J}^0 \,=\, \rho\, c \\ \\ \mathcal{J}^i \,=\, \begin{cases} \mathcal{J}^1 = J_x \\ \mathcal{J}^2 = J_y \\ \mathcal{J}^3 = J_z \end{cases} \end{cases} . \tag{1}$$

Ο ειδικός μετασχηματισμός Lorentz που συνδέει τα τετρανύσματα της πυκνότητας ρεύματος $\mathcal{J}^\mu$ και $\mathcal{J}'^\mu$ στα αδρανειακά συστήματα αναφοράς Σ και Σ', εκ των οποίων το δεύτερο κινείται με ταχύτητα $\vec{V} \,=\, \hat{x}V$ ως προς το πρώτο, είναι

$$\begin{aligned} \rho' \,&=\, \gamma\, \left(\rho \,-\, \frac{V}{c^2} J_x\right) \\ J'_x \,&=\, \gamma \left(J_x \,-\, \frac{V}{c}\,\rho\right) \\ J'_y \,&=\, J_y, \quad J'_z \,=\, J_z\,, \end{aligned} \tag{2}$$

όπου $\gamma \,=\, (1 - V^2/c^2)^{-1/2}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Μπορούμε να επαληθεύσουμε την ισχύ αυτού του μετασχηματισμού στην περίπτωση ενός σημειακού φορτίου. Πράγματι, τότε έχουμε από την πρώτη εξίσωση

$$\delta(\vec{r}' \,-\, \vec{r}'_0(t')\,) \,=\, \gamma\, \delta(\vec{r} \,-\, \vec{r}_0(t)\,) \left(1 \,-\, \frac{V}{c^2} v_x\right)\,.$$

Η συνάρτηση δέλτα στο αριστερό μέλος μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\int d^3r'\, \delta(\vec{r}' \,\ldots) \,=\, \int d^3r\, \delta(\vec{r} \,-\, \ldots) \,\Longrightarrow\, \mathcal{J}\, \delta(\vec{r}' \,-\, \ldots) \,=\, \delta(\vec{r} \,-\, \ldots)\,,$$

όπου $\mathcal{J}$ είναι η *Ιακωβιανή*

$$\mathcal{J} \,=\, \left| \frac{\partial(x'_i \,-\, x'_{0i}(t'))}{\partial x_j} \right|\,.$$

Πρέπει επομένως να αποδειχθεί ότι

$$1 \,=\, \mathcal{J}\,\gamma\,\left(1 - \frac{V v_x}{c^2}\right)\,.$$

Η Ιακωβιανή υπολογίζεται ως εξής

$$\mathcal{J} \,=\, \left|\frac{\partial x_i'}{\partial x_j} - \frac{\partial x_{0i}'(t')}{\partial x_j}\right| \,=\, \left|\frac{\partial x_i'}{\partial x_j} - \frac{\partial x_{0i}'}{\partial t'}\,\frac{\partial t'}{\partial x_j}\right| \,=\, \left|\frac{\partial x_i'}{\partial x_j} - v_i'\,\frac{\partial t'}{\partial x_j}\right|\,.$$

Συγκεκριμένα, δεδομένου ότι $t'(t,\,x)$, έχουμε

$$\mathcal{J} \,=\, \begin{vmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} - v_x'\frac{\partial t'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial y} & \frac{\partial x'}{\partial z} \\ \frac{\partial y'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial y} & \frac{\partial y'}{\partial z} \\ \frac{\partial z'}{\partial x} & \frac{\partial z'}{\partial y} & \frac{\partial z'}{\partial z} \end{vmatrix} \,=\, \begin{vmatrix} \gamma + v_x'\gamma\frac{V}{c^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \,=\, \gamma\,\left(1 + \frac{v_x'V}{c^2}\right)\,.$$

Επιστρέφοντας στην αποδεικτέα σχέση έχουμε

$$1 \,=\, \gamma\,\left(1 + \frac{v_x'V}{c^2}\right)\,\gamma\,\left(1 - \frac{V v_x}{c^2}\right)$$

ή

$$1 \,=\, \gamma^2\,\left(1 + \frac{(v_x - V)}{\left(1 - \frac{v_x V}{c^2}\right)}\,\frac{V}{c^2}\right)\,\left(1 - \frac{V v_x}{c^2}\right) \,=\, \gamma^2\,\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \,=\, 1\,.$$

Ανάλογα αποδεικνύονται και οι υπόλοιπες σχέσεις μετασχηματισμού.

Η εξίσωση συνέχειας μπορεί να γραφτει σε συναλλοίωτη μορφή συναρτήσει του τετρανύσματος $\mathcal{J}^\mu$. Έχουμε

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial J_i}{\partial x^i} \,=\, 0$$

ή

$$\frac{\partial(c\rho)}{\partial(ct)} + \frac{\partial J_i}{\partial x^i} \,=\, \frac{\partial\mathcal{J}^0}{\partial x^0} + \frac{\partial\mathcal{J}^i}{\partial x^i} \,=\, 0$$

ή

$$\frac{\partial\mathcal{J}^\mu}{\partial x^\mu} \,=\, 0\,. \tag{3}$$

Το ηλεκτρικό φορτίο είναι ποσότητα ανεξάρτητη από το σύστημα αναφοράς. Αυτό μπορούμε να το αποδείξουμε ως εξής:

Έστω Q το φορτίο μιας κατανομής στο σύστημα ηρεμίας ($\vec{J} = 0$). Έστω και ένα σύστημα αναφοράς το οποίο κινείται με ταχύτητα $\vec{V} \,=\, \hat{x}V$. Έχουμε

$$Q \,=\, \int d^3r\,\rho \,=\, \int d^3r\,\left(\rho - \frac{V}{c^2}J_x\right) \,=\, \int d^3r\,\rho'\,\gamma^{-1} \,=\, \gamma^{-1}\int d^3r'\,\left|\frac{\partial x_i}{\partial x_j'}\right|\,\rho'\,.$$

Η εμφανιζόμενη Ιακωβιανή είναι

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x'} & \frac{\partial x}{\partial y'} & \frac{\partial x}{\partial z'} \\ \\ \frac{\partial y}{\partial x'} & \frac{\partial y}{\partial y'} & \frac{\partial y}{\partial z'} \\ \\ \frac{\partial z}{\partial x'} & \frac{\partial z}{\partial y'} & \frac{\partial z}{\partial z'} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \gamma\,.$$

Συνεπώς, έχουμε

$$Q \,=\, \gamma^{-1} \int d^3r'\, \gamma\, \rho' \,=\, \int d^3r'\, \rho' \,=\, Q'\,.$$

2. Το Τετράνυσμα του Δυναμικού και ο Ηλεκτρομαγνητικός Τανυστής.

Η τετράδα των δυναμικών ϕ και $\vec{A}$, εφόσον αυτά αποτελούν φυσικές ποσότητες, θα πρέπει να έχει συγκεκριμένη ταυτότητα ως προς τους μετασχηματισμούς Lorentz, δηλαδή να μετασχηματίζεται με συγκεκριμένο τρόπο από ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς σε ένα άλλο. Ξεκινώντας με την εύλογη υπόθεση ότι τα δυναμικά αντιστοιχούν σε ένα ανταλλοίωτο τετράνυσμα του χώρου Minkowski, γράφουμε

$$\mathcal{A}^\mu \,=\, \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{A}^0 \,\equiv\, \phi \\ \\ \mathcal{A}^i \,=\, \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A}^1 \,\equiv\, c\,A_x \\ \mathcal{A}^2 \,\equiv\, c\,A_y \\ \mathcal{A}^3 \,\equiv\, c\,A_z \end{array} \right. \end{array} \right. \tag{4}$$

Το αντίστοιχο συναλλοίωτο τετράνυσμα θα είναι $\mathcal{A}_\mu \,=\, \left(\phi,\, -c\vec{A}\right)$.

