



ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΙΟΥΝΙΟΥ 2014

1. Η θέση ενός σώματος συναρτήσει του χρόνου δίνεται από την $x(t) = t^3 - 9t^2 + 15t - 7$. Καταρχήν, μελετήστε τη συνάρτηση: βρείτε και χαρακτηρίστε τα ακρότατα, τα σημεία καμπής και την ασυμπτωτική συμπεριφορά και σχεδιάστε την γραφική της παράσταση. Στη συνέχεια, περιγράψτε τις μεταβολές της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του σώματος και την πορεία του στο χρονικό διάστημα $(-\infty, +\infty)$.

(2 μονάδες)

2. Δείξτε ότι η αναδρομική ακολουθία $a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n^2/2}$ με $a_1 = 4$ συγκλίνει και βρείτε το όριό της.

(1.5 μονάδες)

3. (α) Να εξετάσετε ως προς την σύγκλιση την σειρά: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(n+1)^2}{3^n}$. (1 μονάδα)

(β) Να βρείτε τη σειρά McLaurin της $f(x) = e^{2x} \cos x$. (1 μονάδα)

4. (α) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$(i) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{2x} \cos x \, dx, \quad (ii) \int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x} \, dx. \quad (2.2 \text{ μονάδες})$$

(β) Να εξετάσετε ως προς την σύγκλιση το ολοκλήρωμα: $\int_0^{\infty} \frac{5+x}{7+x^3} \, dx$. (0.8 μονάδες)

5. (α) Αποδείξτε ότι η $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)^{1/2}$ είναι αρμονική συνάρτηση, δηλαδή ισχύει ότι $f_{xx} + f_{yy} = 0$.

(0.5 μονάδες)

(β) Βρείτε και χαρακτηρίστε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης $g(x, y) = 3xy - x^3 - y^3$.

(1 μονάδα)