Αρμονικός Ταλαντωτής

Δομή Διάλεξης

Η χρησιμότητα του προβλήματος του αρμονικού ταλαντωτή

Η Hamiltonian και οι τελεστές δημιουργίας και καταστροφής

Το φάσμα ιδιοτιμών της Hamiltonian

Οι ιδιοκαταστάσεις (eigenkets) της Hamiltonian.

Αναμενόμενες τιμές θέσης και ορμής

Χρονική εξέλιξη καταστάσεων και αναμενόμενων τιμών.

Σύνοψη

Αρμονικός Ταλαντωτής: Ορισμός και Χρησιμότητα

Σωμάτιο που υπακούει σε δυναμικό $V(x)=1/2\ k\ x^2$ (όπου k θετική σταθερά) λέγεται αρμονικός ταλαντωτής και για την δύναμη ισχύει $F=-k\ x$.

Όλα τα δυναμικά κοντα στα ελάχιστά τους (θέσεις ισορροπίας) συμπεριφέρονται σαν αρμονικοί ταλαντωτές.

Ανάπτυγμα Taylor δυναμικού κοντά στο ελάχιστό του:

$$V(x) = \text{σταθερά} + \tfrac{1}{2}V''x^2 + \mathrm{O}(x^3)$$

6a+

Αντίστοιχο ανάπτυγμα δύναμης: $F = -V''x + \mathrm{O}(x^2)$

Τα περισσότερα συστήματα στην φύση είναι κοντά στην ισορροπία. Άρα συμεριφέρονται κατά προσέγγιση σαν αρμονικοί ταλαντωτές!

Hamiltonian και τελεστές $A^\dagger$, A

Η Hamiltonian ενος αρμονικού ταλαντωτή έχει την μορφή

$$H = \frac{1}{2m}\{p^2 + (m\omega x)^2\}$$

Η δυναμική ενός συστήματος καθορίζεται απο τις ιδιοκαταστάσεις και τις ιδιοτιμές της Hamiltonian. Θα τις βρούμε για τον αρμονικό ταλαντωτή.

Θα βρούμε την θεμελιώδη ιδιοτιμή και την ιδιοκατάσταση απο αυτές θα βρούμε τις υπόλοιπες με χρήση των τέλεστών $A^\dagger$ kai A (τελεστές δημιουργίας και καταστοφής). Η διαδικασία είναι αρκετά γενική.

Ορίζουμε τον αδιάστατο τελεστή:

$$A \equiv \frac{m\omega x + \mathrm{i}p}{\sqrt{2m\hbar\omega}}.$$

Ο συζηγής του είναι:

$$A^\dagger = \frac{m\omega x - \mathrm{i}p}{\sqrt{2m\hbar\omega}}$$

Hamiltonian και τελεστές $A^\dagger$, A

Θα βρούμε την σχέση μεταξύ $A^\dagger A$ και Hamiltonian

$$A^\dagger A = \frac{1}{2m\hbar\omega}(m\omega x - ip)(m\omega x + ip) = \frac{1}{2m\hbar\omega}\{(m\omega x)^2 + im\omega[x,p] + p^2\} = \frac{H}{\hbar\omega} - \frac{1}{2}$$

$$H = \hbar\omega(A^\dagger A + \tfrac{1}{2})$$

Όμοια δείχνουμε ότι:

$$AA^\dagger = \frac{H}{\hbar\omega} + \frac{1}{2}.$$

6b+

$$\left.\begin{aligned} A^\dagger A &= \frac{H}{\hbar\omega} - \frac{1}{2} \\ AA^\dagger &= \frac{H}{\hbar\omega} + \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow [A^\dagger, A] = -1$$

$$[AB, C] = [A, C]B + A[B, C]$$

$$[A^\dagger, H] = \hbar\omega[A^\dagger, A^\dagger A] = \hbar\omega A^\dagger[A^\dagger, A] = -\hbar\omega A^\dagger$$

6c+

Ο τελεστής δημιουργίας $A^\dagger$

Ο τελεστής $A^\dagger$ όταν δρά σε ιδιοκαταστάσεις της ενέργειας δημιουργεί νέες ιδιοκαταστάσεις με αυξημένες ιδιοτιμές:

προσθαφαίρεση

$$H|E_n\rangle = E_n|E_n\rangle \Rightarrow A^\dagger E_n|E_n\rangle = A^\dagger H|E_n\rangle = (HA^\dagger + [A^\dagger, H])|E_n\rangle$$

$$= (H - \hbar\omega)A^\dagger|E_n\rangle$$

$$[A^\dagger, H] = \hbar\omega[A^\dagger, A^\dagger A] = \hbar\omega A^\dagger[A^\dagger, A] = -\hbar\omega A^\dagger$$

$$H(A^\dagger|E_n\rangle) = (E_n + \hbar\omega)(A^\dagger|E_n\rangle)$$

6d+

Άρα το ket $|b\rangle \equiv A^\dagger|E_n\rangle$ είναι ιδιοκατάσταση της Hamiltonian με ιδιοτιμή $E_n+\hbar\omega$

Ο τελεστής δημιουργίας $A^\dagger$

Άρα το ket $|b\rangle \equiv A^\dagger|E_n\rangle$ είναι ιδιοκατάσταση της Hamiltonian με ιδιοτιμή $E_n+\hbar\omega$ αν είναι μη μηδενικό.