Ας θεωρήσουμε τις εξισώσεις που ικανοποιούν τα δυναμικά ϕ και $\vec{A}$ και ας τα αντικαταστήσουμε με τις αντίστοιχες τετρανυσματικές συνιστώσες. Παίρνουμε

$$-\nabla^2\phi \,-\, \vec{\nabla}\cdot\dot{\vec{A}} \,=\, \rho/\epsilon_0 \;\Longrightarrow\; -\frac{\partial^2\mathcal{A}^0}{\partial x^k \partial x^k} \,-\, \frac{\partial^2\mathcal{A}^k}{\partial x^0 \partial x^k} \,=\, \frac{\mathcal{J}^0}{c\epsilon_0}$$

$$\underbrace{-\nabla^2\vec{A} \,+\, \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) \,+\, \frac{1}{c^2}\ddot{\vec{A}} \,+\, \vec{\nabla}\dot{\phi} \,=\, \mu_0\vec{J}}$$

$$\Downarrow$$

$$-\frac{\partial^2\mathcal{A}^i}{\partial x^k \partial x^k} \,+\, \frac{\partial^2\mathcal{A}^k}{\partial x^k \partial x_i} \,+\, \frac{\partial^2\mathcal{A}^i}{\partial x^0 \partial x^0} \,+\, \frac{\partial^2\mathcal{A}^0}{\partial x_i \partial x^0} \,=\, \mu_0 c\mathcal{J}^i\,.$$

Συνεχίζοντας, μπορούμε να φέρουμε την πρώτη εξίσωση στην μορφή

$$\frac{\partial^2 \mathcal{A}^0}{\partial x^\nu \partial x_\nu} - \frac{\partial^2 \mathcal{A}^\nu}{\partial x^\nu \partial x_0} = \frac{\mathcal{J}^0}{c\epsilon_0}\,. \tag{5}$$

Η δεύτερη εξίσωση γίνεται

$$\frac{\partial^2 \mathcal{A}^i}{\partial x^\nu \partial x_\nu} - \frac{\partial^2 \mathcal{A}^\nu}{\partial x^\nu \partial x_i} = \mu_0 c \mathcal{J}^i\,. \tag{6}$$

Ο εμφανιζόμενος διαφορικός τελεστής

$$\partial^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x_\mu} = \frac{\partial^2}{\partial x^0 \partial x^0} - \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^k} \tag{7}$$

ονομάζεται *τελεστής D'Alembert* και είναι ένας *βαθμωτός τελεστής*, δηλαδή, αναλλοίωτος σε μετασχηματισμούς Lorentz. Είναι φανερό ότι οι εξισώσεις $(5, 6)$ αποτελούν το χρονοειδές και χωροειδές μέρος μιας τετρανυσματικής εξίσωσης

$$\frac{\partial^2 \mathcal{A}^\mu}{\partial x^\nu \partial x_\nu} - \frac{\partial^2 \mathcal{A}^\nu}{\partial x^\nu \partial x_\mu} = \frac{\mathcal{J}^\mu}{c\epsilon_0}\,. \tag{8}$$

Έχει αναφερθεί σε προηγούμενο κεφάλαιο ότι η συνθήκη της βαθμίδας Lorentz είναι αναλλοίωτη κατά Lorentz. Πράγματι, έχουμε

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad \Longrightarrow \frac{\partial \mathcal{A}^i}{\partial x^i} + \frac{\partial \mathcal{A}^0}{\partial x^0} = 0$$

ή

$$\frac{\partial \mathcal{A}^\mu}{\partial x^\mu} = 0\,. \tag{9}$$

Αυτή είναι η συνθήκη της βαθμίδας Lorentz σε συναλλοίωτη μορφή. Επιβάλλοντας την συνθήκη Lorentz, η εξίσωση του δυναμικού απλουστεύεται ως εξής

$$\frac{\partial^2 \mathcal{A}^\mu}{\partial x^\nu \partial x_\nu} = \frac{\mathcal{J}^\mu}{c\epsilon_0} \tag{10}$$

ή, πιο συντομογραφικά,

$$\partial^2 \mathcal{A}^\mu = \frac{\mathcal{J}^\mu}{c\epsilon_0}\,. \tag{11}$$

Ο ειδικός μετασχηματισμός Lorentz που συνδέει τα δυναμικά μεταξύ δύο αδρανειακών συστημάτων με σχετική ταχύτητα $\vec{V} = \hat{x}V$ είναι

$$\begin{cases} \phi' = \gamma\,(\phi - V\,A_x) \\ \\ A_x' = \gamma\left(A_x - \frac{V}{c^2}\phi\right) \\ \\ A_y' = A_y,\ A_z' = A_z \end{cases} \tag{12}$$

ή σε μορφή πίνακα $\mathcal{A}'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, \mathcal{A}^{\nu}$

$$\begin{pmatrix} \phi' \\ cA'_x \\ cA'_y \\ cA'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\, V/c & 0 & 0 \\ -\gamma\, V/c & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ cA_x \\ cA_y \\ cA_z \end{pmatrix} . \tag{13}$$

Ας επιστρέψουμε στις σχέσεις δυναμικών και πεδίων και ας τις γράψουμε συναρτήσει του τετρασνυσματικού δυναμικού

$$\begin{cases} E_i = -\nabla_i \phi - \frac{\partial A_i}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{A}^0}{\partial x^i} - \frac{\partial \mathcal{A}^i}{\partial x^0} = \frac{\partial \mathcal{A}_i}{\partial x^0} - \frac{\partial \mathcal{A}_0}{\partial x^i} \\ \\ B_i = \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right)_i = \frac{1}{c}\epsilon_{ijk}\frac{\partial \mathcal{A}^k}{\partial x^j} = -\frac{1}{2c}\epsilon_{ijk}\left(\frac{\partial \mathcal{A}_k}{\partial x^j} - \frac{\partial \mathcal{A}_j}{\partial x^k}\right) \end{cases} \tag{14}$$

Παρατηρούμε ότι και στις δύο εκφράσεις εμφανίζονται οι συνιστώσες του ίδιου τανυστή δεύτερης τάξης

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial \mathcal{A}_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \mathcal{A}_\mu}{\partial x^\nu} . \tag{15}$$

Ο τανυστής αυτός ονομάζεται *Ηλεκτρομαγνητικός Τανυστής* και είναι εκ κατασκευής *αντισυμμετρικός*, δηλδή ισχύει

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = -\mathcal{F}_{\nu\mu} . \tag{16}$$

Οι σχέσεις των πεδίων με τις συνιστώσες του είναι

$$E_i = \mathcal{F}_{0i}, \quad B_i = -\frac{1}{2c}\epsilon_{ijk}\mathcal{F}_{jk} . \tag{17}$$

Η τελευταία σχέση αντιστρέφεται ως εξής

$$\mathcal{F}_{ij} = -c\epsilon_{ijk}B_k . \tag{18}$$

Ο ηλεκτρομαγνητικός τανυστής γράφεται σε μορφή πίνακα ως εξής

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -cB_z & cB_y \\ -E_y & cB_z & 0 & -cB_x \\ -E_z & -cB_y & cB_x & 0 \end{pmatrix} . \tag{19}$$

Ο αντίστοιχος πλήρως ανταλλοίωτος τανυστής $\mathcal{F}^{\mu\nu}$ είναι

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -cB_z & cB_y \\ E_y & cB_z & 0 & -cB_x \\ E_z & -cB_y & cB_x & 0 \end{pmatrix} . \tag{20}$$

3. Συναλλοίωτη Διατύπωση των Εξισώσεων Maxwell.

