6+

Κβαντική Ι

Τεστ 3

29/10/14

Όνομα: Νάκας Θεόδωρος

ΑΜ: 6557

1.

a. Δείξτε ότι ο τελεστής της ορμής είναι ερμητειανός. (++)

b. Διατυπώστε και αποδείξτε το θεώρημα Ehrenfest. (++)

2. Δίνεται η ορθοκανονική βάση |i >, i=1,2 και ο τελεστής Q που στην βάση |i > έχει την μορφή $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Δίνεται και η κβαντική κατάσταση |1>'=A(|1>-|2>) όπου A σταθερά κανονικοποίησης. Βρείτε όλες τις σταθερές A. Βρείτε την κβαντική κατάσταση |2>' ώστε η βάση |i >' (i=1,2) να είναι ορθοκανονική. Βρείτε την μορφή του Q στην νέα βάση |i >'. (++)

1) a) Είναι: $\hat{p} = -i\hbar \dfrac{\partial}{\partial x}$. Για να είναι ερμητιανός πρέπει:

$$\langle \varphi | \hat{p} | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{p} | \varphi \rangle^*$$

$$\langle \varphi | \hat{p} | \psi \rangle = \langle \varphi | I \hat{p} | \psi \rangle = \langle \varphi | \left(\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, |x\rangle\langle x| \right) \hat{p} | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \langle \varphi | x \rangle \langle x | \hat{p} | \psi \rangle$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \langle x | \varphi \rangle^* \left(-i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = -i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \varphi(x)^* \frac{\partial \psi}{\partial x} = \left(i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \varphi(x) \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right)^*$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(-i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^* \varphi(x) \right)^* = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \langle x | \hat{p} | \psi \rangle^* \langle x | \varphi \rangle \right)^* = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \langle \psi | \hat{p} | x \rangle \langle x | \varphi \rangle \right)^*$$

$$= \left(\langle \psi | \left(\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, |x\rangle\langle x| \right) \hat{p} | \varphi \rangle \right)^* = \langle \psi | \hat{p} | \varphi \rangle^* \Rightarrow \langle \varphi | \hat{p} | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{p} | \varphi \rangle^*$$

b) Είναι: $i\hbar \dfrac{d}{dt} \langle \psi | Q | \psi \rangle = \langle [Q, H] \rangle + i\hbar \langle \psi | \dfrac{\partial Q}{\partial t} | \psi \rangle$ (Θεώρημα Ehrenfest)

$$i\hbar \frac{\partial|\psi\rangle}{\partial t} = H|\psi\rangle$$

και $$-i\hbar \frac{\partial\langle\psi|}{\partial t} = \langle\psi|H$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\left(\langle\psi|Q|\psi\rangle\right) = i\hbar\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\langle\psi|\right)Q|\psi\rangle + \langle\psi|\frac{\partial Q}{\partial t}|\psi\rangle + \langle\psi|Q\left(\frac{\partial|\psi\rangle}{\partial t}\right)\right]$$

$$= \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\langle\psi|\right)Q|\psi\rangle + i\hbar\langle\psi|\frac{\partial Q}{\partial t}|\psi\rangle + \langle\psi|Q|\left(i\hbar\frac{\partial|\psi\rangle}{\partial t}\right)$$

$$= \left(-\langle\psi|H\right)Q|\psi\rangle + i\hbar\langle\psi|\frac{\partial Q}{\partial t}|\psi\rangle + \langle\psi|QH|\psi\rangle$$

$$= \langle\psi|(QH - HQ)|\psi\rangle + i\hbar\left\langle\frac{\partial Q}{\partial t}\right\rangle \Rightarrow$$

$$i\hbar\langle Q\rangle = \langle[Q,H]\rangle + i\hbar\left\langle\frac{\partial Q}{\partial t}\right\rangle$$

2) $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\Big\{$ $|1'\rangle = A(|1\rangle - |2\rangle)$ και έστω $|2'\rangle = a|1\rangle + b|2\rangle$

Πρέπει: $\langle 1'|1'\rangle = 1 \Rightarrow \left[A^*(\langle 1| - \langle 2|)\right]\left[A(|1\rangle - |2\rangle)\right] = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow |A|^2\left(\langle 1|1\rangle + \langle 2|2\rangle\right) = 1 \Rightarrow$

(αυθαίρετα)

$\Rightarrow |A|^2\, 2 = 1 \Rightarrow |A|^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Επίσης πρέπει: $\langle 2'|1'\rangle = 0 \Rightarrow (a^*\langle 1| + b^*\langle 2|)(|1\rangle - |2\rangle)\frac{1}{\sqrt{2}} = 0$

και

$\langle 2'|2'\rangle = 1 \Rightarrow (a^*\langle 1| + b^*\langle 2|)(a|1\rangle + b|2\rangle) = 1 \Rightarrow |a|^2 + |b|^2 = 1$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a^* - b^* = 0 \Rightarrow a^* = b^* \Rightarrow a = b \\ |a|^2 + |b|^2 = 1 \end{cases}$ Με $a = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Έτσι:

$$|2'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle)$$

και $$|1'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |2\rangle)$$

Κβαντική Ι

Τεστ 3

29/10/14

Όνομα: ...Νάκας Θεόδωρος...

ΑΜ: ...6557...

1.
   a. Δείξτε ότι ο τελεστής της ορμής είναι ερμητειανός. (++)
   b. Διατυπώστε και αποδείξτε το θεώρημα Ehrenfest. (++)

2. Δίνεται η ορθοκανονική βάση |i >, i=1,2 και ο τελεστής Q που στην βάση |i > έχει την μορφή $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Δίνεται και η κβαντική κατάσταση |1>'=A(|1>-|2>) όπου A σταθερά κανονικοποίησης. Βρείτε όλες τις σταθερές A. Βρείτε την κβαντική κατάσταση |2>' ώστε η βάση |i >' (i=1,2) να είναι ορθοκανονική. Βρείτε την μορφή του Q στην νέα βάση |i >'. (++)

2) Συνέχεια: Δείξαμε: $|1'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |2\rangle)$

$$|2'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle)$$

Στη βάση $|i\rangle$ είναι $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\langle i|Q|j\rangle = Q_{ij} = \langle i|I\,Q\,I|j\rangle = \langle i|\left(\sum_{n=1}^{2} |n'\rangle\langle n'|\right) Q \left(\sum_{m=1}^{2} |m'\rangle\langle m'|\right)|j\rangle$$

$$= \sum_{n=1}^{2}\sum_{m=1}^{2} \langle i|n'\rangle\langle n'|Q|m'\rangle\langle m'|j\rangle = \sum_{n,m=1}^{2} T_{in'}\,Q_{n'm'}\,T^{\dagger}_{m'j} \Rightarrow$$

$$Q_{ij} = \sum_{n,m=1}^{2} T_{in'}\,Q_{n'm'}\,T^{\dagger}_{m'j} \quad \text{και αντίστροφα:} \quad Q_{n'm'} = \sum_{i,j=1}^{2} T^{\dagger}_{n'i}\,Q_{ij}\,T_{jm'}$$

$$T_{11} = \langle 1|1'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad T_{12} = \langle 1|2'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad T_{21} = \langle 2|1'\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad T_{22} = \langle 2|2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad T^{+} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ +1 & 1 \end{pmatrix}$$

( )

$$Q' = T^{+} Q T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$