Το μέτρο του |b> στο τετράγωνο είναι

$$\left|A^\dagger|E_n\rangle\right|^2 = \langle E_n|AA^\dagger|E_n\rangle = \langle E_n|\left(\frac{H}{\hbar\omega}+\frac{1}{2}\right)|E_n\rangle = \frac{E_n}{\hbar\omega}+\frac{1}{2}$$

Ακόμα, οι ιδιοτιμές της Hamiltonian είναι μη αρνητικές αφού:

$$E_n = \langle E_n|H|E_n\rangle = \frac{1}{2m\omega}\left(\left|p|E_n\rangle\right|^2 + m^2\omega^2\left|x|E_n\rangle\right|^2\right) \geq 0.$$

Άρα $|A^\dagger|E_n\rangle|^2 > 0$ (μή μηδενικό) και μπορούμε να βρούμε όλες τις ιδιοτιμές και τις ιδιοκαταστάσεις αν γνωρίζουμε την θεμελιώδη ιδιοκατασταση και ιδιοτιμή (ιδιοκατάσταση ελάχιστης ενέργειας) και δράσουμε με τον τελεστή $A^\dagger$

Ο τελεστής καταστοφής A

Όμοια δείχνουμε ότι ο τελεστής $A^\dagger$ όταν δρά σε ιδιοκαταστάσεις της ενέργειας δημιουργεί νέες ιδιοκαταστάσεις με μειωμένες ιδιοτιμές.

$$A|E_n\rangle \longrightarrow E_n - \hbar\omega.$$

6e+

Αφού όλες οι ιδιοτιμές είναι μη αρνητικές θα πρέπει να υπάρχει ελάχιστη ιδιοτιμή E_0 με αντίστοιχη κατάσταση (θεμελιώδη) την $|E_0>$. Όταν ο τελεστής καταστροφής δράσει στην θεμελιώδη κατάσταση θα πρέπει να δώσει 0 αφού δεν υπάρχει ιδιοκατάσταση με μικρότερη ιδιοτιμή. Άρα έχουμε:

$$0 = \left|A|E_0\rangle\right|^2 = \langle E_0|\left(\frac{H}{\hbar\omega} - \frac{1}{2}\right)|E_0\rangle = \frac{E_0}{\hbar\omega} - \frac{1}{2} \Longrightarrow E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$$

6f+

Ιδιοτιμές της Hamiltonian

Αφού όλες οι ιδιοτιμές είναι μη αρνητικές θα πρέπει να υπάρχει ελάχιστη ιδιοτιμή E_0 με αντίστοιχη κατάσταση (θεμελιώδη) την $|E_0>$. Όταν ο τελεστής καταστροφής δράσει στην θεμελιώδη κατάσταση θα πρέπει να δώσει 0 αφού δεν υπάρχει ιδιοκατάσταση με μικρότερη ιδιοτιμή. Άρα έχουμε:

$$0 = \left| A|E_0\rangle \right|^2 = \langle E_0| \left(\frac{H}{\hbar\omega} - \frac{1}{2} \right) |E_0\rangle = \frac{E_0}{\hbar\omega} - \frac{1}{2} \Rightarrow E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$$

Άρα οι ιδιοτιμές της Hamiltonian είναι:

$$\left. \begin{array}{c} E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega \\ H(A^\dagger|E_n\rangle) = (E_n + \hbar\omega)(A^\dagger|E_n\rangle) \end{array} \right\} \Rightarrow E_r = \hbar\omega \times (\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, \ldots, \tfrac{2r+1}{2}, \ldots) \Rightarrow E_r = (r + \tfrac{1}{2})\hbar\omega$$

Στην κβαντική θεωρία πεδίου οι τελεστές δημιουργιάς και καταστροφής δεν μας ανεβολατεβάζουν απλά στο φάσμα αλλά δημιουργουν και καταστρέφουν σωμάτια σε κβαντικές πολυσωματιδιακές καταστάσεις!

Ιδιοκαταστάσεις της Hamiltonian

Αφου βρούμε την θεμελίωδη ιδιοκατάσταση |0> στην αναπαράσταση της θέσης θα βρούμε και όλες τις υπόλοιπες με χρήση του τελεστη της δημιουργίας $A^{\dagger}$.

Έστω $|r\rangle \longrightarrow E_r = (r + \frac{1}{2})\hbar\omega$

Για την θεμελιώδη κατάσταση ισχύει:

$$A|0\rangle = 0. \xrightarrow{\quad A \equiv \frac{m\omega x + \mathrm{i}p}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \quad} 0 = A|0\rangle = \frac{m\omega x|0\rangle + \mathrm{i}p|0\rangle}{\sqrt{2m\hbar\omega}}$$

$$\langle x'|\hat{x}|\psi\rangle = \int \mathrm{d}x\, x \langle x'|x\rangle\langle x|\psi\rangle$$
$$= \int \mathrm{d}x\, x\delta(x - x')\psi(x) = x'\psi(x')$$

$$\langle x|\hat{p}|\psi\rangle = (\hat{p}\psi)(x) = -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\left(m\omega x + \hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\langle x|0\rangle = 0$$

6g+

Θεμελιώδης Ιδιοκατάσταση της Hamiltonian

Θα πρέπει να λύσουμε την διαφορική εξίσωση:

$$\frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\left(m\omega x + \hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\langle x|0\rangle = 0$$

Με απλή ολοκλήρωση και κανονικοποίηση έχουμε:

6h+ $$\langle x|0\rangle = \frac{1}{(2\pi\ell^2)^{1/4}}\,\mathrm{e}^{-x^2/4\ell^2}$$

όπου η διασπορά σl σ_x = / είναι: $$\ell \equiv \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$$

Παρατήρηση 1: Η λύση είναι μοναδική άρα δεν υπάρχει εκφυλισμός

Παρατήρηση 2: Η κυματοσυνάρτηση είναι Gaussian με διασπορά /.