Όπως είδαμε στα προηγούμενα εδάφια οι δύο μη-ομογενείς εξισώσεις Maxwell γράφονται συναρτήσει του τετρανυσματικού δυναμικού ως

$$\frac{\partial^2 \mathcal{A}_\mu}{\partial x^\nu \partial x_\nu} - \frac{\partial^2 \mathcal{A}_\nu}{\partial x_\nu \partial x^\mu} = \frac{\mathcal{J}_\mu}{c\epsilon_0}$$

ή

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial \mathcal{A}_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \mathcal{A}_\nu}{\partial x^\mu} \right) = \frac{\mathcal{J}_\mu}{c\epsilon_0} .$$

Αυτό γράφεται συναρτήσει του ηλεκτρομαγνητικού τανυστή ως

$$\frac{\partial \mathcal{F}_{\nu\mu}}{\partial x_\nu} = \frac{\mathcal{J}_\mu}{c\epsilon_0} . \tag{21}$$

Οι ομογενείς εξισώσεις Maxwell μπορούν επίσης να γραφτούν συναρτήσει του ηλεκτρομαγνητικού τανυστή. Ας αρχίσουμε από την ποσότητα

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\frac{\partial \mathcal{F}_{\rho\sigma}}{\partial x^\nu} = \begin{cases} \epsilon^{0nrs}\frac{\partial \mathcal{F}_{rs}}{\partial x^n} = \epsilon_{nrs}\frac{\partial \mathcal{F}_{rs}}{\partial x^n} \\ \epsilon^{i\nu\rho\sigma}\frac{\partial \mathcal{F}_{\rho\sigma}}{\partial x^\nu} = \epsilon_{i0rs}\frac{\partial \mathcal{F}_{rs}}{\partial x^0} + \epsilon^{in\rho\sigma}\frac{\partial \mathcal{F}_{\rho\sigma}}{\partial x^n} = -\epsilon_{irs}\frac{\partial \mathcal{F}_{rs}}{\partial x^0} + \epsilon_{ins}\frac{\partial \mathcal{F}_{0s}}{\partial x^n} - \epsilon_{inr}\frac{\partial \mathcal{F}_{r0}}{\partial x^n} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2c\vec{\nabla}\cdot\vec{B} \\ 2\frac{\partial B_i}{\partial t} + 2(\vec{\nabla}\times\vec{E})_i \end{cases}$$

Χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\epsilon^{0ijk} = \epsilon_{ijk}$. Επομένως, έχουμε

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\frac{\partial \mathcal{F}_{\rho\sigma}}{\partial x^\nu} = 0 \tag{22}$$

Το ζεύγος των τετρανυσματικών εξισώσεων

$$\frac{\partial \mathcal{F}_{\nu\mu}}{\partial x_\nu} \,=\, \frac{\mathcal{J}_\mu}{c\epsilon_0}, \qquad \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\frac{\partial \mathcal{F}_{\rho\sigma}}{\partial x^\nu} \,=\, 0 \tag{23}$$

αποτελούν και την συναλλοίωτη διατύπωση των εξισώσεων του Maxwell. Είναι φανερό ότι η ομογενής εξίσωση ικανοποιείται ταυτοτικά εάν χρησιμοποιήσουμε την έκφραση που ορίζει το ηλεκτρομαγνητικό τανυστή συναρτήσει του τετρανυσματικού δυναμικού. Η εξίσωση αυτή, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του πλήρως αντισυμμετρικού συμβόλου και το γεγονός ότι ο ηλεκτρομαγνητικός τανυστής είναι αντισυμμετρικός, γράφεται ως

$$\frac{\partial \mathcal{F}_{\nu\rho}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial \mathcal{F}_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} + \frac{\partial \mathcal{F}_{\rho\mu}}{\partial x^\nu} \,=\, 0 \tag{24}$$

και ονομάζεται *Ταυτότητα Jacobi*.

Ο τανυστής

$$\tilde{\mathcal{F}}^{\mu\nu} \,=\, \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\mathcal{F}_{\rho\sigma} \tag{25}$$

ο οποίος εμφανίζεται στις εξισώσεις Maxwell, ονομάζεται *Δυϊκός Ηλεκτρομαγνητικός Τανυστής*. Οι συνιστώσες του τανυστή αυτού είναι[1]

$$\tilde{\mathcal{F}}_{0i} \,=\, -\frac{1}{2}\epsilon^{0ijk}\mathcal{F}_{jk} \,=\, -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\left(-c\epsilon_{jk\ell}B_\ell\right) \,=\, \frac{c}{2}\,2\delta_{i\ell}\,B_\ell \,=\, c\,B_i$$

και

$$\tilde{\mathcal{F}}_{ij} \,=\, \frac{1}{2}\epsilon^{ij\mu\nu}\mathcal{F}_{\mu\nu} \,=\, \epsilon^{ij0k}\mathcal{F}_{0k} \,=\, \epsilon_{ijk}\,E_k\,.$$

Συνεπώς, έχουμε

$$\tilde{\mathcal{F}}_{\mu\nu} \,=\, \begin{pmatrix} 0 & cB_x & cB_y & cB_z \\ -cB_x & 0 & E_z & -E_y \\ -cB_y & -E_z & 0 & E_x \\ -cB_x & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Ας σημειωθεί ότι

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} \to \tilde{\mathcal{F}}_{\mu\nu} \iff \begin{cases} \vec{E} \to c\vec{B} \\ c\vec{B} \to -\vec{E} \end{cases} \tag{27}$$

[1] Ισχύουν οι ταυτότητες $\epsilon_{ijk}\epsilon_{\ell mk} \,=\, \delta_{i\ell}\delta_{jm} - \delta_{jm}\delta_{i\ell}$ και $\epsilon_{ijk}\epsilon_{\ell jk} \,=\, 2\delta_{i\ell}\,.$

Σχέσεις Συναλλοίωτων Ποσοτήτων
$\mathcal{J}^0 = c\,\rho, \quad \mathcal{J}^i = J_i,$
$\mathcal{A}^0 = \phi, \;\; \mathcal{A}^i = c\,A_i$
$\mathcal{F}_{0i} = E_i, \;\; \mathcal{F}_{ij} = -c\,\epsilon_{ijk}\,B_k,$
$B_i = -\frac{1}{2c}\epsilon_{ijk}\,\mathcal{F}_{jk}$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Συναλλοίωτη Μορφή των Καθυστερημένων Δυναμικών.
Οι δύο εκφράσεις των καθυστερημένων δυναμικών γράφονται σε ενοποιημένη μορφή ως

$$\mathcal{A}^\mu(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c}\int d^3r'\,\frac{\mathcal{J}^\mu(\vec{r}\,', t_K)}{|\vec{r}\,' - \vec{r}|}\,.$$

Για να προχωρήσουμε προς μια πλήρως συναλλοίωτη έκφραση γράφουμε το ανωτέρω δυναμικό ως εξής:

$$\mathcal{A}^\mu(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c}\int d^3r'\,\frac{1}{|\vec{r}\,' - \vec{r}|}\int dx_0'\,\delta(x_0' - x_0 + |\vec{r}\,' - \vec{r}|)\,\mathcal{J}^\mu(x')$$

ή

$$\mathcal{A}^\mu(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c}\int d^4x'\,\frac{\delta(x_0' - x_0 + |\vec{r}\,' - \vec{r}|)}{|\vec{r}\,' - \vec{r}|}\,\mathcal{J}^\mu(x')\,.$$

Ακολούθως ανατρέχουμε στην ιδιότητα της δέλτα συνάρτησης

$$\delta(f(x)) = \sum_a \frac{\delta(x-a)}{|f'(a)|}\,,$$

όπου $f(a) = 0$. Έχουμε

$$\delta((x'-x)^2) = \delta((x_0'-x_0)^2 - (\vec{r}\,' - \vec{r})^2) = \frac{\delta(x_0' - x_0 + |\vec{r}\,' - \vec{r}|)}{|2(x_0' - x_0)|} + \frac{\delta(x_0' - x_0 - |\vec{r}\,' - \vec{r}|)}{|2(x_0' - x_0)|}$$

$$= \frac{1}{2|\vec{r}\,'-\vec{r}|}\Big(\delta(x_0'-x_0+|\vec{r}\,'-\vec{r}|)\,+\,\delta(x_0'-x_0-|\vec{r}\,'-\vec{r}|)\Big)$$

και

$$2\,\Theta(x_0-x_0')\,\delta((x'-x)^2)\;=\;\frac{\delta(x_0'-x_0+|\vec{r}\,'-\vec{r}|)}{|\vec{r}\,'-\vec{r}|}\,.$$

Τελικά, έχουμε

$$\mathcal{A}^{\mu}(x)\;=\;\frac{1}{2\pi\epsilon_0 c}\int d^4x'\,\Theta(x_0-x_0')\,\delta((x'-x)^2)\,\mathcal{J}^{\mu}(x')\,.$$

Η έκφραση αυτή είναι πλήρως συναλλοίωτη.

4. Μετασχηματισμοί Lorentz ΗΜ Πεδίων.

