1^{η} Σελίδα

6+

Κβαντική Ι

Τεστ 4

4/11/14

Όνομα: ΚΑΤΕΡΙΝΑ ΖΥΡΙΛΙΟΥ

ΑΜ: 6903

1. Ελεύθερο σωμάτιο έχει κυματοσυνάρτηση που περιγράφεται από Gaussian με διασπορά σ και μέση τιμή μηδέν. $A\, e^{-x^2/4\sigma^2}$
   a. Βρείτε την κανονικοποιημένη μορφή της κυματοσυνάρτησης.
   b. Βρείτε το πλάτος πιθανότητας να μετρηθεί ορμή p για το σωμάτιο. $\langle p|\psi\rangle$
   c. Βρείτε την διασπορά της ορμής και δείξτε ότι ικανοποιείται η αρχή της αβεβαιότητας. (++++)
2. Δίνεται το μέτρο τετραγώνου κυματοσυνάρτησης ως: $|\langle x|\psi,t\rangle|^2 = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}\hbar^2|b|^2}\exp\left\{\frac{-(x-p_0t/m)^2\sigma^2}{2\hbar^4|b|^4}\right\}$ όπου $b^2=\left(\frac{\sigma^2}{\hbar^2}+\frac{it}{2m\hbar}\right)$. Περιγράψτε ποιοτικά τι περιγράφει η παραπάνω κυματοσυνάρτηση και εξηγείστε φυσικά την αύξηση της διασποράς με τον χρόνο. Αναφέρετε χωρίς απόδειξη την μέση τιμή της θέσης και της ορμής για κάθε χρονική στιγμή t. (++)

1) α. $\psi(x) = A\, e^{-x^2/4\sigma^2}$ Κανονικοποίηση $\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi(x)|^2\,dx = 1$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}|A|^2 e^{-x^2/2\sigma^2}dx = 1 \Rightarrow |A|^2\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2/2\sigma^2}dx = 1.$$

Έστω $z=\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}$ $dz=\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}dx$ άρα

$$\sqrt{2}\sigma|A|^2\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-z^2}dz = 1 \Rightarrow \sqrt{2}\,\sigma\,|A|^2\sqrt{\pi} = 1 \Rightarrow$$

$$|A| = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}} \Rightarrow \boxed{|A| = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}}}$$

Άρα $\psi(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}}\,e^{-x^2/4\sigma^2}$

β. $\langle p|\psi\rangle \underset{I=\int dx|x\rangle\langle x|}{=} \int dx\,\langle p|x\rangle\langle x|\psi\rangle = \int dx\,\psi_p^*(x)\,\psi(x) =$

$$= \int dx\,\frac{1}{\sqrt{h}}e^{-ipx/\hbar}\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}}e^{-x^2/4\sigma^2} = \frac{1}{\sqrt{h}\,(2\pi\sigma^2)^{1/4}}\int dx\; e^{-\left(\frac{x^2}{4\sigma^2}+\frac{ipx}{\hbar}\right)}$$

Έστω $b = 1/2\sigma$ $\quad a = \frac{ip}{\hbar}$ Το $\frac{x^2}{4\sigma^2} + \frac{ipx}{\hbar}$ γράφεται

$$\frac{x^2}{4\sigma^2} + \frac{ipx}{\hbar} = (bx)^2 + ax + \left(\frac{a}{2b}\right)^2 - \left(\frac{a}{2b}\right)^2$$ ← συμπλήρωμα τετραγώνου.

$$= \left(bx + \frac{a}{2b}\right)^2 - \left(\frac{a}{2b}\right)^2$$

Τότε $\langle p|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{h}\,(2\pi\sigma^2)^{1/4}} \int dx\, e^{-\left(bx + \frac{a}{2b}\right)^2} e^{(a/2b)^2}$

$$\langle p|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{h}\,(2\pi\sigma^2)^{1/4}}\, e^{(a/2b)^2} \int dx\, e^{-\left(bx + \frac{a}{2b}\right)^2}$$

