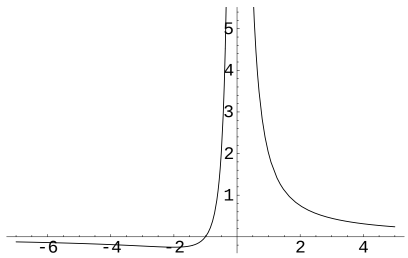
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ, ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ
ΔΙΔΑΣΚΟΥΣΑ: Π. ΚΑΝΤΗ (ΤΜΗΜΑ ΠΕΡΙΤΤΩΝ Α.Μ.)

Λύσεις Θεμάτων Εξεταστικής Ιανουαρίου 2014

1. Η $f(x) = (x+1)/x^2$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbf{R} - \{0\}$, και μηδενίζεται στο $x = -1$. Ισχύει ότι $f'(x) = -(2+x)/x^3$. Τα υποψήφια κρίσιμα σημεία είναι τα $x = -2$ και $x = 0$ με το τελευταίο να απορρίπτεται μια που δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού. Η $f(x)$ είναι αύξουσα στο διάστημα $-2 < x < 0$ και φθίνουσα για $x < -2$ και $x > 0$. Επιπλέον, $f''(x) = 2\,(x+3)/x^4$, με σημείο καμπής το $x = -3$. Ισχύει ότι $f''(x) > 0$ για $x > -3$, $f''(x) < 0$ για $x < -3$, ενώ $f''(-2) = 1/2^3 > 0$ και επομένως το $x = -2$ είναι τοπικό ελάχιστο.



Η γραφική παράσταση της $f(x)$ φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Για την κατασκευή της χρειαζόμαστε τα όρια: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ και $\lim_{x\to 0_\pm} f(x) = +\infty$.

2. Με χρήση της μεθόδου της επαγωγής ελέγχουμε καταρχήν την μονοτονία της ακολουθίας. Για $n = 1$, $a_2 = 2 > a_1$. Έστω ότι $a_{n+1} > a_n$. Τότε $a_{n+2} = 1 + \sqrt{3a_{n+1} - 3} \geq 1 + \sqrt{3a_n - 3} = a_{n+1}$, και επομένως ισχύει για κάθε n. Εάν η ακολουθία είναι και φραγμένη, τότε το όριό της, για $n \to \infty$, θα υπάρχει και θα δίνεται από την σχέση: $\lim a_{n+1} = 1 + \sqrt{3 \lim a_n - 3} \Rightarrow \ell^2 - 5\ell + 4 = 0 \Rightarrow (\ell-4)(\ell-1) = 0$. Το $\ell = 1$ απορρίπτεται αφού η ακολουθία είναι αύξουσα με $a_1 = 4/3 > 1$. Εάν το $\ell = 4$ είναι το όριο της ακολουθίας, θα πρέπει $a_n < 4$ για κάθε n. Χρησιμοποιούμε και πάλι την μέθοδο της επαγωγής: για $n = 1$, $a_2 = 2 < 3$. Έστω ότι $a_n < 4$. Τότε: $a_{n+1} = 1 + \sqrt{3a_n - 3} < 1 + \sqrt{3 \cdot 4 - 3} = 4$, άρα ισχύει για κάθε n, και το όριο της ακολουθίας είναι όντως το $\ell = 4$.

3. (α) (i) Με κριτήριο οριακής σύγκρισης και επιλέγοντας $\beta_n = 1/n$, βρίσκουμε ότι $\lim_{n\to\infty}(\alpha_n/\beta_n) = 1$, επομένως και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ θα αποκλίνει όπως και η αρμονική σειρά.
(i) Με κριτήριο λόγου βρίσκουμε ότι η σειρά αποκλίνει αφού:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)^{n+1}\,(n)!}{(n+1)!\,n^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e > 1.$$

