

# ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Εξεταστική περίοδος Ιανουαρίου 2014 (τμήμα αρτίων)

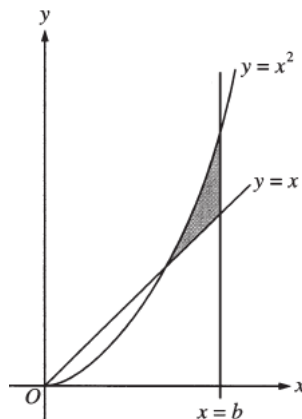
- Σε κάθε ερώτηση επιλέξτε την απάντηση που νομίζετε ότι είναι σωστή.
- Γράψτε τις απαντήσεις σας στη μπροστινή κόλα, κάτω από τα στοιχεία σας. Οι υπόλοιπες κόλες που σας δόθηκαν μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως πρόχειρο.
- Κάθε σωστή απάντηση βαθμολογείται με 0.5. Κάθε λάθος απάντηση βαθμολογείται με -0.1.
- Απαγορεύεται η χρήση ηλεκτρονικών συσκευών.

1) Σωματίδιο μοναδιαίας μάζας εκτελεί μονοδιάστατη κίνηση και η ταχύτητά του  $v$  μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση  $v(x) = bx^{-n}$ , όπου  $b$  και  $n$  είναι σταθερές και  $x$  είναι η θέση του σωματιδίου. Ποια είναι η επιτάχυνση του σωματιδίου συναρτήσει του  $x$ ;

(A)  $-nb^2x^{-2n-1}$  (B)  $-nb^2x^{-n-1}$  (Γ)  $-nb^2x^{-n}$  (Δ)  $-bx^{-n+1}$  (E)  $-bx^{-2n+1}$

2) Ποια από τις παρακάτω εξισώσεις είναι η εφαπτομένη της καμπύλης  $y = x + e^x$  στο  $x = 0$ ;

(A)  $y = x$  (B)  $y = x + 1$  (Γ)  $y = x + 2$  (Δ)  $y = 2x$  (E)  $y = 2x + 1$

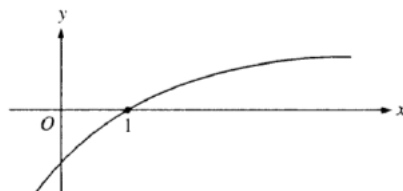


3) Αν  $b > 0$  και  $\int_0^b x dx = \int_0^b x^2 dx$ , τότε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου του παραπάνω σχήματος είναι:

(A)  $\frac{1}{12}$  (B)  $\frac{1}{6}$  (Γ)  $\frac{1}{4}$  (Δ)  $\frac{1}{3}$  (E)  $\frac{1}{2}$

4) Οι τιμές του  $x$  για τις οποίες συγκλίνει απολύτως η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{(n+1)(2x+1)^n}$  είναι

(A)  $x < -1$  και  $x > -\frac{1}{3}$  (B)  $x = 0$  (Γ)  $x = \frac{1}{2}$  (Δ)  $-1 < x < 1$  (E) Δεν συγκλίνει απολύτως για κανένα πραγματικό  $x$



5) Το παραπάνω σχήμα δίνει τη γραφική παράσταση συνάρτησης  $f$  της οποίας τόσο η πρώτη όσο και η δεύτερη παράγωγος υπάρχουν για όλους τους πραγματικούς αριθμούς. Ποια από τις παρακάτω σχέσεις είναι σωστή;

- (A)  $f(1) < f'(1) < f''(1)$  (B)  $f(1) < f''(1) < f'(1)$  (Γ)  $f'(1) < f(1) < f''(1)$  (Δ)  $f''(1) < f(1) < f'(1)$  (E)  $f''(1) < f'(1) < f(1)$

6) Το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}n}{\sqrt{n^3+1}}x^n$  είναι

- (A)  $[-1, 1]$  (B)  $(-1, 1)$  (Γ)  $(-1, 1]$  (Δ)  $[1, -1)$  (E) Η δυναμοσειρά αποκλίνει

7) Ποιο είναι το όριο της ακολουθίας  $a_n = \sqrt[n]{n^2 + n + 3}$ ;

- (A) 0 (B) 1 (Γ) -1 (Δ) 2 (E) Η ακολουθία αποκλίνει

8) Τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση  $f(x) = 3x^5 - x^3$  έχει τα κοίλα προς τα πάνω είναι

- (A)  $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \infty\right)$  (B)  $\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$  (Γ)  $\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, 0\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \infty\right)$   
 (Δ)  $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{10}}\right) \cup \left(0, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$  (E)  $\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$

9) Το ολοκλήρωμα  $\int_0^{\infty} \frac{xdx}{x^4+1}$  ισούται με

- (A)  $\frac{\pi}{2}$  (B)  $\pi$  (Γ)  $\frac{\pi}{3}$  (Δ)  $\frac{\pi}{8}$  (E)  $\frac{\pi}{4}$

