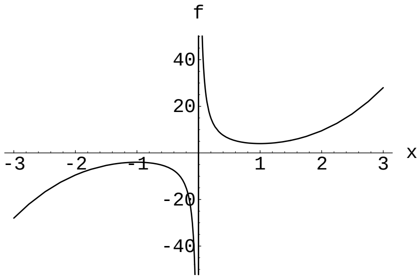
**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ, ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ**
**ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ**
**ΔΙΔΑΣΚΟΥΣΑ: Π. ΚΑΝΤΗ (ΤΜΗΜΑ ΠΕΡΙΤΤΩΝ)**

---

# Λύσεις Θεμάτων Εξεταστικής Σεπτεμβρίου 2014

**1.** Η $f(x)$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbf{R} - \{0\}$ και είναι περιττή αφού $f(-x) = -f(x)$. Ισχύει ότι $f'(x) = 3(x^4 - 1)/x^2 = 3(x^2+1)(x-1)(x+1)/x^2$ και επομένως τα κρίσιμα σημεία είναι τα $x = 0, +1, -1$. Η $f(x)$ είναι αύξουσα για $x < -1$ και $x > 1$ και φθίνουσα για $-1 < x < 0$ και $0 < x < 1$. Η $f(x)$ έχει τοπικό μέγιστο στο $x = -1$ και τοπικό ελάχιστο στο $x = 1$.




Επιπλέον, $f''(x) = 6(x^4+1)/x^3$ και επομένως υπάρχει ένα μόνο σημείο καμπής το $x = 0$. Ισχύει ότι $f''(x) < 0$ για $x < 0$, ενώ $f''(x) > 0$ για $x > 0$. Τέλος, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Η γραφική παράσταση της $f(x)$ φαίνεται στο διπλανό σχήμα και είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων.

**2.** Έστω ότι η ακολουθία είναι αύξουσα. Για $n = 1$, έχουμε $a_2 = \sqrt{2 \cdot 1/2 + 8} = 3 > 1/2$, άρα ισχύει. Έστω ότι ισχύει για $n = k$, δηλαδή $a_{k+1} \geq a_k$. Τότε, για $n = k+1$, γράφουμε: $a_{k+2} = \sqrt{2a_{k+1} + 8} \geq \sqrt{2a_k + 8} = a_{k+1}$, άρα ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό $n$. Αν είναι και μονότονη, τότε το όριό της υπάρχει και δίνεται από τον τύπο: $l = \sqrt{2l+8} \Rightarrow (l+2)(l-4) = 0$. Όμως, η $a_k$ είναι θετικά ορισμένη και αύξουσα, άρα το $l = -2$ απορρίπτεται. Τέλος, θα πρέπει να δείξουμε ότι η ακολουθία είναι φραγμένη από πάνω με $M = 4$. Για $n = 1$, ισχύει ότι $a_2 = 3 < 4$, άρα ισχύει. Έστω ότι ισχύει και για $n = k$, $a_{k+1} \leq 4$. Τότε, για $n = k+1$, έχουμε: $a_{k+2} = \sqrt{2a_{k+1} + 8} \leq \sqrt{2 \cdot 4 + 8} = 4$, άρα ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό $n$. Επομένως, το όριο υπάρχει και είναι $l = 4$.

**3.** (α) **(i)** Η σειρά είναι εναλλασσόμενη και συγκλίνει αφού: η $\alpha_n = (n^3 + n)^{-1/2}$ είναι θετικά ορισμένη, έχει όριο το μηδέν και είναι φθίνουσα. Το τελευταίο αποδεικνύεται εύκολα αφού η σχέση $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$ ανάγεται στην $3n^2 + 3n + 1 > 0$ που είναι αληθές για κάθε $n > 0$. (ii) Η σειρά συγκλίνει και απόλυτα αφού, με βάση το κριτήριο της οριακής σύγκρισης με $\beta_n = n^{-3/2}$ οι δύο σειρές έχουν την ίδια συμπεριφορά άρα συγκλίνουν και οι δύο.