Ως τανυστής δεύτερης τάξης, ο ηλεκτρομαγνητικός τανυστής μετασχηματίζεται κατά Lorentz ως εξής

$$\mathcal{F}'^{\mu\nu}\;=\;\Lambda^{\mu}_{\rho}\,\Lambda^{\nu}_{\sigma}\,\mathcal{F}^{\rho\sigma} \tag{28}$$

ή, σε μορφή πινάκων,

$$\mathcal{F}'\;=\;\Lambda\,\mathcal{F}\,\Lambda^{\perp}\,. \tag{29}$$

Για την περίπτωση του ειδικού μετασχηματισμού Lorentz η ανωτέρω σχέση είναι

$$\begin{pmatrix} 0 & -E_x' & -E_y' & -E_z' \\ E_x' & 0 & -cB_z' & cB_y' \\ E_y' & cB_z' & 0 & -cB_x' \\ E_z' & -cB_y' & cB_x' & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\,V/c & 0 & 0 \\ -\gamma\,V/c & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -cB_z & cB_y \\ E_y & cB_z & 0 & -cB_x \\ E_z & -cB_y & cB_x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\,V/c & 0 & 0 \\ -\gamma\,V/c & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -\gamma\Big(E_y\,-VB_z\Big) & -\gamma\Big(E_z\,+\,VB_y\Big) \\ E_x & 0 & -c\gamma\Big(B_z\,-\,\frac{V}{c^2}E_y\Big) & c\gamma\Big(B_y\,+\,\frac{V}{c^2}E_z\Big) \\ \gamma\Big(E_y\,-VB_z\Big) & c\gamma\Big(B_z\,-\,\frac{V}{c^2}E_y\Big) & 0 & -cB_x \\ \gamma\Big(E_z\,+\,VB_y\Big) & -c\gamma\Big(B_y\,+\,\frac{V}{c^2}E_z\Big) & cB_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Από τα ανωτέρω συμπεραίνουμε τις σχέσεις μετασχηματισμού

$E'_x = E_x, \quad E'_y = \gamma\left(E_y - VB_z\right), \quad E'_z = \gamma\left(E_z + VB_y\right)$
$B'_x = B_x, \quad B'_y = \gamma\left(B_y + \frac{V}{c^2}E_z\right), \quad B'_z = \gamma\left(B_z - \frac{V}{c^2}E_y\right)$
$\vec{E}_{\|\|}{}' = \vec{E}_{\|\|}, \;\; \vec{E}_{\perp}{}' = \gamma\left(\vec{E}_{\perp} - \vec{V}\times\vec{B}\right)$ $\vec{B}_{\|\|}{}' = \vec{B}_{\|\|}, \;\; \vec{B}_{\perp}{}' = \gamma\left(\vec{B}_{\perp} + \frac{\vec{V}\times\vec{E}}{c^2}\right)$
Μετασχηματισμοί Lorentz

Είναι ενδιαφέρον ότι, όπως προβλέπουν οι παραπάνω σχέσεις, εάν σε ένα αδρανειακό σύστημα έχουμε μηδενικό μαγνητικό πεδίο ($\vec{B} = 0$), σε ένα άλλο σύστημα, κινούμενο με ταχύτητα $\vec{V}$ ως προς αυτό, θα εμφανισθεί μαγνητικό πεδίο

$$\vec{B}\,' = \frac{\gamma}{c^2}\vec{V}\times\vec{E}\,. \tag{30}$$

Επί πλέον, για το ηλεκτρικό πεδίο στο κινούμενο σύστημα έχουμε

$$\hat{V}\cdot\vec{E}\,' = \hat{V}\cdot\vec{E}, \quad \hat{V}\times\vec{E}\,' = \gamma\,\hat{V}\times\vec{E}\,. \tag{31}$$

Αντίστροφα, εάν σε ένα σύστημα υπάρχει μόνο μαγνητικό πεδίο, στο κινούμενο σύστημα θα εμφανισθεί και ηλεκτρικό πεδίο

$$\vec{E}' = -\gamma\,\vec{V}\times\vec{B}\,. \tag{32}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Τα πεδία ενός ομαλά κινουμένου φορτίου. Ας θεωρήσουμε ένα σημειακό φορτίο Q, το οποίο κινείται με σταθερή ταχύτητα $\vec{V} = V\hat{x}$ ως προς ένα «ακίνητο» αδρανειακό σύστημα Σ. Επίσης, έστω Σ' το σύστημα «ηρεμίας» του σωματιδίου. Ως προς το σύστημα αυτό έχουμε απλά μόνο το πεδίο Coulomb

$$\vec{E}\,' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}\,'}{r'^3}$$

και μηδενικό μαγνητικό πεδίο $\vec{B}\,' = 0$. Τα πεδία στο ακίνητο σύστημα θα είναι

$$\vec{E} = E'_x, \;\; E_y = \gamma\, E'_y, \;\; E_z = \gamma\, E'_z$$

$$B_x = 0, \;\; B_y = -\gamma \frac{V}{c^2} E'_z, \quad B'_z = \gamma \frac{V}{c^2} E'_y \,.$$

Συγκεκριμένα, έχουμε

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\, r'^3} \left(x'\hat{x} + \gamma y'\hat{y} + \gamma z'\hat{z} \right)$$

$$\vec{B} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\, r'^3} \frac{\gamma V}{c^2} \left(y'\hat{z} - z'\hat{y} \right) \,.$$

Εκφράζοντας τα πεδία ως προς τις συντεταγμένες του ακίνητου συστήματος παίρνουμε

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \gamma^2} \frac{(\vec{r} - \vec{V}t)}{\left[(x - Vt)^2 + \gamma^{-2}(y^2 + z^2) \right]^{3/2}}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2} \vec{V} \times \vec{E} \,.$$

Το ηλεκτρικό πεδίο μπορεί να γραφτεί και ως εξής:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{R}}{R^3} \frac{\left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right)}{\left[1 - \left(\frac{\hat{R}\times\vec{V}}{c^2} \right)^2 \right]^{3/2}} \,, \tag{33}$$

όπου

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{V}t \,.$$

5. Η Δύναμη Lorentz.

Ποιά είναι η Δράση ενός φορτισμένου σωματιδίου; Ισοδύναμα μπορούμε να ρωτήσουμε, ποιά είναι η εξίσωση κίνησης ενός σωματιδίου υπό την επίδραση ενός ηλεκτρομαγνητικού πεδίου; Ο απλούστερος όρος που μπορούμε να προσθέσουμε στην Δράση του ελευθέρου σωματιδίου ($\mathcal{S}_0 = \int ds$) είναι ένας όρος *γραμμικός* ως προς το ηλεκτρομαγνητικό δυναμικό $\mathcal{A}^\mu$. Δεδομένου όμως ότι ένας τέτοιος όρος θα πρέπει να είναι ένα βαθμωτό κατά Lorentz, θα πρέπει το ανταλλοίωτο τετράνυσμα του δυναμικού να πολλαπλασιαστεί με ένα συναλλοίωτο τετράνυσμα. Το μόνο τέτοιο που διαθέτουμε είναι το τετράνυσμα της θέσης dx_μ. Άρα, η απλούστερη Δράση, με γραμμική αλληλεπίδραση μεταξύ dx_μ και $\mathcal{A}^\mu$, είναι η

$$\mathcal{S} = -mc\int ds \ - \frac{q}{c}\int dx_\mu \mathcal{A}^\mu(x)\,, \tag{34}$$

όπου $ds = (dx^\mu dx_\mu)^{1/2}$ είναι το διαφορικό του αναλλοίωτου μήκους. q είναι το *ηλεκτρικό φορτίο* και η σταθερά c έχει εμφανισθεί ώστε να έχει ο όρος αλληλεπίδρασης τις σωστές διαστάσεις.