Θεμελιώδης Ιδιοκατάσταση της Hamiltonian

Θεμελιώδης κατάσταση στην αναπαράσταση της ορμής:

$$\langle x|0\rangle = \frac{1}{(2\pi\ell^2)^{1/4}}\,\mathrm{e}^{-x^2/4\ell^2}$$

$$\langle p|\psi\rangle = \int \mathrm{d}x\, u_p^*(x)\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{h}(2\pi\sigma^2)^{1/4}}\int \mathrm{d}x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px/\hbar}\,\mathrm{e}^{-x^2/4\sigma^2}.$$

$$\langle p|\psi\rangle = \frac{2\sigma\sqrt{\pi}}{\sqrt{h}(2\pi\sigma^2)^{1/4}}\,\mathrm{e}^{-\sigma^2p^2/\hbar^2} = \frac{1}{(2\pi\hbar^2/4\sigma^2)^{1/4}}\,\mathrm{e}^{-\sigma^2p^2/\hbar^2}$$

$$\Rightarrow \quad P(p) \equiv |\langle p|0\rangle|^2 \propto \mathrm{e}^{-2\ell^2p^2/\hbar^2}$$

6i+

$$\sigma_p = \hbar/2\ell.$$

Ικανοποιείται η αρχή της αβεβαιότητας αφού $\sigma_x\ \sigma_p = \hbar/2$:

6j+

Ενέργεια Μηδενικού Σημείου

Η αρχή της αβεβαιότητας δεν επιτρέπει την ελαχιστοποίηση της ενέργειας σε τιμή μηδεν!

Απόδειξη:

$$H = \frac{1}{2m}\{p^2 + (m\omega x)^2\}$$

$\sigma_p = \hbar/2\ell$ $\quad x = \ell$

$$\ell \equiv \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$$

Δυναμικός Όρος

Ενέργεια μηδενικού σημείου (Θεμελιώδης κβαντική πρόβλεψη)

$$H = \frac{1}{4}\hbar\omega + \frac{1}{4}\hbar\omega = \frac{\hbar\omega}{2}$$

6k+

Κινητικός Όρος

Ελάχιστη τιμή της ενέργειας $H(p,x)=H(\sigma_p,\sigma_x)$ με τον περιορισμό αβεβαιότητας $\sigma_x\sigma_p > \hbar/2$ (να δειχτεί)

Διεγερμένες Καταστάσεις

Για να βρούμε τις διεγερμένες καταστάσεις (n>0) εφαρμόζουμε n φορές με τον τελεστή δημιουργίας $A^\dagger$ στην θεμελιώδη κατάσταση <x|0>.

$$|n+1\rangle = \alpha A^\dagger |n\rangle$$

σταθερά κανονικοποίησης

Εύρεση σταθεράς κανονικοποίησης:

$$\left|A^\dagger|E_n\rangle\right|^2 = \langle E_n|AA^\dagger|E_n\rangle = \langle E_n|\left(\frac{H}{\hbar\omega}+\frac{1}{2}\right)|E_n\rangle = \frac{E_n}{\hbar\omega}+\frac{1}{2} \longrightarrow n+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = n+1$$

$$|n+1\rangle = \alpha A^\dagger |n\rangle$$

$$1 = \langle n+1|n+1\rangle = \alpha^2(n+1)$$

$$\alpha = 1/\sqrt{n+1}$$

Διεγερμένες Καταστάσεις

Για να βρούμε τις διεγερμένες καταστάσεις (n>0) εφαρμόζουμε n φορές με τον τελεστή δημιουργίας $A^{\dagger}$ στην θεμελιώδη κατάσταση <x|0>.

$$|n+1\rangle = \alpha A^{\dagger}|n\rangle$$

σταθερά κανονικοποίησης

$$\alpha = 1/\sqrt{n+1}$$

6l+

$$\left.\begin{array}{l} |n+1\rangle = \alpha A^{\dagger}|n\rangle \\ \\ \alpha = 1/\sqrt{n+1} \end{array}\right\} \Rightarrow |n+1\rangle = \frac{1}{\sqrt{n+1}} A^{\dagger}|n\rangle$$

Απομνημόνευση: ρίζα του μέγιστου n που εμφανίζεται στην εξίσωση

Όμοια βρίσκουμε την σταθερά κανονικοποίησης για την δράση του τελεστή καταστροφής (θα χρειαστεί και ο μεταθέτης $[A^{\dagger},A]=-1$ για τον υπολογισμό του $|A|n\rangle|^2$) συναρτήσει της Hamiltonian):

$$|n-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} A|n\rangle$$

6m+

$1^{η}$ Διεγερμένη Κατάσταση n=1

Εφαρμόζουμε τον τελεστή δημιουργίας στην θεμελιώδη ιδιοσυνάρτηση της Hamiltonian (n=0) για να βρούμε την $1^{η}$ διεγερμένη ιδιοσυνάρτηση <x|1> :

$$\langle x|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\left(m\omega x - \hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\langle x|0\rangle = \left(\frac{x}{2\ell} - \ell\frac{\partial}{\partial x}\right)\langle x|0\rangle = \frac{1}{(2\pi\ell^2)^{1/4}}\frac{x}{\ell}\,\mathrm{e}^{-x^2/4\ell^2}$$

6η+

$$\langle x|0\rangle = \frac{1}{(2\pi\ell^2)^{1/4}}\,\mathrm{e}^{-x^2/4\ell^2}$$

Περιττός τελεστής (Parity =-1)