Έστω το ολοκλήρωμα $I = \int dx\, e^{-\left(bx + \frac{a}{2b}\right)^2}$ θέτω

$z = bx + \frac{a}{2b}$ με $dz = b\,dx$ συνεπώς

$$I = \frac{1}{b}\int e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{b}$$

οπότε $\langle p|\psi\rangle = \frac{\sqrt{\pi}}{b\sqrt{h}\,(2\pi\sigma^2)^{1/4}}\, e^{\left(\frac{ip2\sigma}{\hbar 2}\right)^2} =$

$$\langle p|\psi\rangle \boxed{= \frac{\sqrt{\pi}\,2\sigma}{\sqrt{2\pi\hbar}\,(2\pi\sigma^2)^{1/4}}\, e^{\left(\frac{ip\sigma}{\hbar}\right)^2} = \psi(p)}$$

γ. Για τη διασπορά της ορμής. $\sigma_p = \sqrt{\langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2}$

$$\langle p\rangle = \langle\psi|p|\psi\rangle \xrightarrow{I} \int dp\, \langle\psi|p\rangle\langle p|p|\psi\rangle = \int dp\, p\, \psi^*(p)\,\psi(p) = \int dp\, p\,|\psi(p)|^2$$

$$\langle p\rangle = \int dp\, p\, \frac{4\sigma\pi}{2\pi\hbar\,(2\pi\sigma^2)^{1/2}}\, e^{-2p^2\sigma^2/\hbar^2} = \frac{2\sigma}{\hbar(2\pi\sigma^2)^{1/2}} \int dp\, p\, e^{-2p^2\sigma^2/\hbar^2} = 0$$

αφού είναι περιττή συνάρτηση.

2η Σελίδα

Κβαντική Ι

Τεστ 4

4/11/14

Όνομα: ……Κατερινα……………Ζυριλιου……………………………

ΑΜ: ……6903……

1. Ελεύθερο σωμάτιο έχει κυματοσυνάρτηση που περιγράφεται από Gaussian με διασπορά σ και μέση τιμή μηδέν.
    a. Βρείτε την κανονικοποιημένη μορφή της κυματοσυνάρτησης.
    b. Βρείτε το πλάτος πιθανότητας να μετρηθεί ορμή p για το σωμάτιο.
    c. Βρείτε την διασπορά της ορμής και δείξτε ότι ικανοποιείται η αρχή της αβεβαιότητας. (++++)
2. Δίνεται το μέτρο τετραγώνου κυματοσυνάρτησης ως: $|\langle x|\psi,t\rangle|^2 = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}\hbar^2|b|^2}\exp\left\{\frac{-(x-p_0t/m)^2\sigma^2}{2\hbar^4|b|^4}\right\}$ όπου $b^2 = \left(\frac{\sigma^2}{\hbar^2} + \frac{it}{2m\hbar}\right)$. Περιγράψτε ποιοτικά τι περιγράφει η παραπάνω κυματοσυνάρτηση και εξηγείστε φυσικά την αύξηση της διασποράς με τον χρόνο. Αναφέρετε χωρίς απόδειξη την μέση τιμή της θέσης και της ορμής για κάθε χρονική στιγμή t. (++)

γ. Συνέχεια

$$\langle p^2\rangle = \int dp\, p^2 |\psi(p)|^2 = \int dp\, p^2 \frac{4\pi\sigma^2}{2\pi\hbar(2\pi\sigma^2)^{1/2}} e^{-2p^2\sigma^2/\hbar^2}$$

$$= \frac{2\sigma^2}{\hbar\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} dp\, p^2 e^{-2p^2\sigma^2/\hbar^2} \xrightarrow{\text{άρτια}}$$

$$\langle p^2\rangle = \frac{2\sigma}{\hbar\sqrt{2\pi}}\, 2\int_0^{+\infty} dp\, p^2 e^{-\frac{2p^2\sigma^2}{\hbar^2}}$$