Ας θεωρήσουμε τώρα δυνατές μεταβολές δx^μ, οι οποίες να μηδενίζονται στα άκρα. Για τέτοιες, καθαρά συναρτησιακές, δυνατές μεταβολές ισχύει $\delta(dx^\mu) = d(\delta x^\mu)$. Η μεταβολή του διαφορικού ds είναι

$$\delta(ds) = \delta(\sqrt{dx^\mu dx_\mu}) = \frac{1}{2}\frac{2\delta(dx^\mu)dx_\mu}{\sqrt{dx^\nu dx_\nu}} = \frac{d(\delta x^\mu)dx_\mu}{ds} = \delta(dx^\mu)\frac{dx_\mu}{ds} = \frac{1}{c}\delta(dx^\mu)\frac{dx_\mu}{d\tau} = \frac{1}{c}\delta(dx^\mu)\,u_\mu\,.$$

Η μεταβολή της αλληλεπίδρασης είναι

$$\delta(dx_\mu\mathcal{A}^\mu) = \delta(dx_\mu)\mathcal{A}^\mu + dx_\mu\delta\mathcal{A}^\mu = \delta(dx_\mu)\mathcal{A}^\mu + dx_\mu\,(\delta x^\nu)\frac{\partial\mathcal{A}^\mu}{\partial x^\nu}\,.$$

Η αντίστοιχη μεταβολή της Δράσης είναι

$$\delta\mathcal{S} = -m\int \delta(dx^\mu)u_\mu - \frac{q}{c}\int\left(\delta(dx_\mu)\mathcal{A}^\mu - dx_\mu\,(\delta x^\nu)\frac{\partial\mathcal{A}^\mu}{\partial x^\nu}\right)$$

ή

$$\delta\mathcal{S} = -m\int d(\delta x^\mu)u_\mu - \frac{q}{c}\int\left(d(\delta x_\mu)\mathcal{A}^\mu - dx_\mu\,(\delta x^\nu)\frac{\partial\mathcal{A}^\mu}{\partial x^\nu}\right)$$

$$= -m\int d(\delta x^\mu u_\mu) + m\int \delta x^\mu\,du_\mu - \frac{q}{c}\int d(\delta x_\mu\mathcal{A}^\mu) + \frac{q}{c}\int \delta x_\mu\,d\mathcal{A}^\mu - \frac{q}{c}\int dx_\mu\,\frac{\partial\mathcal{A}^\mu}{\partial x^\nu}\delta x^\nu\,.$$

Ο πρώτος και ο τρίτος όρος μηδενίζονται, δεδομένου ότι η μεταβολή δx^μ μηδενίζεται στα άκρα της ολοκλήρωσης. Συνεχίζοντας, έχουμε

$$\delta\mathcal{S} = \int d\tau\,\delta x^\mu\left(m\frac{du_\mu}{d\tau} + \frac{q}{c}\frac{d\mathcal{A}_\mu}{d\tau} - \frac{q}{c}\frac{dx_\nu}{d\tau}\frac{\partial\mathcal{A}_\nu}{\partial x^\mu}\right)$$

ή

$$\delta\mathcal{S} = \int d\tau\,\delta x^\mu\left(m\frac{du_\mu}{d\tau} + \frac{q}{c}\left(\frac{\partial\mathcal{A}_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial\mathcal{A}_\nu}{\partial x_\mu}\right)u^\nu\right) \tag{35}$$

ή

$$\delta \mathcal{S} \; = \; \int d\tau \, \delta x^{\mu} \left(m \frac{du_{\mu}}{d\tau} \; + \; \frac{q}{c} \mathcal{F}_{\nu\mu} u^{\nu} \right) . \tag{36}$$

Η Αρχή της Ελάχιστης Δράσης υπαγορεύει

$$\delta \mathcal{S} \; = \; 0 \implies m \frac{du_{\mu}}{d\tau} \; = \; \frac{q}{c} \mathcal{F}_{\mu\nu} u^{\nu} \, . \tag{37}$$

Οι εξισώσεις κίνησης είναι

$$m \frac{d^2 x_{\mu}}{d\tau^2} \; = \; \frac{q}{c} \, \frac{dx^{\nu}}{d\tau} \, \mathcal{F}_{\mu\nu} \, . \tag{38}$$

Το δεξιό μέλος της ανωτέρω εξίσωσης αποτελεί την σχετικιστική γενίκευση της δύναμης

$$f_{\mu} \; = \; \frac{q}{c} \, u^{\nu} \, \mathcal{F}_{\mu\nu} \, . \tag{39}$$

Η χωρική συνιστώσα της δύναμης είναι

$$f^i \; = \; \frac{q}{c} \left(\gamma c \, \mathcal{F}_{0i} \; + \; \gamma v_j \, \mathcal{F}_{ji} \right) \; = \; \gamma \, q \, \left(E_i \; + \; \left(\vec{v} \times \vec{B} \right)_i \right) . \tag{40}$$

Με εξαίρεση το παράγοντα γ, ο οποίος, για $v << c$, είναι πρακτικά ίσος με την μονάδα, η ανωτέρω έκφραση συμπίπτει με την γνωστή έκφραση για την *Δύναμη Lorentz*. Η χωροειδής συνιστώσα της εξίσωσης κίνησης είναι

$$m \frac{du^i}{d\tau} \; = \; f^i \;\; \Longrightarrow \;\; m \frac{d(\gamma \, v_i)}{d\tau} \; = \; \gamma \, q \, \left(E_i \; + \; \left(\vec{v} \times \vec{B} \right)_i \right) . \tag{41}$$

Στο όριο $v << c$ η ανωτέρω εξίσωση κίνησης συμπίπτει με την γνωστή εξίσωση του Νεύτωνα για το σωματίδιο υπό την επίδραση της Δύναμης Lorentz

$$m \, \frac{d^2 x^i}{dt^2} \; = \; q \, \left(E_i \; + \; \left(\vec{v} \times \vec{B} \right)_i \right) . \tag{42}$$

Η χρονοειδής συνιστώσα της εξίσωσης κίνησης είναι[2]

$$m \frac{du_0}{d\tau} \; = \; \frac{q}{c} \, u^j \, \mathcal{F}_{0j} \implies \frac{d(mc^2 \gamma)}{dt} \; = \; q \, \left(\vec{v} \cdot \vec{E} \right) . \tag{43}$$

[2] Σημειώστε ότι

$$d\tau \; = \; \sqrt{(dt)^2 \; - \; \frac{1}{c^2} (d\vec{x})^2} \; = \; dt \sqrt{1 \; - \; \frac{v^{2}}{c}^{2}} \; = \; \frac{dt}{\gamma} \, .$$

Ας σημειωθεί ότι η ποσότητα $\mathcal{E}_{kin} = mc^2\gamma$ ταυτίζεται με την χρονική συνιστώσα της τετραορμής διαιρεμένη διά c, για ένα ελεύθερο σωματίδιο. Μπορούμε να την ονομάσουμε *«κινητική ενέργεια»*.

Η Δράση για ένα φορτισμένο σωματίδιο, την οποία χρησιμοποιήσαμε στα αμέσως προηγούμενα

$$\mathcal{S} = -mc^2 \int d\tau - \frac{q}{c} \int d\tau u^\mu \mathcal{A}_\mu$$

γράφεται και ως

$$\mathcal{S} = \int \frac{dt}{\gamma} \left\{ -mc^2 - \frac{q}{c} u^0 \mathcal{A}_0 - \frac{q}{c} u^i \mathcal{A}_i \right\} . \tag{44}$$

Από την τελευταία έκφραση συμπεραίνουμε ότι η *συνάρτηση Lagrange* του συστήματος είναι

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - q\phi + q(\vec{v} \cdot \vec{A}) . \tag{45}$$

Από την συνάρτηση Lagrange μπορούμε να παραγάγουμε κατευθείαν τις εξισώσεις κίνησης ως

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) = \frac{\partial L}{\partial x^i} .$$

Μπορεί να δειχθεί ότι η εξίσωση κίνησης έχει την μορφή

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} - \frac{\vec{v}}{c^2} \left(\vec{E} \cdot \vec{v} \right) \right) . \tag{46}$$

Από τον ορισμό της *κανονικής ορμής* που ισχύει στα πλαίσια της Κλασσικής Μηχανικής, έχουμε

$$p^i \equiv \frac{\partial L}{\partial v_i} = \frac{m v_i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + q A_i = m u^i + q \mathcal{A}^i . \tag{47}$$

