

Όνομα: Γιώργος Χαβακίνης

ΑΜ: 6477

1. Το ενεργειακό φάσμα ενός κβαντικού συστήματος είναι  $E_1=2$ ,  $E_2=5$ ,  $E_3=7$ . Βρείτε τις ιδιοτιμές της Hamiltonian  $H$  και όλα τα στοιχεία πίνακα της  $H$  στην βάση ιδιοκαταστάσεων της  $H$ . Βρείτε ακόμα την αναμενόμενη τιμή της ενέργειας και την τυπική απόκλιση  $\sigma$  στην κανονικοποιημένη κατάσταση  $|\psi\rangle = 0.5 |E_1\rangle + 0.5 |E_2\rangle + \lambda |E_3\rangle$ . (++++)
2. Δείξτε ότι ο ερμητιανός συζυγής γινομένου τελεστών ισούται με το γινόμενο των συζυγών σε αντεστραμμένη σειρά. (++)

2) Εστω τελεστές  $Q$  και  $R$ 

$$(QR)_{ij}^{\dagger} = (QR)_{ji}^* = (\langle j | QR | i \rangle)^* = \langle i | RQ | j \rangle = (RQ)_{ji}$$

$$= (\langle j | Q | k \rangle \langle k | R | i \rangle)^* = \sum_k (\langle j | Q | k \rangle \langle k | R | i \rangle)^* =$$

$$= \sum_k (Q_{jk}^* R_{ki}^*) = \sum_k (R_{ik}^{\dagger} Q_{kj}^{\dagger}) = (R^{\dagger} Q^{\dagger})_{ij}$$

Χρησιμοποιήθηκε ο ταυτοτικός τελεστής  $I = \sum_k |k\rangle \langle k|$ 

Επειδή η κατάσταση είναι κανονικοποιημένη

$$|0,5|^2 + |0,5|^2 + |\lambda|^2 = 1 \Rightarrow 0,25 + 0,25 + |\lambda|^2 = 1 \Rightarrow |\lambda|^2 = 0,5$$

$$\Rightarrow |\lambda|^2 = 0,5 \Rightarrow \lambda = \sqrt{0,5}$$

$$1. H|E_i\rangle = E_i|E_i\rangle$$

$$\sum_i E_i |E_i\rangle \langle E_i|E_i\rangle = \sum_i^3 E_i |E_i\rangle = E_1|E_1\rangle + E_2|E_2\rangle + E_3|E_3\rangle$$

Με αντιπαράβολη από τη δωθείσα κατάσταση ~~είδους~~  
έχουμε ιδιοτιμές

$$E_1 = 2$$

$$E_2 = 5$$

$$E_3 = 7$$

• Η Hamiltonian ορίζεται από βάση καθορισμένων ενεργειών, άρα:

$$H_{ij} = \langle E_i | H | E_j \rangle = \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Εφόσον έχουμε τις ιδιοτιμές, ο διαγωνιοποιημένος πίνακας θα είναι

$$H_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Για τη μέση τιμή της ενέργειας:

$$\begin{aligned} \langle \Psi | H | \Psi \rangle &= \sum_i E_i |a_i|^2 = E_1 \cdot 0,25 + E_2 \cdot 0,25 + 0,5E_3 = \\ &= 2 \cdot 0,25 + 5 \cdot 0,25 + 7 \cdot 0,5 = 0,5 + 1,25 + 3,5 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \langle E \rangle = 5,25 = \langle \Psi | H | \Psi \rangle \end{aligned}$$

$$\sigma = \sqrt{\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2}$$

Κβαντική Ι

Τεστ 2

21/10/14

Όνομα: Γιώργος Καραγιάννης

ΑΜ: 6477

1. Το ενεργειακό φάσμα ενός κβαντικού συστήματος είναι  $E_1=2$ ,  $E_2=5$ ,  $E_3=7$ . Βρείτε τις ιδιοτιμές της Hamiltonian  $H$  και όλα τα στοιχεία πίνακα της  $H$  στην βάση ιδιοκαταστάσεων της  $H$ . Βρείτε ακόμα την αναμενόμενη τιμή της ενέργειας και την τυπική απόκλιση  $\sigma$  στην κανονικοποιημένη κατάσταση  $|\psi\rangle = 0.5 |E_1\rangle + 0.5 |E_2\rangle + \lambda |E_3\rangle$ . (++++)
2. Δείξτε ότι ο ερμητιανός συζυγής γινόμενων τελεστών ισούται με το γινόμενο των συζυγών σε αντεστραμμένη σειρά. (++)

$$2. \langle E^2 \rangle = 4 \cdot 0,25 + 25 \cdot 0,25 + 49 \cdot 0,5 =$$

$$= 1 + 6,25 + 24,5 = 31,75$$

$$\langle E \rangle^2 = 5,25^2 \approx 27,5$$

$$\begin{array}{r} 5,25 \\ 5,25 \\ \hline 6,25 \\ 50 \\ 25 \\ \hline 56,25 \end{array}$$

Άρα τυπική απόκλιση

$$\sigma = \sqrt{31,75 - 27,5} = \sqrt{4,25} \approx 2,1$$