(β) Αναπτύσσουμε την εκθετική συνάρτηση σε σειρά γύρω από το $x = 0$ και βρίσκουμε ότι: $f(x) = x^2 e^{-x} = x^2(1 - x + x^2/2 - x^3/6 + ...) = x^2 - x^3 + x^4/2 - x^3/6 + ....$ Εναλλακτικά, γράφουμε ότι: $f(x) = x^2 \sum (-x)^n/n! = \sum (-1)^n x^{2+n}/n!$. Η παραπάνω είναι μια δυναμοσειρά με ακτίνα σύγκλισης $R = \infty$ αφού για $\forall n$ ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+3}\, n!}{(n+1)!\, x^{n+2}} \right| = |x| \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{n+1}} = 0 < 1.$$

**4.** (α) Καταρχήν βρίσκουμε τα σημεία τομής των δύο καμπυλών $y_1 = x^2$ και $y_2 = \pm\sqrt{x}$. Προφανώς, αυτά βρίσκονται στον θετικά ορισμένο κλάδο της $y_2$ άρα απαιτούμε $x^2 = \sqrt{x}$ και βρίσκουμε $x = 0, 1$. Εύκολα τότε υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα: $\int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\, dx = (2x^{3/2} - x^3)/3|_0^1 = 1/3$.

(β) Ο παρονομαστής εύκολα παραγοντοποιείται ως: $x^3 - 2x^2 + x - 2 = x^2(x-2) + x - 2 = (x^2+1)(x-2)$. Με την μέθοδο των μερικών κλασμάτων το αρχικό κλάσμα σπάει σε δύο επιμέρους της μορφής $A/(x-2)$ και $(Bx+C)/(x^2+1)$. Με απλή άλγεβρα βρίσκουμε ότι $A = -B = -C = 1$. Τότε:

$$\begin{aligned} \int \frac{x+3}{x^3 - 2x^2 + x - 2}\, dx &= \int \left( \frac{1}{x-2} - \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} \right) dx \\ &= \ln|x-2| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) - \arctan(x) + C. \end{aligned}$$

(γ) Το γενικευμένο ολοκλήρωμα, με βάση τα παραπάνω, θα δίνεται από:

$$\lim_{a\to\infty} \left[ \ln|x-2| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) - \arctan(x) \right] \Bigg|_3^a = \lim_{a\to\infty} \ln \frac{a-2}{\sqrt{a^2+1}}$$

$$- \lim_{a\to\infty} \arctan(a) + \frac{1}{2} \ln 10 + \arctan(3) = -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \ln 10 + \arctan(3).$$

**5.** Καταρχήν, βρίσκουμε τις μερικές παραγώγους 1ης τάξης: $g_x = -3x^2 + 2y + 1$ και $g_y = 2y + 2x$. Απαιτώντας τον ταυτόχρονο μηδενισμό τους, παίρνουμε $y = -x$, οπότε $-3x^2 - 2x + 1 = 0$ το οποίο και οδηγεί στις λύσεις $x = (1/3, -1)$. Επομένως, τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης είναι τα $(1/3, -1/3)$ και $(-1, 1)$. Οι παράγωγοι 2ης τάξης έχουν την μορφή: $g_{xx} = -6x$, $g_{yy} = 2$ και $g_{xy} = g_{yx} = 2$. Με αντικατάσταση των κρίσιμων σημείων στη Εσσιανή, $H = g_{xx}g_{yy} - g_{xy}^2 = -4(3x+1)$, βρίσκουμε ότι: $H(1/3, -1/3) = -8 < 0$ και $H(-1, 1) = 8 > 0$ άρα τα δύο κρίσιμα σημεία είναι το πρώτο σαγματικό και το δεύτερο τοπικό ελάχιστο, αντίστοιχα, αφού $g_{xx} = 6 > 0$.