Άρτια συνάρτηση

Περιττή συνάρτηση (πολυώνυμο Hermite επι εκθετικό)

$$N \equiv A^{\dagger}A$$

Ερμητειανός τελεστής μέρος της Hamiltonian (number operator)

Γενικά ισχύει:

$$\langle x|n\rangle = H_n(x/\ell)\,\mathrm{e}^{-x^2/4\ell^2}$$

Αναμενόμενες τιμές

Οι τελεστές της θέσης και της ορμής μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει των τελεστών A† και A. Έτσι μπορούμε να βρούμε αναμενόμενες τιμές των τελεστών σε ιδιοκαταστάσεις της Hamiltonian:

$$A \equiv \frac{m\omega x + \mathrm{i}p}{\sqrt{2m\hbar\omega}}$$

$$A^\dagger = \frac{m\omega x - \mathrm{i}p}{\sqrt{2m\hbar\omega}}$$

$$\langle x|0\rangle = \frac{1}{(2\pi\ell^2)^{1/4}}\,\mathrm{e}^{-x^2/4\ell^2}$$

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(A + A^\dagger) = \ell(A + A^\dagger)$$

$$\langle n|x^2|n\rangle = \ell^2\langle n|(A + A^\dagger)^2|n\rangle$$

Ισχύει και στην κλασική μηχανική (το ħ απλοποιήται)

$$\langle n|x^2|n\rangle = \ell^2\langle n|(AA^\dagger + A^\dagger A)|n\rangle = \ell^2(2n+1) = \ell^2\frac{2E_n}{\hbar\omega}$$

60+

$$|n+1\rangle = \frac{1}{\sqrt{n+1}}A^\dagger|n\rangle \qquad |n-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}}A|n\rangle \qquad E_r = (r + \tfrac{1}{2})\hbar\omega$$

Χρονική Εξέλιξη

Οι ιδιοκαταστάσεις της Hamiltonian εξέλίσονται χρονικα με την φανταστική φάση που έχουμε δει:

$$i\hbar\frac{\partial|E_n\rangle}{\partial t} = H|E_n\rangle = E_n|E_n\rangle$$

$$|E_n, t\rangle = |E_n, 0\rangle e^{-iE_nt/\hbar}$$

$$E_r = (r + \tfrac{1}{2})\hbar\omega$$

$$|n, t\rangle = e^{-i(n+1/2)\omega t}|n, 0\rangle$$

6p+

Χρονική εξέλιξη γενικής κατάστασης:

$$|\psi, t\rangle = \sum a_j\, e^{-iE_jt/\hbar}|j\rangle$$

Χρονική εξέλιξη ανεμενόμενης τιμής της Θέσης σε γενική κατάσταση:

$$\langle x\rangle = \sum_{jk} a_k^* a_j e^{i(E_k-E_j)t/\hbar}\langle k|x|j\rangle = \sum_{jk} a_k^* a_j e^{i(k-j)\omega t}\langle k|x|j\rangle$$

6q+

$$E_r = (r + \tfrac{1}{2})\hbar\omega$$

Χρονική Εξέλιξη

Χρονική εξέλιξη ανεμενόμενης τιμής της θέσης σε γενική κατάσταση:

$$\langle x\rangle = \sum_{jk} a_k^* a_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_k - E_j)t/\hbar}\langle k|x|j\rangle = \sum_{jk} a_k^* a_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-j)\omega t}\langle k|x|j\rangle.$$

$$E_r = (r + \tfrac{1}{2})\hbar\omega \qquad \ell(A + A^\dagger)$$

Χρησιμοποιούμε τους τελεστές A και $A^\dagger$:

$$\langle x\rangle = \sum_{jk} a_k^* a_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-j)\omega t}\langle k|x|j\rangle$$

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(A + A^\dagger) = \ell(A + A^\dagger)$$

$$\Rightarrow \langle x\rangle = \ell \sum_{jk} a_k^* a_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-j)\omega t}\langle k|(A + A^\dagger)|j\rangle$$

$$|n+1\rangle = \frac{1}{\sqrt{n+1}}A^\dagger|n\rangle \qquad |n-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}}A|n\rangle$$

$$\langle x\rangle = \ell \sum_{jk} a_k^* a_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-j)\omega t}\left(\sqrt{j}\langle k|j-1\rangle + \sqrt{j+1}\langle k|j+1\rangle\right.$$

6r+

Χρονική Εξέλιξη

Θα χρησιμοποιήσουμε την ορθοκανονικότητα των ιδιοκαταστάσεων της Hamiltonian:

$$\langle x\rangle = \ell\sum_{jk} a_k^* a_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-j)\omega t}\left(\sqrt{j}\langle k|j-1\rangle + \sqrt{j+1}\langle k|j+1\rangle\right)$$

$j>0$ $\quad k=j-1 \quad$ $j+1\rightarrow j>0$ $\quad k=j+1$

Μετά τις παραπάνω αντικαταστάσεις παίρνουμε:

$j>0$

$$\langle x\rangle = \ell\sum_{j=1}\sqrt{j}\left(a_{j-1}^* a_j \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + a_j^* a_{j-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\right) \quad = \sum_j X_j\cos(\omega t+\phi_j)$$

κλασικό αποτέλεσμα!

6s+

Το k να είναι μικρότερο από το j κατά 1

Το k να είναι μεγαλύτερο από το j κατά 1

$$2\sqrt{j}\ell\, a_j^* a_{j-1} = X_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_j}$$

$\sqrt{k/m},$

$$H = \frac{1}{2m}\{p^2+(m\omega x)^2\}$$

Σύνοψη

Το πρόβλημα του αρμονικού ταλαντωτή είναι θεμελιώδους σημασίας στην φυσική γιατί περιγράφει όλα τα φυσκά συστήματα κοντά στην ισορροπία.

