Μάθημα: Κβαντική Θεωρία Ι (9+)

Κατσίμπρα Θεοδώρα 6498 (1)

(1α+) Γνωρίζουμε ότι: $\langle f(u) \rangle = \sum_{i=1}^{M} P(u_i) f(u_i)$ (1)

Άρα για τη μέση τιμή ισχυεί:

$$\langle c f(u) \rangle = \sum_{i=1}^{M} P(u_i)\, c\, f(u_i)$$

(όπου c : σταθερά).

$$= c \sum_{i=1}^{M} P(u_i) f(u_i) = c \langle f(u) \rangle$$

(1b+) Έχουμε: $P(x) = |A_1(x) + A_2(x)|^2 = (A_1(x) + A_2(x))(A_1^*(x) + A_2^*(x))$

$$= A_1(x) A_1^*(x) + A_2(x) A_2^*(x) + A_1(x) A_2^*(x) + A_2(x) A_1^*(x)$$

$$= |A_1(x)|^2 + |A_2(x)|^2 + A_1(x) A_2^*(x) + (A_1(x) A_2^*(x))^*$$

$$= |A_1(x)|^2 + |A_2(x)|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(A_1(x) A_2^*(x))$$

Για την επίλυση χρησιμοποιώ τις ταυτότητες των μιγαδικών αριθμών:

Έστω $z = a + bi$ ο μιγαδικός αριθμός τότε ισχύουν τα παρακάτω:

$z^* = a - bi$

$z + z^* = 2\mathrm{Re}(z)$

$z - z^* = 2i\,\mathrm{Im}(z)$

$|z|^2 = z z^*$

(1c+) $I(x) = 2Re\left(A_1(x)\, A_2^*(x)\right)$

Επίσης ένας άλλος συμβολισμός για τους μιγαδικούς αριθμούς είναι: $z = |z| e^{i\phi}$ με $z^* = |z| e^{-i\phi}$ όπου $|z| = \sqrt{\alpha^2+b^2}$

Επομένως: $A_1(x) = |A_1(x)| e^{i\phi_1}$

$A_2(x) = |A_2(x)| e^{i\phi_2}$

$$A_1(x) A_2^*(x) = |A_1(x)||A_2(x)| e^{i\phi_1} e^{-i\phi_2}$$

$$= |A_1(x)||A_2(x)| e^{i(\phi_1-\phi_2)}.$$

Όμως γνωρίζω ότι: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

Άρα $R\left(A_1(x) A_2^*(x)\right) = |A_1(x)||A_2(x)| \cos(\phi_1-\phi_2)$

με $|A_1(x)| = \sqrt{P_1(x)}$ και $|A_2(x)| = \sqrt{P_2(x)}$

(1e+) Μια κβαντική κατάσταση συμβολίζεται: $|\psi\rangle$: ket.

$|\psi\rangle = \{\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots \psi_N\}$.

Οπότε: $a|\psi\rangle = \{a\psi_1, a\psi_2, a\psi_3 \dots\}$

$= |\psi'\rangle$ ⇝ Δηλ. μια νέα κβαντική κατάσταση.

1f⁺ Ket: $|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{N} a_i |i\rangle$ (i: διανύσματα βάσης)

Bra: $\langle\psi| = \sum_{i=1}^{N} a_i^* \langle i|$

Έστω $\langle\psi|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{N} a_i^* \langle i| \sum_{j=1}^{N} a_j |j\rangle \Rightarrow$

$$\langle\psi|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j}^{N} a_i^* a_j \langle i|j\rangle$$

Όμως αφού τα $|i\rangle$ είναι διανύσματα βάσης ισχυεί:

$\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$

Άρα τελικά: $\langle\psi|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} a_i^* a_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{N} a_i^* a_i$

$$= \sum_{i}^{N} |a_i|^2.$$

1g⁺ Έστω ότι έχουμε τις κβαντικές καταστάσεις:

$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{N} a_i |i\rangle$ και $|\phi\rangle = \sum_i b_i |i\rangle$

Οπότε: $\langle\psi|\phi\rangle = \sum_i a_i^* \langle i| \sum_j b_j |j\rangle$

$$= \sum_i \sum_j a_i^* b_j \langle i|j\rangle$$

$$= \sum_i a_i^* b_i.$$

1h⁺ $\langle\phi|\psi\rangle = \sum_i b_i^* \langle i| \sum_j a_j |j\rangle = \sum_i \sum_j b_i^* a_j \langle i|j\rangle$

$$= \sum_i a_i b_i^*$$

1ȷ⁺

$$|\phi\rangle = \sum_i b_i |i\rangle \xrightarrow{\text{κανονικ.}} |\psi\rangle = \sum_i \frac{b_i}{\sqrt{\langle\phi|\phi\rangle}} |i\rangle$$

Άρα $\langle\psi|\psi\rangle = \sum_i \sum_j \frac{b_i^* b_j}{\sqrt{\langle\phi|\phi\rangle}\sqrt{\langle\phi|\phi\rangle}} \langle i|j\rangle$

$$= \sum_i \frac{|b_i|^2}{\langle\phi|\phi\rangle} \quad \left(\text{όμως } \langle\phi|\phi\rangle = \sum |b_i|^2\right)$$

$$= \frac{\sum_i |b_i|^2}{\sum_i |b_i|^2} = 1.$$

1i⁺ Μια τυχαία κατάσταση $|\psi\rangle$ μπορεί να περιγραφεί με βάση τις ιδιοκαταστάσεις της ενέργειας.

$|\psi\rangle = \sum_i a_i |E_i\rangle$ με $\langle E_i | E_j \rangle = \delta_{ij}$

Οπότε για να βρώ το πλάτος της πιθανότητας a_i:

$$|\psi\rangle = \sum_i a_i |E_i\rangle \xRightarrow{\cdot\langle E_j|} \langle E_j|\psi\rangle = \sum_i a_i \langle E_j|E_i\rangle \Rightarrow$$

$$\langle E_j|\psi\rangle = \sum_i a_i \delta_{ij} \rightarrow$$

$$a_j = \underbrace{\langle E_j|\psi\rangle}_{}$$

Απλ. το πλάτος της πιθανότητας για την ενέργεια E_j