Νομα 1

Κβαντική Ι

Τεστ 5

6

12/11/14

Όνομα: Παπιγκιώτης Γρηγόριος

ΑΜ: 6995

1. Σχεδιάστε το πείραμα της διπλής οπής και βρείτε την απόσταση μεταξύ των μεγίστων πιθανότητας σαν συνάρτηση της ορμής των προσπιπτόντων σωματίων. (++)
2. Υπολογίστε το ρεύμα πιθανότητας σαν συνάρτηση του μέτρου και της φάσης μια κυματοσυνάρτησης. Πόση είναι η ταχύτητα ροής της πιθανότητας; (++)
3. Διατυπώστε το θεώρημα virial (χωρίς απόδειξη) και εφαρμόστε το στην περίπτωση του ατόμου του υδρογόνου και του αρμονικού ταλαντωτή. (++)

3. Θεώρημα Virial $\boxed{2\langle T\rangle = \langle E|\vec{r}\cdot\vec{\nabla}V(\vec{r})|E\rangle}$

για το άτομο του υδρογόνου το δυναμικό είναι της μορφής

$V(\vec{r}) = \frac{C}{r}$ , $\vec{\nabla}V(\vec{r}) = C\,\nabla\left(\frac{1}{r}\right)$ , $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

έστω $\Phi = \frac{1}{r}$ , $\vec{\nabla}\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\hat{k}$

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^2}\frac{1\cdot 2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = -\frac{x}{r^3}$

ομοίως και για τις άλλες συνιστώσες έχουμε $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{y}{r^3}$ ,

$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{z}{r^3}$ οπότε $\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^3}(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}) = -\frac{\vec{r}}{r^3}$

$\vec{r}\cdot\vec{\nabla}V(\vec{r}) = -C\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}}{r^3} = -\frac{C}{r} = -V(\vec{r})$

οπότε $\langle E|\vec{r}\cdot\vec{\nabla}V(\vec{r})|E\rangle = -\langle E|V(\vec{r})|E\rangle = -\langle V\rangle$

οπότε από το θεώρημα virial $\boxed{2\langle T\rangle = -\langle V\rangle}$

με $\langle T\rangle = \langle E|\frac{\hat{P}^2}{2m}|E\rangle$

για τον αρμονικό ταλαντωτή το δυναμικό είναι της μορφής

$V(\vec{r}) = Cr^2$ , $\vec{\nabla}V(\vec{r}) = 2Cr\,\vec{\nabla}(r)$

$$\vec{\nabla} r = \frac{\partial r}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial r}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial r}{\partial z}\hat{k} = \frac{1}{r}(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}) = \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{r}$$ ομοίως και για τις άλλες συνιστώσες :

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

οπότε $\vec{\nabla} V(\vec{r}) = 2c\cancel{r}\,\frac{\vec{r}}{\cancel{r}} = 2c\vec{r}$

$$\vec{r}\cdot\vec{\nabla} V(\vec{r}) = 2cr^2 = 2V(\vec{r})$$

οπότε από το θεώρημα virial $2\langle T\rangle = \langle E|\vec{r}\cdot\vec{\nabla}V(\vec{r})|E\rangle$

$$2\langle T\rangle = 2\langle E|V(\vec{r})|E\rangle = 2\langle V\rangle$$

επομένως στην περίπτωση του αρμονικού ταλαντωτή $\langle T\rangle = \langle V\rangle$

2) Το ρεύμα πιθανότητας $\vec{J}(\vec{r},t) = \frac{i\hbar}{2m}\left(\psi\vec{\nabla}\psi^* - \psi^*\vec{\nabla}\psi\right)$ (1)

Έστω $\Psi(\vec{r},t) = |\psi| e^{i\varphi(\vec{r})}$, $\psi^*(\vec{r},t) = |\psi| e^{-i\varphi(r)}$

$$\vec{\nabla}\psi^* = \vec{\nabla}(|\psi| e^{-i\varphi(\vec{r})}) = e^{-i\varphi(\vec{r})}\vec{\nabla}|\psi| + (-i)e^{-i\varphi(r)}|\psi|\,\vec{\nabla}(\varphi(\vec{r}))$$

$$\psi\vec{\nabla}\psi^* = |\psi| e^{i\varphi(\vec{r})}\cdot\left(e^{-i\varphi(\vec{r})}\vec{\nabla}|\psi| - i e^{-i\varphi(\vec{r})}|\psi|\,\vec{\nabla}(\varphi(\vec{r}))\right)$$

$$= |\psi|\nabla|\psi| - i|\psi|^2\vec{\nabla}(\varphi(\vec{r})) \quad (2)$$

$$\vec{\nabla}\psi = \vec{\nabla}(|\psi| e^{i\varphi(r)}) = e^{i\varphi(r)}\vec{\nabla}|\psi| + i e^{i\varphi(\vec{r})}|\psi|\,\vec{\nabla}(\varphi(\vec{r}))$$

$$\psi^*\vec{\nabla}\psi = |\psi| e^{-i\varphi(r)}\left(e^{i\varphi(r)}\vec{\nabla}|\psi| + i|\psi|^2\vec{\nabla}(\varphi(\vec{r}))\right) \quad (3)$$