Παρατηρούμε ότι η σχέση ταχύτητας και ορμής περιλαμβάνει και τον όρο $q\vec{A}$, ο οποίος οφείλεται στο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Η σχέση αυτή δίνει τις χωροειδείς συνιστώσες της ορμής για το τετράνυσμα

$$p^\mu = m u^\mu + q \mathcal{A}^\mu . \tag{48}$$

Το χρονοειδές μέρος του τετρανύσματος της ορμής δίνει την ενέργεια του σωματιδίου διαιρεμένη με c

$$p^0 = \frac{\mathcal{E}}{c} = mc\gamma + q\frac{\phi}{c} . \tag{49}$$

Η συνάρτηση Hamilton του σωματιδίου υπολογίζεται από τον γενικό της ορισμό συναρτήσει της συνάρτησης Lagrange

$$H(p^i,\, x^j) \,=\, p^i v_i \,-L\,.$$

Δεδομένου όμως ότι η συνάρτηση Hamilton θα πρέπει να εκφρασθεί συναρτήσει της ορμής, μας χρειάζεται και η αντίστροφη σχέση ταχύτητας/ορμής. Αυτή εξάγεται ως εξής:

$$m\,\gamma(v)\,\vec{v} \,=\, \vec{p}+q\vec{A} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} v^2 \,=\, c^2 \frac{(\vec{p}-q\vec{A})^2}{\left[m^2c^2+(\vec{p}-q\vec{A})^2\right]} \\ \\ \frac{1}{\gamma} \,=\, \frac{mc}{\sqrt{m^2c^2+(\vec{p}-q\vec{A})^2}} \end{array} \right. \Longrightarrow \vec{v} \,=\, \frac{c(\vec{p}-q\vec{A})}{\sqrt{m^2c^2+(\vec{p}-q\vec{A})^2}}\,.$$

Η συνάρτηση Hamilton είναι

$$H \,=\, c\sqrt{(\vec{p}-q\vec{A})^2+m^2c^2} \,+\, q\,\phi\,. \qquad (50)$$

Ας σημειωθεί ότι στο μη-σχετικιστικό όριο, μπορούμε να αναπτύξουμε την έκφραση αυτή σε δυνάμεις του $1/c$ και να πάρουμε την γνώριμη συνάρτηση Hamilton

$$H \,\approx\, mc^2 \,+\, \frac{1}{2m}\left(\vec{p}-q\vec{A}\right)^2 \,+\, q\,\phi\,. \qquad (51)$$

Τέλος, *Εξισώσεις Hamilton* είναι

$$\dot{x}_i \,=\, \frac{\partial H}{\partial p^i}, \quad \dot{p}^i \,=\, -\frac{\partial H}{\partial x^i}\,.$$

Η πρώτη δίναι απλώς την σχέση ταχύτρητας/ορμής που βρήκαμε πιο πάνω. Η δεύτερη είναι

$$\dot{p}^i \,=\, \frac{qc(p_k-qA_k)}{\sqrt{m^2c^2+(\vec{p}-q\vec{A})^2}}\frac{\partial A_k}{\partial x^i} \,-q\,\frac{\partial \phi}{\partial x^i} \qquad (52)$$

και μπορεί εύκολα να δειχθεί ότι ταυτίζεται με την εξίσωση κίνησηςστην οποία καταλήξαμε προηγουμένως.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Σταθερό Ηλεκτρικό Πεδίο. Η περίπτωση *σταθερού και ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου* $\vec{E} \,=\, \sigma\tau\alpha\theta.$ είναι ιδιαίτερα εύκολη και αναλύσιμη. Στην περίπτωση αυτή έχουμε μόνο το βαθμωτό δυναμικό

$$\phi \,=\, -\vec{r}\cdot\vec{E} \Longrightarrow -\vec{\nabla}\phi \,=\, \vec{E}\,.$$

Η συνάρτηση Hamilton είναι

$$H \,=\, c\,\sqrt{m^2c^2\,+\,p^2} \,-\,q\,\vec{r}\cdot\vec{E}$$

και δίνει τις εξισώσεις Hamilton

$$\vec{v} \equiv \dot{\vec{r}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} = \frac{c\vec{p}}{\sqrt{m^2c^2 + p^2}}$$

και

$$\dot{\vec{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{r}} = q\,\vec{E}\,.$$

Επιλέγοντας το σύστημα συντεταγμένων έτσι ώστε $\vec{E} = E\,\hat{x}$ παίρνουμε

$$\dot{p}_x = q\,E, \quad \dot{p}_y = \dot{p}_z = 0\,.$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να επιλέξουμε τις αρχικές συνθήκες

$$p_x(0) = p_z(0) = 0, \quad p_y(0) = p_0\,.$$

Τότε έχουμε

$$p_x(t) = q\,E\,t, \quad p_y(t) = p_0\,, \quad p_z(t) = 0\,.$$

Από την άλλη εξίσωση Hamilton έχουμε

$$\dot{x} = v_x(t) = \frac{c\,q\,E\,t}{\sqrt{m^2c^2 + p_0^2 + (qEt)^2}}, \quad \dot{y} = v_y(t) = \frac{c\,p_0}{\sqrt{m^2c^2 + p_0^2 + (qEt)^2}}\,.$$

Η κίνηση γίνεται αποκλειστικά στο επίπεδο x, y μια και $v_z(t) = v_z(0) = 0 \to z(t) = z(0)$. Προχωράμε επιλέγοντας αρχικές συνθήκες $x(0) = y(0) = 0$. Από την πρώτη παίρνουμε

$$x(t) = c\int_0^t dt\,\frac{qEt}{\sqrt{m^2c^2 + p_0^2 + (qEt)^2}} = \frac{c}{2qE}\int_{m^2c^2+p_0^2}^{m^2c^2+p_0^2+(Eqt)^2} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}}$$

ή

$$x(t) = \frac{c}{qE}\left(\sqrt{m^2c^2 + p_0^2 + (qEt)^2} - \sqrt{m^2c^2 + p_0^2}\right)\,.$$

Από την άλλη έχουμε

$$y(t) = \frac{p_0c}{qE}\int_0^{qEt/\sqrt{m^2c^2+p_0^2}} \frac{d\xi}{\sqrt{1+\xi^2}} = \frac{p_0c}{qE}\ln\left(\frac{qEt}{\sqrt{m^2c^2+p_0^2}} + \sqrt{1 + \frac{(qEt)^2}{m^2c^2+p_0^2}}\right)\,.$$

Δεν είναι δύσκολο να αντιστρέψουμε αυτή την σχέση, οπότε έχουμε

$$\cosh\left(\frac{qE}{p_0c}y\right) = \sqrt{1 + \frac{(qEt)^2}{m^2c^2+p_0^2}}\,.$$

Συνδυάζοντας αυτή την σχέση με την έκφραση για το $x(t)$ και απαλείφοντας το χρόνο, παίρνουμε την τροχιά (*Αλυσσοειδής*)

$$x = \frac{c\sqrt{p_0^2 + m^2c^2}}{qE}\left(\cosh\left(\frac{qE}{p_0c}y\right) - 1\right)\,.$$

Στο μη-σχετικιστικό όριο μπορούμε να αναπτύξουμε σε δυνάμεις του $1/c$, οπότε έχουμε

$$\cosh\left(\frac{qE}{p_0c}y\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{qE}{p_0c}y} + e^{-\frac{qE}{p_0c}y}\right) \approx 1 + \frac{y^2}{2c^2}\left(\frac{qE}{p_0}\right)^2 + \ldots\,.$$

και

$$x \approx \left(\frac{qEm}{2p_0^2}\right)y^2\,,$$

που είναι μια παραβολή.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Σταθερό Μαγνητικό Πεδίο. Στην περίπτωση που το σωματίδιο κινείται υπό την επίδραση ενός σταθερού και ομογενούς μαγνητικού πεδίου $\vec{B}$ η κίνησή του είναι ιδιαίτερα απλή και επιλύσιμη. Μια επιλογή για το διανυσματικό δυναμικό που οδηγεί σε σταθερό και ομογενές μαγνητικό πεδίο είναι η

$$\vec{A} \,=\, \frac{1}{2}\left(\vec{B}\times\vec{r}\right) \quad\Longrightarrow\; \vec{\nabla}\times\vec{A} \,=\, \vec{B}\,.$$

Η συνάρτηση Lagrange του συστήματος είναι

$$L \,=\, -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \,+\, \frac{q}{2}\vec{v}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{r}\right)$$

και οδηγεί στην εξίσωση κίνησης

$$m\frac{d\left(\gamma\,\vec{v}\right)}{dt} \,=\, q\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\,.$$

Πολλαπλασιάζοντας εσωτερικά με την ταχύτητα παίρνουμε

$$\vec{v}\cdot\frac{d\left(\gamma\,\vec{v}\right)}{dt} \,=\, 0 \Longrightarrow \quad \frac{dv^2}{dt} \,=\, 0 \,\Longrightarrow \gamma \,=\, \gamma_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2(0)}{c^2}}}\,.$$