Η Hamiltonian μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει τελεστών δημιουργίας και καταστροφής που όταν δρουν σε ιδιοκατστάσεις της Hamiltonian δημιουργούν νέες ιδιοκαταστάσεις με μεγαλύτερες ή μικρότερες ιδιοτιμές.

Με χρήση των τελεστών δημιουργίας και καταστροφής μπορούμε να βρούμε τις ιδιοκαταστάσεις και τις ιδιοτιμές της Hamiltonian του αρμονικού ταλαντωτή:

$$H = \frac{1}{2m}\{p^2 + (m\omega x)^2\} \qquad E_r = (r + \tfrac{1}{2})\hbar\omega \qquad \langle x|0\rangle = \frac{1}{(2\pi\ell^2)^{1/4}}\,\mathrm{e}^{-x^2/4\ell^2}$$

$$|n+1\rangle = \frac{1}{\sqrt{n+1}}A^\dagger|n\rangle \qquad |n-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}}A|n\rangle$$

Οι αναμενόμενες τιμές τελεστών της θέσης και της ορμής σε ιδιοκαταστάσεις της Hamiltonian μπορούν να βρεθούν αν εκφράσουμε τους τελεστές αυτούς συναρτήσει των τελεστών δημιουργίας και καταστροφής.

Άσκηση 1

Βρείτε την πιθανότητα να βρεθεί αρμονικός ταλαντωτής εκτος της κλασικά επιτρεπόμενης περιοχής στον χώρο αν βρίσκεται στην θεμελιώδη και στην 1η διεγερμένη κατάσταση.

Λύση

Για τον κλασικό αρμονικό ταλαντωτή έχουμε:

$$x = A_n \cos(\omega t)$$

$$p = -mA_n \omega \sin(\omega t)$$

$$\Rightarrow \quad E_n = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \frac{m\omega^2 A_n^2}{2} \quad \Rightarrow \quad A_n = \sqrt{\frac{2E_n}{m\omega^2}}.$$

Κλασικά απαγορευμένη περιοχή:

$$|x| > A_n \quad \Rightarrow \quad |x| > \sqrt{\frac{2E_n}{m\omega^2}}$$

Πιθανότητα να βρεθεί το κβαντικό σωμάτιο στην κλασικά απαγορευμένη περιοχή:

$$P_n = \int_{-\infty}^{-A_n} \psi_n^*(x)\psi_n(x)\, dx + \int_{A_n}^{\infty} \psi_n^*(x)\psi_n(x)\, dx$$

Άσκηση 1

Πιθανότητα να βρεθεί το κβαντικό σωμάτιο στην κλασικά απαγορευμένη περιοχή:

$$P_n = \int_{-\infty}^{-A_n} \psi_n^*(x)\psi_n(x)\,dx + \int_{A_n}^{\infty} \psi_n^*(x)\psi_n(x)\,dx$$

$$= 2\int_{A_n}^{\infty} \psi_n^*(x)\psi_n(x)\,dx$$

$$= 1 - 2\int_{\infty}^{A_n} \psi_n^*(x)\psi_n(x)\,dx$$

Για την θεμελιώδη κατάσταση παίρνουμε:

$$P_0 = 2\int_{A_0}^{\infty} \psi_0^*(x)\psi_0(x)\,dx = 2\sqrt{\frac{1}{\pi\lambda^2}}\int_{A_0}^{\infty} e^{-x^2/\lambda^2}dx$$

όπου:

$$\lambda = \sqrt{2}\,l = \sqrt{\hbar/m\omega}$$

$$\ell \equiv \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$$

Άσκηση 1

Για την θεμελιώδη κατάσταση παίρνουμε:

$$P_0 = 2\int_{A_0}^{\infty} \psi_0^*(x)\psi_0(x)\, dx = 2\sqrt{\frac{1}{\pi\lambda^2}}\int_{A_0}^{\infty} e^{-x^2/\lambda^2} dx$$

όπου:

$$\lambda = \sqrt{2}\, l = \sqrt{\hbar/m\omega} \qquad \ell \equiv \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$$

Θέτουμε νέα μεταβλητή: $\eta = x/\lambda$

$$\eta = x/\lambda$$

$$A_n = \sqrt{\frac{2E_n}{m\omega^2}}$$

$$\lambda = \sqrt{2}\, l = \sqrt{\hbar/m\omega}$$

$$\Rightarrow \quad A_0/\lambda = 1$$

$$P_0 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{A_0/\lambda}^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta$$

$$= 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{A_0/\lambda} e^{-\eta^2} d\eta$$

$$P_0 = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{1} e^{-\eta^2} d\eta$$

Αριθμητικά βρίσκουμε: $P_0 = 0.1578$

6τ+

Άσκηση 1

Για την $1^{η}$ διεγερμένη κατάσταση παίρνουμε:

$$P_1 = 1 - \frac{4}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{3}} \eta^2 e^{-\eta^2}\, d\eta$$

$$\Downarrow$$

$$P_1 = 0.1116$$

Η τάση μείωσης της πιθανότητάς να βρούμε το σωμάτιο στην κλασικά απαγορευμένη περιοχή αυξάνεται για μεγάλα n (ψηλά διεγερμένες καταστάσεις). Άρα όσο αυξάνει το n τόσο πιο κλασικά συμπεριφέρεται ο αρμονικός ταλαντωτής.