Έστω το ολοκλήρωμα $I = \int_0^{+\infty} dp\, p^2\, e^{-p^2\frac{2\sigma^2}{\hbar^2}}$

$$\left(e^{-p^2\frac{2\sigma^2}{\hbar^2}}\right)' = -e^{-p^2 2\sigma^2/\hbar^2}\, 2\cdot\frac{2\sigma^2}{\hbar^2}p = -\frac{4\sigma^2}{\hbar^2}p\, e^{-p^2 2\sigma^2/\hbar^2}$$

άρα $I = -\frac{\hbar^2}{4\sigma^2}\int_0^{+\infty} dp\, \frac{p^2}{\cancel{p}}\left(e^{-p^2 2\sigma^2/\hbar^2}\right)'$ <u>παραγοντική</u>.

$$I = -\frac{\hbar^2}{4\sigma^2}\left[\cancel{\left[p\, e^{-p^2 2\sigma^2/\hbar^2}\right]_0^{+\infty}} - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dp\,(p)'\left(e^{-p^2 2\sigma^2/\hbar^2}\right)\right] = \frac{1}{8}\frac{\hbar^2}{\sigma^2}\int_{-\infty}^{+\infty} dp\, e^{-p^2 2\sigma^2/\hbar^2}$$

Έστω $z = \sqrt{2}\sigma p/\hbar$ με $dz = \frac{\sqrt{2}\sigma}{\hbar}dp$

άρα $I = \frac{1}{8}\frac{\hbar^2}{\sigma^2}\frac{\hbar}{\sqrt{2}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}dz$

$$I = \frac{1}{8}\frac{\hbar^3}{\sigma^3\sqrt{2}}\sqrt{\pi}$$

τότε $\langle p^2\rangle = \frac{2\sigma}{\hbar\sqrt{2\pi}}\cdot 2\,\frac{\hbar^3\sqrt{\pi}}{8\sigma^3\sqrt{2}} = \frac{4\sigma\hbar^3\cancel{\sqrt{\pi}}}{\hbar\sqrt{2}\cancel{\sqrt{\pi}}8\sigma^3\sqrt{2}} =$

$$= \frac{4\hbar^3}{\hbar 2\cdot 8\sigma^2} = \frac{1}{4}\frac{\hbar^2}{\sigma^2}$$

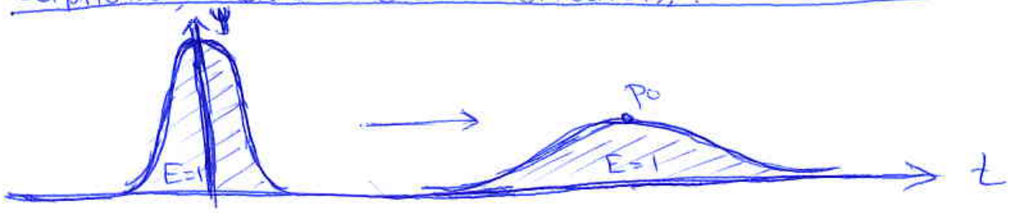
άρα $\sigma_p = \sqrt{\langle p^2\rangle - \underbrace{\cancel{\langle p\rangle}^2}_{0}} = \sqrt{\frac{\hbar^2}{4\sigma^2}} = \frac{\hbar}{2\sigma}$

Γνωρίζω ότι $\sigma_x = \sigma$

Από αρχή της αβεβαιότητας γνωρίζουμε ότι $\sigma_x\sigma_y = \frac{\hbar\cancel{\sigma}}{2\cancel{\sigma}} = \hbar/2$

που ισχύει!

2) * Η κυματοσυνάρτηση αυτή μας δείχνει ότι με την πορεία του χρόνου η μορφή της κυματοσυνάρτησης απλώνεται στο χώρο και αναγκαστικά για να διατηρηθεί το εμβαδόν=1 κάτω από την καμπύλη, αυτή θα "κονταίνει" και να απλώνει



Αυτό συμβαίνει διότι υπάρχει μια δεδομένη τιμή για την ορμή p_0 → τότε $v_0 = \frac{p_0}{m}$ αντίστοιχα η αβεβαιότητα στην ταχύτητα είναι $\Delta v_0 = \frac{\Delta p_0}{m}$ και στη θέση $\Delta x_0 t = \Delta v_0$.

$$\Rightarrow \Delta p_0 = m\Delta x_0\cdot t$$

* Η κυματοσυνάρτηση είναι ένα πακέτο που κινείται με το χρόνο αλλά η διασπορά δηλαδή το εύρος κάτω από την καμπύλη αυξάνεται, η καμπύλη απλώνει με το χρόνο.

