ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ
ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΕΣ: Π. ΚΑΝΤΗ, Θ. ΧΩΡΙΚΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ 9ης ΣΕΙΡΑΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Πολλαπλασιάζοντας με Δx_k όλα τα μέλη της ανισότητας $x_{k-1}^2 \leq \frac{1}{3}\,(x_{k-1}^2 + x_{k-1}x_k + x_k^2) \leq x_k^2$, αθροίζοντας ως προς k και κάνοντας πράξεις στο μεσαίο μέλος, βρίσκουμε: $L_f(P) \leq \frac{1}{3}\,(b^3 - a^3) \leq U_f(P)$. Το μεσαίο μέλος της ανισότητας μας δίνει το $\int_a^b x^2 dx$.

2. α) Το γεωμετρικό σχήμα που προκύπτει είναι ένα τραπέζιο, άρα $\int_{-2}^{4}(x/2+3)dx = \frac{1}{2}\,[f(-2)+f(4)]\,[4-(-2)] = 21$. β) $\int_{-2}^{1}|x|dx = \frac{5}{2}$, ως το άθροισμα των εμβαδών δύο τριγώνων. γ) $\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx = \frac{9\pi}{2}$, ως το εμβαδόν του πάνω ημικυκλίου ακτίνας 3. Οι μέσες τιμές είναι $7/2$, $5/6$ και $3\pi/2$, αντίστοιχα.

3. α) $x^4/4 + 2x^3/3 - 3x^2/2 + 5x + C$, β) $-1/(3x^3) + C$, γ) $4y^2 - \frac{8}{3}\,y^{3/4} + C$, δ) $\tan\theta + C$, ε) $2\sqrt{x+3} + C$, στ) $\frac{1}{2}\sin^2\theta + C$, ζ) $-1/(x^3+1) + C$, η) $-1/g(x) + C$, θ) $\left[\frac{x^3}{3} + \frac{2x^{3/2}}{3}\right]_0^1 = 1$, ι) $\left[\frac{u^3}{6} + \frac{1}{4u^4}\right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{17}{48}$, ια) $\left[-\frac{u^4}{8}\right]_1^{-1} = 0$, ιβ) $\left[\frac{4u^3}{3}\right]_0^{\sqrt{2}/2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

4. α) $dy/dx = 2x/\sqrt{2x^2+7}$, β) $dy/dx = -f(x)$, γ) $dy/dx = -\sin(\tan^2 x)/\cos^2 x$, δ) $dy/dx = 2/(1+4x^2) - 1/(1+x^2)$.

5. α) Η $f(x)$ αλλάζει πρόσημο σε δύο σημεία, στα $x=-2$ και $x=0$, άρα ολοκληρώνουμε στα τρία διαστήματα $[-3,-2]$, $[-2,0]$ και $[0,2]$ και αθροίζοντας τις απόλυτες τιμές βρίσκουμε $E_{\sigma\upsilon\nu} = 28/3$.
β) Η $f(x)$ δεν αλλάζει πρόσημο στο διάστημα ολοκλήρωσης $[0,8]$ οπότε βρίσκουμε $E_{\sigma\upsilon\nu} = 2$.
γ) Οι $f(x)$ και $g(x)$ τέμνονται στα $x=0$ και $x=1$ και ισχύει $f(x) \geq g(x)$ στο διάστημα αυτό, άρα $E_{\sigma\upsilon\nu} = 1/3$.
δ) Οι $f(x)$ και $g(x)$ τέμνονται στα $x=-1$ και $x=2$ και ισχύει $f(x) \geq g(x)$ στο διάστημα αυτό, άρα $E_{\sigma\upsilon\nu} = 9/2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ 10ης ΣΕΙΡΑΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. α) $2\ln(\frac{11}{3})$, β) $\frac{1}{3\pi}\ln|\sin(3\pi u)| + C$, γ) $\frac{3}{2}\ln 2$, δ) $-(\ln 8)^2/\ln x + C$, ε) $\frac{1}{3}\,e^{3x} - 5e^{-x} + C$, στ) $2/3$, ζ) e, η) $1/\ln 2$, θ) $\frac{1}{2}\,\tan^{-1}(2x+1) + C$.

2. α) $\sin^{-1}(x-2)+C$, β) $2\cosh(\sqrt{x})+C$, γ) $\sinh^{-1}(\sqrt{3})$, δ) $2\ln 3-4$, ε) $2x^2-x+2\tan^{-1}(x/2)+C$, στ) $-\ln|x+1|+\ln|x^2+1|+3\tan^{-1}x+C$, ζ) $-4\ln|x-1|+5\ln|x-2|+C$, η) $-\frac{1}{2}\,x\cos(2x)+\frac{1}{4}\,\sin(2x)+C$, θ) $4\ln 2-\frac{15}{16}$.

3. α) $\ln 2+\pi/2-2$, β) $x\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$, γ) $\pi r^2/2$, δ) $\sqrt{(x+1)^2-4}-\ln\left|\frac{x+1}{2}+\frac{\sqrt{(x+1)^2-4}}{2}\right|+C$, ε) $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{4x^2+9}}{2x}-\frac{3}{2x}\right|+C$, στ) $\frac{1}{a^{2n-1}}\int\cos^{2n-1}\theta\,d\theta$, ζ) $\ln(|\sqrt{2}+1)-\ln(\sqrt{2}-1)$, η) $\frac{x}{4}+\frac{1}{4}\sin(2x)+\frac{x}{8}+\frac{1}{32}\sin(4x)+C$, θ) $-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{1}{5}\cos^5 x+C$, ι) $\frac{1}{4}\sin(2x)-\frac{1}{16}\sin(8x)+C$.

4. α) Συγκλίνει (με κριτήριο άμεσης σύγκρισης), β) Αποκλίνει (με κριτήριο οριακής σύγκρισης), γ) Αποκλίνει (με κριτήριο οριακής σύγκρισης).

5. α) $5\sqrt{2}$, β) 3, γ) 1/4, δ) $\ln 3$.