Άσκηση 2

Χρησιμοποιήστε την αρχή της αβεβαιότητας Δx Δp ≥ ħ/2 για να κάνετε μια εκτίμηση της ελάχιστης ενέργειας του κβαντικού αρμονικού ταλαντωτή

Λύση

Για την Hamiltonian έχουμε:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 \Rightarrow \langle H \rangle = E = \frac{\langle p^2 \rangle}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\langle x^2 \rangle$$

Για τις αβεβαιότητες (διασπορές) των x και p έχουμε:

$$\Delta p^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2 \qquad \Delta x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

Αλλά για ιδιοκαταστάσεις της Hamiltonian έχουμε:

$$< x > = < p > = 0$$

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(A + A^\dagger) = \ell(A + A^\dagger)$$

Άρα :

$$E = \frac{\Delta p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\Delta x^2$$

Άσκηση 2

Άρα :

$$E = \frac{\Delta p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\Delta x^2$$

Από την αρχή της αβεβαιότητας, η ελάχιστη τιμή του Δp είναι :

$$\Delta p = \frac{\hbar}{2\,\Delta x}$$

$$\left.\begin{aligned} E &= \frac{\Delta p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\Delta x^2 \\ \Delta p &= \frac{\hbar}{2\,\Delta x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad E = \frac{\hbar^2}{8m\,\Delta x^2} + \frac{m\omega^2}{2}\Delta x^2$$

Για ελαχιστοποίηση απαιτούμε μηδενισμό της παραγώγου:

$$\frac{dE}{d(\Delta x)} = -\frac{\hbar^2}{4m(\Delta x)^3} + m\omega^2\,\Delta x = 0 \Rightarrow \quad \Delta x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$$

6u+

Άσκηση 2

Για ελαχιστοποίηση απαιτούμε μηδενισμό της παραγώγου:

$$\frac{dE}{d(\Delta x)} = -\frac{\hbar^2}{4m(\Delta x)^3} + m\omega^2 \Delta x = 0 \Rightarrow \Delta x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$$

Είναι ελάχιστο διότι:

$$\left.\frac{d^2E}{d(\Delta x)^2}\right|_{\Delta x = \Delta x_0} = \frac{3\hbar^2}{4m(\Delta x)^4} + m\omega^2 > 0$$

6ν+

Άρα η ελάχιστη τιμή της ενέργειας είναι:

$$E_{\min} = \frac{\hbar^2}{4m(\Delta x_0)^2} + \frac{m\omega^2}{2}(\Delta x_0)^2 = \frac{\hbar\omega}{4} + \frac{\hbar\omega}{4} = \frac{\hbar\omega}{2}$$

που τυχαίνει να είναι ακριβώς η ελάχιστη ιδιοτιμή της ενέργειας (μπορούσε να είναι μικρότερη)

Άσκηση 3

Βρείτε τα στοιχεία πίνακα του τελεστή της ορμής στην βάση ιδιοκαταστάσεων του αρμονικού ταλαντωτή

Λύση

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x + \frac{i}{m\omega}p$$

$$a^{\dagger} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x - \frac{i}{m\omega}p$$

$$p = \frac{m\omega}{2i}\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}(a - a^{\dagger}) = i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}(a^{\dagger} - a)$$

$$\langle n|p|k\rangle = i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\langle n|(a^{\dagger} - a)|k\rangle = i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}(\langle n|a^{\dagger}|k\rangle - \langle n|a|k\rangle)$$

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$$

$$a^{\dagger}|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

$$\langle n|p|k\rangle = i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}(\sqrt{k+1}\langle n|k+1\rangle - \sqrt{k}\langle n|k-1\rangle) = i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}(\sqrt{k+1}\,\delta_{n,k+1} - \sqrt{k}\,\delta_{n,k-1})$$

Άσκηση 3

Βρείτε τα στοιχεία πίνακα του τελεστή της ορμής στην βάση ιδιοκαταστάσεων του αρμονικού ταλαντωτή

Λύση

$$\langle n|p|k\rangle = i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\left(\sqrt{k+1}\,\langle n|k+1\rangle - \sqrt{k}\,\langle n|k-1\rangle\right) = i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\left(\sqrt{k+1}\,\delta_{n,k+1} - \sqrt{k}\,\delta_{n,k-1}\right)$$

Άρα:

$$\langle n|p|k\rangle = \begin{cases} i\sqrt{\dfrac{m\omega\hbar n}{2}} & k = n-1 \\ -i\sqrt{\dfrac{m\omega\hbar\,(n+1)}{2}} & k = n+1 \\ 0 & \text{σε κάθε άλλη περίπτωση} \end{cases}$$

$$\langle n|p|k\rangle = i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & \\ 1 & 0 & -\sqrt{2} & \cdots & \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & & & \end{pmatrix}$$

Μπορεί επίσης να δειχτεί με παρόμοιο τρόπο ότι για την αναμενομένη τιμή $\langle n|p^2|n\rangle$ ισχύει:

$$\langle p^2\rangle = \frac{m\omega\hbar}{2}(2n+1)$$

6w+

Άσκηση 4

Δείξτε ότι οι τελεστές δημιουργίας και καταστροφής μπορούν να γραφούν σαν:

$$A = \frac{x}{2\ell} + \ell\frac{\partial}{\partial x} \qquad A^{\dagger} = \frac{x}{2\ell} - \ell\frac{\partial}{\partial x}.$$

όπου: $\ell \equiv \sqrt{\hbar/2m\omega}$

Μετά βρείτε την $2^{η}$ διεγερμένη ιδιοσυνάρτηση του αρμονικού ταλαντωτή.