Επιλέγοντας το σύστημα αναφοράς ώστε $\vec{B} \,=\, B\hat{z}$ παίρνουμε τις εξισώσεις

$$\dot{v}_z \,=\, 0 \,\rightarrow\, z(t) \,=\, z(0) \,+\, v_z(0)\,t$$

$$\dot{v}_x \,=\, \omega\,v_y$$

$$\dot{v}_y \,-\omega\,v_x\,,$$

όπου

$$\omega \,\equiv\, \frac{qB}{m\gamma_0}\,.$$

Παραγωγίζοντας άλλη μια φορά τις εξισώσεις αυτές παίρνουμε

$$\ddot{v}_x \,=\, -\omega^2\,v_x\,, \qquad \ddot{v}_y \,=\, -\omega^2\,v_y$$

με προφανείς λύσεις τις

$$v_x(t) \,=\, v_x(0)\cos(\omega t) \,+\, \frac{\dot{v}_x(0)}{\omega}\sin(\omega t) \,=\, v_x(0)\cos(\omega t) \,+\, v_y(0)\sin(\omega t)$$

$$v_y(t) \,=\, v_y(0)\cos(\omega t) \,+\, \frac{\dot{v}_y(0)}{\omega}\sin(\omega t) \,=\, v_y(0)\cos(\omega t) \,-\, v_x(0)\sin(\omega t)\,.$$

Ολοκληρώνοντας, παίρνουμε

$$x(t) \,=\, x(0) \,+\, \frac{v_x(0)}{\omega}\sin(\omega t) \,-\, \frac{v_y(0)}{\omega}\left(\cos(\omega t) \,-1\right)$$

$$y(t) \,=\, y(0) \,+\, \frac{v_y(0)}{\omega}\sin(\omega t) \,+\, \frac{v_x(0)}{\omega}\left(\cos(\omega t) \,-1\right)\,.$$

Από τις σχέσεις αυτές συμπεραίνουμε την τροχιά

$$\left\{\begin{array}{c} \left(x(t) \,-x(0) \,-\, \frac{v_y(0)}{\omega}\right)^2 \,+\, \left(y(t) \,-y(0) \,+\, \frac{v_x(0)}{\omega}\right)^2 \,=\, \frac{v_x^2(0)+v_y^2(0)}{\omega^2} \\ z(t) \,=\, z(0) \,+\, v_z(0)\,t \end{array}\right.$$

που είναι μια *έλικα*.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Ορθογώνια ομογενή και χρονικά σταθερά ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία. Θα θεωρήσουμε την περίπτωση ενός ομογενούς και χρονικά σταθερού ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}$, το οποίο είναι κάθετο προς ένα ομογενές και χρονικά σταθερό μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$, και θα μελετήσουμε την κίνηση ενός φορτισμένου σωματιδίου μάζας m και ηλεκτρικού φορτίου q. Έστω Σ το «*ακίνητο*» σύστημα αναφοράς ως προς το οποίο το σωματίδιο έχει ταχύτητα $\vec{v}$ και τα πεδία είναι $\vec{E}$ και $\vec{B}$. Εξ υποθέσεως $\vec{E}\cdot\vec{B} = 0$. Ας σημειωθεί ότι εσωτερικό αυτό γινόμενο είναι αναλλοίωτο σε μετασχηματισμούς Lorentz και, επομένως, τα πεδία εξακολουθούν να είναι ορθογώνια σε κάθε σύστημα αναφοράς. έστω ένα τέτοιο σύστημα αναφοράς Σ', το οποίο κινείται με ταχύτητα $\vec{V}$ ως προς το Σ. Τα πεδία ως προς αυτό το σύστημα θα είναι

$$\vec{E}_{||}' = \vec{E}_{||}, \quad \vec{B}_{||}' = \vec{B}_{||},$$

$$\vec{E}_{\perp}' = \gamma(V)\left(\vec{E}_{\perp} - \vec{V}\times\vec{B}\right), \quad \vec{B}_{\perp}' = \gamma(V)\left(\vec{B}_{\perp} + \frac{\vec{V}\times\vec{E}}{c^2}\right).$$

Είναι δυνατόν η ταχύτητα $\vec{V}$ να επιλεγεί έτσι ώστε στο σύστημα Σ' να μηδενίζεται το ηλεκτρικό πεδίο; Πράγματι, εάν έχουμε $E < Bc$, η επιλογή

$$\vec{V} = -\frac{\vec{E}\times\vec{B}}{B^2}$$

δίνει, εκ κατασκευής,

$$\vec{E}_{\perp}' = 0$$

και

$$\vec{E}\cdot\vec{V} = 0 \Longrightarrow \vec{E}_{||} = 0 \Longrightarrow \vec{E}_{||}' = 0.$$

Δεδομένου ότι τα $\vec{E}$ και $\vec{B}$ είναι κάθετα, έχουμε

$$V = \frac{E}{B} = c\left(\frac{E}{Bc}\right) < c.$$

Ας σημειωθεί επίσης ότι, λόγω της ορθογωνιότητας $\vec{V}\cdot\vec{B} = 0$, έχουμε $\vec{B}_{||} = 0$ και $\vec{B}_{||}' = 0$. Τελικά, στο Σ' θα έχουμε

$$\vec{E}\,' = \vec{B}_{||}' = 0, \quad \vec{B}_{\perp}' = \gamma(V)\left(\vec{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2B^2}\left(\vec{E}\times\vec{B}_{\perp}\right)\times\vec{E}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{E^2}{c^2B^2}}}\left(\vec{B}_{\perp} - \frac{E^2}{c^2B^2}\vec{B}_{\perp}\right) = \frac{\vec{B}_{\perp}}{\gamma(V)}.$$

Η εξίσωση της κίνησης στο Σ' είναι

$$m\frac{d\vec{v}\,'}{dt'} = \frac{q}{\gamma(v')}\left(\vec{v}\,'\times\vec{B}_{\perp}'\right).$$

Είναι αμέσως φανερό ότι

$$\frac{dv'^2}{dt'} = 0 \Longrightarrow \gamma(v') = \gamma_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v'^2(0)}{c^2}}}.$$

Επιλέγοντας το σύστημα αναφοράς ώστε $\vec{B} = B\hat{z}$, έχουμε

$$\dot{v}_z'(t') = 0 \Longrightarrow z'(t') = z'(0) + \dot{v}_z'(0)\,t'$$

$$\dot{v}_x'(t') = \omega\, v_y'(t')$$

$$\dot{v}_y'(t') = -\omega\, v_x'(t'),$$

όπου

$$\omega \equiv \frac{qB}{m\gamma_0}\sqrt{1-\frac{E^2}{c^2B^2}}.$$

Η τροχιά στο Σ' είναι

$$x'(t') = x'(0) + \frac{v_x'(0)}{\omega}\sin(\omega t') - \frac{v_y'(0)}{\omega}\left(\cos(\omega t') - 1\right)$$

$$y'(t') = y'(0) + \frac{v_y'(0)}{\omega}\sin(\omega t') + \frac{v_x'(0)}{\omega}\left(\cos(\omega t') - 1\right).$$

Οι λύση αυτή είναι μια έλικα με κυκλική προβολή στο επίπεδο x', y'. Στο ακίνητο σύστημα Σ εκτός από την ανωτέρω ελικοειδή κίνηση γύρω από τον άξονα $\hat{B}$, το σωματίδιο μετέχει και σε ομαλή μεταφορική κίνηση προς την διε·υθυνση $\hat{E} \times \hat{B}$.