(β) $f(x) = x^2 e^{2x} = x^2[1 + (2x) + (2x)^2/2! + ...] = x^2 + 2x^3 + 2x^4 + ...$ Γράφοντας $f(x) = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n/n! = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n\, x^{n+2}/n!$, και χρησιμοποιώντας το κριτήριο του λόγου, βρίσκουμε ότι $R = \infty$ αφού:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{2^{n+1}\, x^{n+3}\, n!}{(n+1)!\, 2^n\, x^{n+2}}\right| = 2|x| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0, \quad \forall x.$$

4. (α) Θέτοντας $y_2 = y_2$, βρίσκουμε ότι τα σημεία τομής των δύο καμπυλών είναι τα $x = 0, 1$. Με την περιστροφή, γύρω από τον άξονα x, του χωρίου που περικλείεται σχηματίζεται ένα στερεό εκ περιστροφής. Η διατομή ως προς τον άξονα συμμετρίας είναι ένας δακτύλιος. Επομένως, ο όγκος του στερεού είναι:

$$\int_0^1 \pi\,[R_2^2 - R_1^2]\,dx = \int_0^1 \pi\,[(x+1)^2 - (x^2+1)^2]\,dx = \pi\left(x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{7\pi}{15}\ \kappa.\mu.$$

(β) Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες, βρίσκουμε ότι:

$$\int_0^1 x^2 \tan^{-1} x\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\tan^{-1} x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^3\,dx}{3(1+x^2)} = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{3}\int_0^1 \left(xdx + \frac{x\,dx}{1+x^2}\right) = \frac{\pi}{12} + \frac{\ln 2 - 1}{6}.$$

(β) Με κριτήριο σύγκρισης για την $f(x) = 1/(1+x^5)^{1/6}$ και επιλέγοντας $g(x) = 1/x^p = 1/x^{5/6}$, βρίσκουμε ότι $\lim_{x\to\infty} f/g = 1$, και επομένως το ολοκλήρωμα αποκλίνει.

5. Αγνοώντας καταρχήν το όριο της περιοχής, ερευνούμε για τοπικά ακρότατα σε όλο το καρτεσιανό επίπεδο. Βρίσκουμε ότι: $f_x = 4x - 8$ και $f_y = 16y - 16$. Επομένως, το κρίσιμο σημείο της συνάρτησης είναι το $(2, 1)$. Οι παράγωγοι 2ης τάξης έχουν την μορφή: $f_{xx} = 4$, $f_{yy} = 16$ και $f_{xy} = f_{yx} = 0$. Επομένως, $H = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 64 > 0$, και, αφού $f_{xx} > 0$, το σημείο (2,1) είναι τοπικό ελάχιστο.

Επαναφέρουμε τώρα το όριο της περιοχής. Το παραπάνω τοπικό ελάχιστο είναι εσωτερικό σημείο της περιοχής, αφού για $x = 2$, $y^2 = 4 - x^2/4 \Rightarrow |y| = \sqrt{3} > 1$, και επομένως το κρατάμε. Ερευνούμε για ακρότατα της $f(x, y)$ επάνω στην υπερβολή και χρησιμοποιούμε μέθοδο πολλαπλασιαστών Lagrange. Θέτοντας $g(x, y) = x^2 + 4y^2 - 16$, απαιτούμε να ισχύει $\vec{\nabla} f = \lambda\,\vec{\nabla} g$ και παίρνουμε $x = 4/(2-\lambda)$ και $y = 2/(2-\lambda)$ ή αλλιώς $x = 2y$. Από την συνθήκη $g(x, y) = 0$, βρίσκουμε τότε $y = \pm\sqrt{2}$ και επομένως $x = \pm 2\sqrt{2}$. Με σύγκριση τιμών στα δύο ακρότατα της υπερβολής και στο εσωτερικό ακρότατο, βρίσκουμε ότι το σημείο (2,1) είναι το ολικό ελάχιστο, ενώ το $(-2\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ είναι το ολικό μέγιστο.