Λύση

Στην αναπαράσταση της θέσης έχουμε: $A = \frac{\ell}{\hbar}(m\omega x + \mathrm{i}p) = \left(\frac{x}{2\ell} + \mathrm{i}\frac{\ell}{\hbar}p\right) = \frac{x}{2\ell} + \ell\frac{\partial}{\partial x}$

Όμοια: $A^{\dagger} = \frac{x}{2\ell} - \ell\frac{\partial}{\partial x}$

6x+

Άρα για την θεμελιώδη κατάσταση έχουμε: $Au_0 = 0 \Rightarrow \quad \ell\frac{\partial u_0}{\partial x} = -\frac{x}{2\ell}u_0 \Rightarrow \quad u_0 \propto \mathrm{e}^{-x^2/4\ell^2}$

Απαιτώντας κανονικοποίηση έχουμε: $1 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\,|u_0|^2 \Longrightarrow \quad (2\pi\ell^2)^{1/4}$

Άσκηση 4

Άρα για την θεμελιώδη κατάσταση έχουμε:

$$Au_0 = 0 \Rightarrow \quad \ell\frac{\partial u_0}{\partial x} = -\frac{x}{2\ell}u_0 \Rightarrow \quad u_0 \propto e^{-x^2/4\ell^2}$$

Απαιτώντας κανονικοποίηση έχουμε:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, |u_0|^2 \Longrightarrow \quad (2\pi\ell^2)^{1/4}$$

Αφού θέσουμε: $y \equiv x/\ell$

Βρίσκουμε την 1η διεγερμένη κατάσταση ως:

$$u_1 = A^\dagger u_0 = \frac{1}{(2\pi\ell^2)^{1/4}}\left(\tfrac{1}{2}y - \frac{\partial}{\partial y}\right)e^{-y^2/4} = \frac{1}{(2\pi\ell^2)^{1/4}} y e^{-y^2/4}$$

Βρίσκουμε την 2η διεγερμένη κατάσταση ως:

$$\sqrt{2}u_2 = A^\dagger u_1 = \frac{1}{(2\pi\ell^2)^{1/4}}\left(\tfrac{1}{2}y - \frac{\partial}{\partial y}\right) y e^{-y^2/4} = \frac{1}{(2\pi\ell^2)^{1/4}}\left(y^2 - 1\right)e^{-y^2/4}$$

6y+

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$$

$$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

Άρα:

$$u_2(x) = \frac{1}{(8\pi\ell^2)^{1/4}}\left(\frac{x^2}{\ell^2} - 1\right)e^{-x^2/4\ell^2}$$

Άσκηση 5

Αρμονικός ταλαντωτής βρίσκεται την t=0 στην κατάσταση:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|N-1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|N\rangle.$$

Δείξτε ότι σε επόμενες χρονικές στιγμές η ανεμενόμενη τιμή της θέσης εκτελεί αρμονική ταλάντωση ως:

$$\langle x\rangle_t = \sqrt{N}\ell\cos(\omega t)$$

όπου:

$$\ell \equiv \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}.$$

Δείξτε ακόμα ότι το πλάτος ταλάντωσης κλασικού αρμονικού ταλαντωτή με ενέργεια $E=\hbar\omega(N+1/2)$ είναι

$$x_{\max} = 2\sqrt{N+\tfrac{1}{2}}\,\ell.$$

Λύση

Για την αναμενόμενη τιμή της θέσης έχουμε:

$$\langle x\rangle_t = \ell\langle\psi|(A+A^\dagger)|\psi\rangle$$

Άσκηση 5

Λύση

Για την αναμενόμενη τιμή της θέσης έχουμε:

$$\langle x \rangle_t = \ell \langle \psi | (A + A^\dagger) | \psi \rangle$$

$$= \tfrac{1}{2}\ell \big(\langle N-1 | \mathrm{e}^{\mathrm{i}(N-1/2)\omega t} + \langle N | \mathrm{e}^{\mathrm{i}(N+1/2)\omega t} \big) (A + A^\dagger) \big(|N-1\rangle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(N-1/2)\omega t} + |N\rangle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(N+1/2)\omega t} \big)$$

$$= \tfrac{1}{2}\ell \big(\langle N-1 | \mathrm{e}^{\mathrm{i}(N-1/2)\omega t} + \langle N | \mathrm{e}^{\mathrm{i}(N+1/2)\omega t} \big) \big(\sqrt{N} |N\rangle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(N-1/2)\omega t} + \sqrt{N} |N-1\rangle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(N+1/2)\omega t} \big)$$

$$= \tfrac{1}{2}\ell \sqrt{N} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \right) = \sqrt{N} \ell \cos(\omega t)$$

6z+

Για τον κλασικό ταλαντωτή έχουμε:

$$E = \tfrac{1}{2} m \omega^2 x^2 \;\downarrow\; (N + \tfrac{1}{2}) \hbar \omega \quad \Rightarrow \quad x_{\max} = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} = \sqrt{\frac{(2N+1)\hbar\omega}{m\omega^2}} = 2\sqrt{N + \tfrac{1}{2}}\,\ell.$$

6αα+

Που έχει διπλάσιο πλάτος ταλάντωσης από τον κβαντικό ταλαντωτή ακόμα και για μεγάλα N !

