ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ
ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΕΣ: Π. ΚΑΝΤΗ, Θ. ΧΩΡΙΚΗΣ

6η Σειρά Ασκήσεων

1. Προσδιορίστε εάν οι παρακάτω ακολουθίες είναι αύξουσες ή φθίνουσες. Βρείτε το ελάχιστο άνω φράγμα M και το μέγιστο κάτω φράγμα m, εάν υπάρχουν.

$$(\alpha)\ \alpha_n = \frac{3n+1}{n+1}, \quad (\beta)\ \alpha_n = \frac{2}{n}, \quad (\gamma)\ \alpha_n = \frac{n+(-1)^n}{n}, \quad (\delta)\ \alpha_n = \frac{3^n}{(n+1)^2},$$
$$(\varepsilon)\ \alpha_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \quad (\sigma\tau)\ \alpha_n = \frac{2^n-1}{2^n}, \quad (\zeta)\ \alpha_n = \ln\left(\frac{2n}{n+1}\right)$$

2. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ορίου ακολουθίας, δείξτε ότι ισχύουν τα παρακάτω:

$$(\alpha)\ \lim_{n\to\infty} \frac{4n-1}{n} = 4, \quad (\beta)\ \lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1} = 2, \quad (\gamma)\ \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

3. Χρησιμοποιώντας την εις άτοπον απαγωγή και την τριγωνική ανισότητα, αποδείξτε ότι: (i) το όριο μιας ακολουθίας είναι μοναδικό και (ii) εάν $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \ell$ και $\lim_{n\to\infty} \beta_n = m$, τότε $\lim_{n\to\infty} (\alpha_n + \beta_n) = \ell + m$.

4. Βρείτε τα όρια των παρακάτω ακολουθιών:

$$(\alpha)\ \alpha_n = \frac{3n^4 - 2n^2 + 1}{n^5 - 3n^3}, \quad (\beta)\ \alpha_n = \frac{(2n+1)^2}{(3n-1)^2}, \quad (\gamma)\ \alpha_n = n^2\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1}\right),$$
$$(\delta)\ \alpha_n = (5^n + 7^n)^{1/n}, \quad (\varepsilon)\ \alpha_n = \frac{(n!)^2}{(n-2)!\,(n+2)!}, \quad (\sigma\tau)\ \alpha_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n,$$
$$(\zeta)\ \alpha_n = \frac{n! + 6^n}{5n! + 10^n}, \quad (\eta)\ \alpha_n = \sqrt{n(n+1)} - 2n, \quad (\vartheta)\ \alpha_n = \frac{(n^3+n)^{1/n}}{n^2},$$
$$(\iota)\ \alpha_n = \frac{n\,\sin(n^3)}{n^2+1}, \quad (\iota\alpha)\ \alpha_n = \frac{1+2+\ldots+n}{n^2}, \quad (\iota\beta)\ \alpha_n = \frac{e^{2/n}-1}{1/n}$$

5. Χρησιμοποιώντας την μέθοδο της επαγωγής, να δείξετε ότι, για κάθε ακέραιο n, ισχύουν τα ακόλουθα:

(α) $1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + ... + \lambda^n = \dfrac{1-\lambda^{n+1}}{1-\lambda}$, όπου $\lambda \neq 1$ είναι πραγματικός αριθμός

(β) $2^n \leq (n+1)!$

(γ) $(1+x)^n \geq 1 + xn$, όπου $x \geq 0$

(δ) $1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + ... + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

6. Δείξτε ότι οι παρακάτω αναδρομικές ακολουθίες συγκλίνουν και υπολογίστε τα όριά τους:

$$(\alpha)\ \alpha_{n+1} = \frac{3a_n + 4}{2a_n + 3} \ \text{ με } \ \alpha_1 = 1 \quad (\beta)\ \alpha_{n+1} = \sqrt{1 + \frac{1}{3}a_n^2} \ \text{ με } \ \alpha_1 = 1$$