Τί συμβαίνει όταν $E > cB$; Στην περίπτωση αυτή είναι δυνατόν να βρούμε ένα αδρανειακό σύστημα Σ', το οποίο να κινείται ως προς το Σ με κατάλληλη ταχύτητα ώστε να μηδενίζεται το *μαγνητικό* πεδίο $\vec{B}\,'$. Η ταχύτητα αυτή είναι

$$\vec{V} \;=\; c\,\frac{\vec{E} \times \vec{B}}{E^2}\,.$$

Στο σύστημα Σ' τα πεδία είναι

$$\vec{E}_{||}\,' \;=\; 0, \quad \vec{B}_{||}\,' \;=\; 0$$

$$\vec{E}_{\perp}\,' \;=\; \frac{\vec{E}_{\perp}}{\gamma(V)}, \quad \vec{B}_{\perp}\,' \;=\; \gamma(V)\left(\vec{B} - \vec{V} \times \vec{E}\right)\,,$$

όπου

$$\gamma(V) \;=\; \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{c^2 B^2}{E^2}}}\,.$$

Η εξίσωση κίνησης του σωματιδίου στην περίπτωση αυτή είναι

$$m\frac{d\vec{v}\,'}{dt'} \;=\; \frac{q}{\gamma(v')}\left(\vec{E}\,' - \frac{\vec{v}\,'}{c^2}\left(\vec{v}\,'\cdot\vec{E}\,'\right)\right)$$

ή

$$m\frac{d\vec{v}\,'}{dt'} \;=\; \frac{q}{\gamma(v')\gamma(V)}\left(\vec{E} - \frac{\vec{v}\,'}{c^2}\left(\vec{v}\,'\cdot\vec{E}\right)\right)\,.$$

Αυτή η εξίσωση είναι ταυτόσιμη με την εξίσωση κίνησης παρουσία μόνο ηλεκτρικού πεδίου με μόνη διαφορά τον σταθερό παράγοντα $\gamma^{-1}(V)$. Συνεπώς η κίνηση στο Σ' είναι μια επιταχυνόμενη κίνηση με αλυσσοειδή (κατά προσέγγιση παραβολική) τροχιά. Η κίνηση του σωματιδίου στο Σ προκύπτει από την σύνθεση αυτής της επιταχυνόμενης κίνησης με μια ομαλή κίνηση κατά την διεύθυνση $\hat{E} \times \hat{B}$.

6. Συναλλοίωτη Μορφή των Θεωρημάτων Διατήρησης.

Θεωρείστε την τετράδα των εξισώσεων διατήρησης των προηγουμένων εδαφίων

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{S} + \vec{J}\cdot\vec{E} = 0 \tag{53}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\sigma}^{(i)} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial S_i}{\partial t} = \rho\, E_i + \left(\vec{J}\times\vec{B}\right)_i \tag{54}$$

Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς $\mathcal{J}^\mu = (\rho c,\, \vec{J})$, $E_i = \mathcal{F}_{0i}$ και $\epsilon_{ijk}B_k = -\frac{1}{c}\mathcal{F}_{ij}$, η πρώτη από αυτές της εξισώσεις (*Θεώρμα Poynting*) γράφεται

$$\frac{\partial \mathcal{T}^\mu_{\ 0}}{\partial x^\mu} = \frac{1}{c}\mathcal{J}^\mu\mathcal{F}_{\mu 0}\,, \tag{55}$$

όπου

$$\mathcal{T}^\mu_{\ 0} = \left(U,\, \frac{\vec{S}}{c}\right). \tag{56}$$

Η δεύτερη εξίσωση γράφεται

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x^j} - \frac{\partial}{\partial x^0}\left(\frac{S_i}{c}\right) = \frac{1}{c}\left(\mathcal{J}^0\mathcal{F}_{0i} + \mathcal{J}^j\mathcal{F}_{ji}\right)$$

ή

$$\frac{\partial \mathcal{T}^\mu_{\ i}}{\partial x^\mu} = \frac{1}{c}\mathcal{J}^\mu\mathcal{F}_{\mu i}\,, \tag{57}$$

όπου

$$\mathcal{T}^\mu_{\ i} = \begin{cases} \mathcal{T}^0_{\ i} = -\frac{S_i}{c} \\ \\ \mathcal{T}^j_{\ i} = \sigma_{ij} \end{cases}. \tag{58}$$

Οι εξισώσεις αυτές συμπτύσσονται σε ένα ενιαίο «*Θεώρημα Poynting*» στην μορφή μιας τετρανυσματικής εξίσωσης

$$\frac{\partial \mathcal{T}^\mu_{\ \nu}}{\partial x^\mu} = \frac{1}{c}\mathcal{J}^\mu\mathcal{F}_{\mu\nu}\,, \tag{59}$$

όπου[3]

$$\mathcal{T}^{\mu}_{\ \nu} \,=\, \begin{pmatrix} U & -S_x/c & -S_y/c & -S_z/c \\ \\ S_x/c & \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \\ S_y/c & \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \\ S_z/c & \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} . \tag{60}$$

Το τανυστικό μέγεθος (60) ονομάζεται *Ηλεκτρομαγνητικός Τανυστής Ορμής-Ενέργειας*. Εύκολα φαίνεται ότι ο συμμετρικός τανυστής $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ είναι και *άϊχνος*, δηλαδή

$$\mathcal{T}^{\mu}_{\ \mu} \,=\, 0\,. \tag{61}$$

Έτσι όπως είναι γραμμένος ο πίνακας $\mathcal{T}^{\mu\nu}$, συναρτήσει μη-συμμεταβλητών ποσοτήτων, δεν έχει μια εκπεφρασμένη ταυτότητα κατά Lorentz. Θα προχωρήσουμε γράφοντάς τον συναρτήσει συναλλοίωτων μεγεθών ώστε να είναι φανερή η ταυτότητά του ως ανταλλοίωτου τανυστή δεύτερης τάξης. Η πιο γενική έκφραση που μπορεί να γραφτεί, η οποία εφενός να είναι διγραμμική ως προς τα πεδία και αφετέρου να έχει δύο ελεύθερους συμμετρικούς δείκτες είναι η

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} \,=\, C\,\mathcal{F}^{\mu}_{\ \rho}\mathcal{F}^{\rho\nu} \,+\, D\,g^{\mu\nu}\,\mathcal{F}^{\rho\sigma}\mathcal{F}_{\rho\sigma}\,,$$

όπου C και D προσδιοριστaίοι συντελεστές. Εφαρμόζοντας αυτό το ansatz στην περίπτωση $\mu = \nu = 0$, έχουμε

$$\mathcal{T}^{00} \,=\, U \,=\, \frac{\epsilon_0}{2}E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} \,=\, C\,\mathcal{F}^{0}_{\ j}\mathcal{F}^{j0} \,+\, D\,\left(2\mathcal{F}^{0j}\mathcal{F}_{0j} \,+\, \mathcal{F}^{ij}\mathcal{F}_{ij}\right)$$

$$= CE^2 \,+\, D\left(-2E^2 \,+\, c^2\epsilon_{ijk}\epsilon_{ij\ell}B_kB_\ell\right) \,=\, E^2(C-2D) \,+\, 2c^2D\,B^2$$

που, αν συγκρίνουμε, αφενός με την «00» συνιστώσα της (60) και αφετέρου με την γνωστή έκφραση της πυκνότητας ενέργειας, συνεπάγεται

$$C \,=\, \epsilon_0, \quad D \,=\, \frac{\epsilon_0}{4}\,.$$

[3]Επίσης

$$\mathcal{T}_{\mu\nu} \,=\, \begin{pmatrix} U & -S_x/c & -S_y/c & -S_z/c \\ \\ -S_x/c & -\sigma_{xx} & -\sigma_{xy} & -\sigma_{xz} \\ \\ -S_y/c & -\sigma_{yx} & -\sigma_{yy} & -\sigma_{yz} \\ \\ -S_z/c & -\sigma_{zx} & -\sigma_{zy} & -\sigma_{zz} \end{pmatrix} .$$

Επομένως, ο τανυστής ορμής-ενέργειας έχει την ακόλουθη συναλλοίωτη έκφραση

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} \,=\, \epsilon_0\,\mathcal{F}^{\mu}_{\ \rho}\mathcal{F}^{\rho\nu} \,+\, \epsilon_0\frac{g^{\mu\nu}}{4}\,\mathcal{F}^{\rho\sigma}\mathcal{F}_{\rho\sigma}\,. \tag{62}$$

Και σαυτή την μορφή είναι άμεσα διαπιστώσιμο ότι ο τανυστής αυτός είναι άϊχνος. Πράγματι

$$T^{\mu}_{\mu} \,=\, \epsilon_0\mathcal{F}^{\mu}_{\ \rho}\mathcal{F}^{\rho\mu} \,+\, \epsilon_0\,\mathcal{F}^{\rho\sigma}\mathcal{F}_{\rho\sigma} \,=\, 0\,.$$