Άσκηση 5

Για τον κλασικό ταλαντωτή έχουμε:

$$E = \tfrac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

$$\downarrow$$

$$(N + \tfrac{1}{2})\hbar\omega$$

$$\Rightarrow \quad x_{\max} = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} = \sqrt{\frac{(2N+1)\hbar\omega}{m\omega^2}} = 2\sqrt{N + \tfrac{1}{2}}\,\ell.$$

Που έχει διπλάσιο πλάτος ταλάντωσης από τον κβαντικό ταλαντωτή ακόμα και για μεγάλα N !

E: Που πήγε η αρχή της αντιστοιχίας;;

A: Η αρχή της αντιστοιχίας αποκαθίσταται αν έχουμε μεγάλη αβεβαιότητα στην ενέργεια. Θεωρείστε πχ αρχική κατάσταση:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{K}} \sum_{k=N}^{N+K-1} |k\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle x\rangle_t = \frac{\ell}{K} \sum_{k=N}^{N+K-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+1/2)\omega t} \langle k|(A + A^\dagger) \sum_{j=N}^{N+K-1} |j\rangle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(j+1/2)\omega t}.$$

Να δειχτεί $\quad N \gg K \gg 1$

$$\Downarrow$$

$$\langle x\rangle_t \simeq 2\sqrt{N}\,\ell \cos(\omega t)$$

6bb+

Άσκηση 6

Αφού εκφράσετε τον τελεστή καταστροφής A στην αναπαράσταση της ορμής βρείτε την θεμελιώδη ιδιοκατάσταση του αρμονικού ταλαντωτή στην αναπαράσταση της ορμής.

Λύση

Για να ικανοποιείται η σχέση μετάθεσης [x,p]=iħ θα πρέπει ο τελεστής της θέσης στην αναπαράσταση της ορμής να έχει την μορφή

$$x = \mathrm{i}\hbar\partial/\partial p$$

ώστε:

$$[x,p] = \mathrm{i}\hbar\partial p/\partial p = \mathrm{i}\hbar$$

Άρα:

$$A = \left(\frac{x}{2\ell} + \mathrm{i}\frac{\ell}{\hbar}p\right) = \mathrm{i}\left(\frac{\ell p}{\hbar} + \frac{\hbar}{2\ell}\frac{\partial}{\partial p}\right) \qquad \ell \equiv \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}.$$

$$0 = Au_0 \Rightarrow \frac{\ell p}{\hbar}u_0 = -\frac{\hbar}{2\ell}\frac{\partial u_0}{\partial p} \Rightarrow u_0(p) \propto \mathrm{e}^{-p^2\ell^2/\hbar^2}$$

Εναλλακτικά:

$$\langle p|0\rangle = \int \mathrm{d}x \langle p|x\rangle\langle x|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{h}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px/\hbar}\frac{\mathrm{e}^{-x^2/4\ell^2}}{(2\pi\ell^2)^{1/4}}$$

Άσκηση 6

Αφού εκφράσετε τον τελεστή καταστροφής A στην αναπαράσταση της ορμής βρείτε την θεμελιώδη ιδιοκατάσταση του αρμονικού ταλαντωτή στην αναπαράσταση της ορμής.

Λύση

Εναλλακτικά:

$$\langle p|0\rangle = \int \mathrm{d}x \langle p|x\rangle\langle x|0\rangle \;= \frac{1}{\sqrt{h}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px/\hbar}\,\frac{\mathrm{e}^{-x^2/4\ell^2}}{(2\pi\ell^2)^{1/4}}$$

$$= \frac{1}{(2\pi\ell^2 h^2)^{1/4}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \exp\left(-\left\{\frac{x}{2\ell}+\frac{\mathrm{i}p\ell}{\hbar}\right\}^2\right)\mathrm{e}^{-p^2\ell^2/\hbar^2}$$

$$= \frac{2\ell\sqrt{\pi}}{(2\pi\ell^2 h^2)^{1/4}}\,\mathrm{e}^{-p^2\ell^2/\hbar^2}$$

6cc+

Άλυτες Ασκήσεις

1. Πόσοι δεσμοί (μηδενισμοί) υπαρχουν στην κυματοσυνάρτηση <x|n>;

2. Σε ποια διεγερμένη κατάσταση η βρίσκεται κβαντικός αρμονικός ταλαντωτής που έχει περίοδο 1s, πλάτος ταλάντωσης 3cm και μάζα 0.3kg;

3. Αποδείξτε ότι: $|n-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} A|n\rangle$

4. Δείξτε ότι τα στοιχεία πίνακα του τελεστή της θέσης στην αναπαράσταση των ιδιοκαταστάσεων την Hamiltonian του αρμονικού ταλαντωτή είναι της μορφής:

$$x_{jk} = \ell \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \cdots & & & & \\ \sqrt{1} & 0 & \sqrt{2} & 0 & & & & & \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \cdots & & & & \\ & & \sqrt{3} & \cdots & & & & & \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \\ & & & \cdots & 0 & \sqrt{n-1} & \cdots & & \\ & & & & \sqrt{n-1} & 0 & \sqrt{n} & & \\ & & & & & \sqrt{n} & 0 & \sqrt{n+1} & \cdots \\ & & & & & & \sqrt{n+1} & 0 & \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \end{pmatrix}$$

Άλυτες Ασκήσεις

5. Ο ταλαντωτής Fermi έχει Hamiltonian: $H = f^\dagger f$

όπου ο τελεστής f ικανοποιεί τις σχέσεις: $f^2 = 0, \quad f f^\dagger + f^\dagger f = 1.$

Αφού δείξετε ότι $H^2=H$ βρείτε τις ιδιοτιμές της H. Αν η βασική κατάσταση (ελάχιστης ενέργειας) είναι η $|0>$, βρείτε τις καταστάσεις $f|0>$ και $f^\dagger\,|0>$.