10) Η παράγωγος κατεύθυνσης της συνάρτησης  $f(x, y) = 2xy - 3y^2$  στο σημείο  $P(5, 5)$  στην κατεύθυνση του διανύσματος  $4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$  είναι

- (A) 4 (B) 3 (Γ) -3 (Δ)  $10\mathbf{i} - 20\mathbf{j}$  (E) -4

11) Βρείτε την τιμή του  $dy/dx$  στο σημείο  $P(0, 1)$  αν  $1 - x - y^2 = \sin xy$

- (A) -1 (B) 1 (Γ) 0 (Δ) -2 (E) 2

12) Βρείτε και χαρακτηρίστε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης  $f(x, y) = x^3 + y^2 - 6xy - 6x^2$

- (A) Το  $(0, 0)$  είναι τοπικό ελάχιστο και το  $(10, 30)$  τοπικό μέγιστο  
 (B) Το  $(0, 0)$  είναι σαγματικό σημείο και το  $(10, 30)$  τοπικό μέγιστο  
 (Γ) Το  $(0, 0)$  είναι τοπικό μέγιστο και το  $(10, 30)$  σαγματικό σημείο  
 (Δ) Το  $(0, 0)$  είναι σαγματικό σημείο και το  $(10, 30)$  τοπικό ελάχιστο  
 (E) Το  $(0, 0)$  είναι τοπικό ελάχιστο και το  $(10, 30)$  σαγματικό σημείο

13) Δίνεται η συνάρτηση  $f(x, y, z) = x^2 + yz$ . Σε ποια διεύθυνση γίνεται μέγιστη η παράγωγος κατεύθυνσης της  $f$  στο σημείο  $P(1, 1, -3)$ ;

(A)  $\left(\frac{2}{\sqrt{14}}, -\frac{3}{\sqrt{14}}, -\frac{1}{\sqrt{14}}\right)$  (B)  $\left(\frac{2}{\sqrt{14}}, -\frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}\right)$  (Γ)  $\left(-\frac{2}{\sqrt{14}}, -\frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}\right)$   
 (Δ)  $\left(\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}\right)$  (E)  $\left(-\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}\right)$

14) Μια καμπύλη περιγράφεται παραμετρικά ως  $x = \cos 2t$ ,  $y = \sin^2 t$ . Το μήκος της για  $0 \leq t \leq \pi/4$  είναι

(A)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (B)  $\frac{\sqrt{5}}{2}$  (Γ)  $\frac{\sqrt{7}}{2}$  (Δ)  $\frac{3}{2}$  (E)  $\frac{1}{2}$

15) Το ολοκλήρωμα  $\int e^x \cos 2x dx$  ισούται με

(A)  $\frac{e^x \cos 2x}{4} + \frac{2e^x \sin 2x}{5} + C$  (B)  $\frac{e^x \cos 2x}{4} - \frac{2e^x \sin 2x}{5} + C$  (Γ)  $\frac{e^x \cos 2x}{5} - \frac{2e^x \sin 2x}{5} + C$   
 (Δ)  $\frac{e^x \cos 2x}{5} + \frac{2e^x \sin 2x}{5} + C$  (E)  $\frac{e^x \cos 2x}{3} - \frac{2e^x \sin 2x}{3} + C$

16) Χρησιμοποιώντας ότι  $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ , ( $|x| < 1$ ), υπολογίστε για  $|x| < 1$

τη δυναμοσειρά  $\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k+1}$

(A)  $\frac{1}{1-x}$  (B)  $\frac{x}{1+x}$  (Γ)  $\frac{x^2}{(1+x)^2}$  (Δ)  $\frac{x^2}{(1-x)^2}$  (E)  $\frac{x}{(1-x)^2}$

17) Δίνεται η συνάρτηση  $F(x) = \int_1^{x^2} \ln t dt$ . Η παράγωγος  $F'(x)$  ισούται με

(A)  $\frac{1}{x^2} - 1$  (B)  $x^2 \ln x^2$  (Γ)  $\frac{1}{t}$  (Δ)  $\frac{1}{x}$  (E)  $2x \ln x^2$

18) Το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^{2n}}{n^2}$  είναι

(A)  $\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$  (B)  $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$  (Γ)  $\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$  (Δ)  $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$  (E) Η δυναμοσειρά αποκλίνει

19) Η καμπύλη της συνάρτησης  $y = \frac{2x+1}{x-1}$  έχει ασύμπτωτες τις ευθείες

(A) μόνο την  $y = 2$  (B) μόνο την  $x = 1$  (Γ) την  $x = 1$  και την  $y = 2$  (Δ) την  $x = 2$  και την  $y = 1$  (E) μόνο την  $x = -\frac{1}{2}$

20) Η σειρά MacLaurin της  $f(x) = \sin x$  είναι

(A)  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$  (B)  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$  (Γ)  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$  (Δ)  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$   
 (E)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$