6 +

Κβαντική Ι

Τεστ 4

4/11/14

Όνομα: Παπικκιώσης Γρηγόριος

ΑΜ: 6995

1. Ελεύθερο σωμάτιο έχει κυματοσυνάρτηση που περιγράφεται από Gaussian με διασπορά σ και μέση τιμή μηδέν.
   a. Βρείτε την κανονικοποιημένη μορφή της κυματοσυνάρτησης.
   b. Βρείτε το πλάτος πιθανότητας να μετρηθεί ορμή p για το σωμάτιο.
   c. Βρείτε την διασπορά της ορμής και δείξτε ότι ικανοποιείται η αρχή της αβεβαιότητας. (++++)
2. Δίνεται το μέτρο τετραγώνου κυματοσυνάρτησης ως: $|\langle x|\psi,t\rangle|^2 = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}\hbar^2|b|^2}\exp\left\{\frac{-(x-p_0t/m)^2\sigma^2}{2\hbar^4|b|^4}\right\}$ όπου $b^2 = \left(\frac{\sigma^2}{\hbar^2}+\frac{it}{2m\hbar}\right)$. Περιγράψτε ποιοτικά τι περιγράφει η παραπάνω κυματοσυνάρτηση και εξηγείστε φυσικά την αύξηση της διασποράς με τον χρόνο. Αναφέρετε χωρίς απόδειξη την μέση τιμή της θέσης και της ορμής για κάθε χρονική στιγμή t. (++)

1)a) $\psi(x,0) = \langle x|\psi\rangle = A\,e^{-x^2/4\sigma^2}$

πρέπει $\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi(x)|^2dx = 1 = \int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*(x)\psi(x)dx = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}|A|^2 e^{-x^2/2\sigma^2}dx = 1$

$\Rightarrow |A|^2\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx = 1$, έστω $\xi = \frac{x}{\sqrt{2}\sigma} \Rightarrow d\xi = \frac{dx}{\sqrt{2}\sigma}$

$dx = \sqrt{2}\sigma\, d\xi$, επομένως $\int_{-\infty}^{+\infty}|A|^2 e^{-\xi^2}\sqrt{2}\sigma\, d\xi = 1 \Rightarrow$

$|A|^2\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\xi^2}d\xi = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \Rightarrow |A|^2\sqrt{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \Rightarrow$

$|A|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma^2}} = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} \Rightarrow$ επομένως $|A| = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}}$

οπότε ~~ααα~~ $A = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}}$ (σταθερά κανονικοποίησης)

1b) το πλάτος πιθανότητας να μετρηθεί ορμή P για το σωμάτιο που βρίσκεται στην κβαντική κατάσταση $|\psi\rangle$ είναι

$\psi(p) = \langle p|\psi\rangle = \langle p|I|\psi\rangle = \langle p|\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|x\rangle\langle x|dx\right)|\psi\rangle$

επομένως $\psi(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle p|x\rangle\langle x|\psi\rangle dx$

$\langle p|x\rangle = u_p^*(x) = \frac{1}{\sqrt{h}} e^{-\frac{ipx}{\hbar}}$, $\langle x|\psi\rangle = \psi(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}} \cdot e^{-x^2/4\sigma^2}$

συνεπώς $\psi(p) = \frac{1}{\sqrt{h}\cdot(2\pi\sigma^2)^{1/4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{x^2}{4\sigma^2} + \frac{ipx}{\hbar}\right)} dx$

$$\frac{x^2}{4\sigma^2} + \frac{ipx}{\hbar} = \left(\frac{x}{2\sigma}\right)^2 + \frac{ipx}{\hbar} \quad (1)$$

έστω $2\tilde{a}\tilde{b} = \frac{ipx}{\hbar} \Rightarrow \cancel{2}\frac{\cancel{x}}{\cancel{2}\sigma}\tilde{b} = \frac{ip\cancel{x}}{\hbar} \Rightarrow \boxed{\tilde{b} = \frac{\sigma p i}{\hbar}}$

επομένως στην (1) προσταφαιρώ το $\tilde{b}^2 = \left(\frac{\sigma p i}{\hbar}\right)^2$

Δηλαδή $\left(\frac{x}{2\sigma}\right)^2 + \frac{ipx}{\hbar} + \left(\frac{\sigma p i}{\hbar}\right)^2 - \left(\frac{\sigma p i}{\hbar}\right)^2 = \left(\frac{x}{2\sigma} + \frac{i\sigma p}{\hbar}\right)^2 + \left(\frac{\sigma p}{\hbar}\right)^2$

οπότε $\psi(p) = \langle p|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{h}(2\pi\sigma^2)^{1/4}} e^{-\left(\frac{\sigma p}{\hbar}\right)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{x}{2\sigma} + \frac{i\sigma p}{\hbar}\right)^2} dx$

θέτω $\frac{x}{2\sigma} + \frac{i\sigma p}{\hbar} = w \Rightarrow \frac{dx}{2\sigma} = dw \Rightarrow \boxed{dx = 2\sigma dw}$

επομένως $\psi(p) = \langle p|\psi\rangle = \frac{2\sigma e^{-\left(\frac{\sigma p}{\hbar}\right)^2}}{\sqrt{h}(2\pi\sigma^2)^{1/4}} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-w^2} dw}_{\sqrt{\pi}}$

$$\boxed{\psi(p) = \frac{2\sqrt{\pi}\sigma}{\sqrt{h}(2\pi\sigma^2)^{1/4}} e^{-\left(\frac{\sigma p}{\hbar}\right)^2}}$$

Κβαντική Ι

Τεστ 4

4/11/14

Όνομα: Παπαγιαννίδης Γρηγόριος

ΑΜ: 6995

1. Ελεύθερο σωμάτιο έχει κυματοσυνάρτηση που περιγράφεται από Gaussian με διασπορά σ και μέση τιμή μηδέν.
    a. Βρείτε την κανονικοποιημένη μορφή της κυματοσυνάρτησης.
    b. Βρείτε το πλάτος πιθανότητας να μετρηθεί ορμή p για το σωμάτιο.
    c. Βρείτε την διασπορά της ορμής και δείξτε ότι ικανοποιείται η αρχή της αβεβαιότητας. (++++)
2. Δίνεται το μέτρο τετραγώνου κυματοσυνάρτησης ως: $|\langle x|\psi,t\rangle|^2 = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}\hbar^2|b|^2}\exp\left\{\frac{-(x-p_0t/m)^2\sigma^2}{2\hbar^4|b|^4}\right\}$ όπου $b^2 = \left(\frac{\sigma^2}{\hbar^2}+\frac{it}{2m\hbar}\right)$. Περιγράψτε ποιοτικά τι περιγράφει η παραπάνω κυματοσυνάρτηση και εξηγείστε φυσικά την αύξηση της διασποράς με τον χρόνο. Αναφέρετε χωρίς απόδειξη την μέση τιμή της θέσης και της ορμής για κάθε χρονική στιγμή t. (++)

1c) Η κυματοσυνάρτηση της θέσης $\psi(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} e^{-x^2/4\sigma^2}$

από υπόθεση η διασπορά της θέσης $\boxed{\sigma_x^2 = \sigma^2} \Rightarrow \boxed{\sigma_x = \sigma}$

$$\psi(p) = \frac{2\sqrt{\pi}\,\sigma}{\sqrt{\hbar}(2\pi\sigma^2)^{1/4}} e^{-\frac{\sigma^2 p^2}{\hbar^2}} \sim e^{-\frac{p^2}{\frac{\hbar^2}{\sigma_p^2}}}$$

ταυτοποιώντας τους παρονομαστές των δύο παραπάνω εκθετικών των εκάστοτε κυματοσυναρτήσεων παρατηρούμε ότι

$$4\sigma^2 = \frac{\hbar^2}{\sigma_p^2} \Rightarrow \sigma_p^2 = \frac{\hbar^2}{4\sigma^2} \Rightarrow \boxed{\sigma_p = \frac{\hbar}{2\sigma}}$$

~~Η αρχή της αβεβαιότητας~~ επομένως η αβεβαιότητα στην θέση είναι $\sigma_x = \sigma$, ενώ στην ορμή $\sigma_p = \frac{\hbar}{2\sigma}$

Δηλαδή $\sigma_x \cdot \sigma_p = \sigma \cdot \frac{\hbar}{2\sigma} = \frac{\hbar}{2}$ σε πλήρη συμφωνία με την αρχή της αβεβαιότητας

2) Η $|\langle x|\psi(t)\rangle|^2 = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}\hbar^2|b|^2}\exp\left[-\frac{(x-P_0t/m)^2\sigma^2}{2\hbar^4|b^4|}\right]$

Περιγράφει ένα συνεχές σύνολο πλατών πιθανότητας να βρεθεί το σωμάτιο σε ένα σημείο του χώρου $|x\rangle$ το οποίο εξαρτάται από τον χρόνο και μετατοπίζεται με ταχύτητα $v_0 = \frac{P_0}{m}$. Η διασπορά του κυματοπακέτου $\frac{2\hbar^4|b^4|}{\sigma^2}$ συγκρινόμενη :

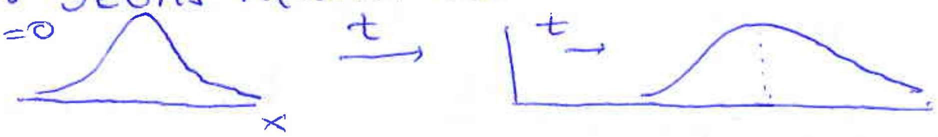
με την διασπορά της κυματοσυνάρτησης του ερωτήματος 1) είναι $2\sigma^2 = \frac{2\hbar^4|b^4|}{\sigma^2(t)} \Rightarrow \sigma^2(t) = \frac{\hbar^4|b|^4}{\sigma^2}$

με $|b^2| = \sqrt{\left(\frac{\sigma^2}{\hbar^2}\right)^2 + \left(\frac{t}{2m\hbar}\right)^2} \Rightarrow |b^2|^2 = |b^4| = \frac{\sigma^4}{\hbar^4} + \left(\frac{t}{2m\hbar}\right)^2$

$$\sigma^2(t) = \frac{\hbar^4}{\sigma^2}\left(\frac{\sigma^4}{\hbar^4} + \frac{t^2}{4m\hbar^2}\right) = \sigma^2 + \left(\frac{t\hbar}{2m\sigma}\right)^2$$

συνεπώς με την πάροδο του χρόνου το συγκεκριμένο κυματοπακέτο μετατοπίζεται και απλώνεται. Η αύξηση της διασποράς με τον χρόνο οφείλεται στην αβεβαιότητα της ταχύτητας ανά πάσα χρονική στιγμή ($\Delta v = \frac{\sigma_p}{m} = \frac{\hbar}{2m\sigma}$) γεγονός που προσδίδει επιπλέον αβεβαιότητα στην μέτρηση της θέσης $\Delta x \sim \Delta v t = \frac{\hbar t}{2m\sigma}$ κατι το οποίο συμβαίνει όπως εδείχθη στην αύξηση της διασποράς με τον χρόνο

Επειδή η κυματοσυνάρτηση πρέπει να είναι κανονικοποιημένη η μέση τιμή της θέσης πρέπει να είναι μηδέν $\langle x\rangle = 0$.



Για τον ίδιο ακριβώς λόγο και η μέση τιμή της ορμής πρέπει να είναι μηδέν. $\langle p\rangle = 0$, $\left(\langle p\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} p\, e^{f(p^2)}\, dp = 0\right)$