Αντικαθιστώντας τις (2), (3) στην (1) έχουμε

$$\vec{J}(\vec{r},t) = \frac{i\hbar}{2m}\left(-2i|\psi|^2\vec{\nabla}(\varphi(\vec{r}))\right) = \frac{\cancel{2}\hbar}{\cancel{2}m}|\psi|^2\vec{\nabla}(\varphi(\vec{r}))$$

$$= \frac{\hbar}{m}|\psi|^2\vec{\nabla}(\varphi(\vec{r}))$$

φύλλα 2

Κβαντική Ι

Τεστ 5

12/11/14

Όνομα: Παπαχαλιώτης Γρηγόριος

ΑΜ: 6995

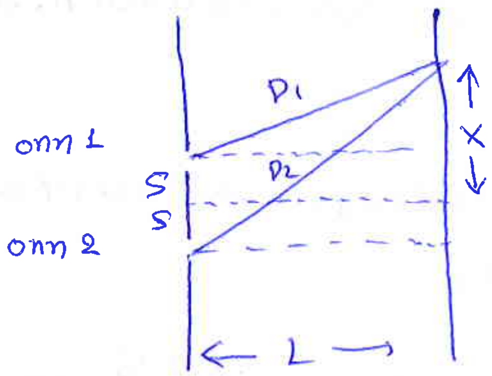
1. Σχεδιάστε το πείραμα της διπλής οπής και βρείτε την απόσταση μεταξύ των μεγίστων πιθανότητας σαν συνάρτηση της ορμής των προσπιπτόντων σωματίων. (++)
2. Υπολογίστε το ρεύμα πιθανότητας σαν συνάρτηση του μέτρου και της φάσης μια κυματοσυνάρτησης. Πόση είναι η ταχύτητα ροής της πιθανότητας; (++)
3. Διατυπώστε το θεώρημα virial (χωρίς απόδειξη) και εφαρμόστε το στην περίπτωση του ατόμου του υδρογόνου και του αρμονικού ταλαντωτή. (++)

Θέμα 2 (συνέχεια): αλλά η πυκνότητα πιθανότητας $p(\vec{r},t)=|\psi|^2$

οπότε $\vec{J}(\vec{r},t) = \frac{\hbar}{m} p \vec{\nabla}(\varphi(\vec{r}))$

αλλά $\vec{J} = p\vec{V} \Rightarrow \vec{V} = \frac{\hbar}{m}\vec{\nabla}(\varphi(\vec{r}))$ όπου $\vec{V}$ είναι η ταχύτητα ροής πιθανότητας.

Θέμα 1




Το υλικό σωμάτιο συμπεριφέρεται ως επίπεδο κύμα με $p = \frac{h}{\lambda}$ και $\lambda$ το μήκος κύματος de-Broglie.

Για το σωμάτιο που διέρχεται από την οπή 1 έχουμε:

$$D_1^2 = L^2 + (x-s)^2 = L^2\left(1+\frac{(x-s)^2}{L^2}\right)$$

$$D_1 = L\sqrt{1+\frac{(x-s)^2}{L^2}} = L\left(1+\frac{(x-s)^2}{L^2}\right)^{1/2}$$

επειδή τόσο $\frac{x}{L}$, $\frac{s}{L}$ είναι πάρα πολύ μικρές ποσότητες με χρήση του διωνυμικού αναπτύγματος $(1+x)^n = 1+nx$ έχουμε

$$D_1 \simeq L\left(1+\frac{(x-s)^2}{2L^2}\right)$$

ομοίως για το σωμάτιο που διέρχεται από την οπή 2 έχουμε

$$D_2^2 = L^2 + (x+s)^2 = L^2\left(1+\frac{(x+s)^2}{L^2}\right)$$

$$D_2 = L\left(1+\frac{(x+s)^2}{L^2}\right)^{1/2} \Rightarrow D_2 \simeq L\left(1+\frac{(x+s)^2}{2L^2}\right)$$

οπότε η διαφορά δρόμου $D_2 - D_1$ θα είναι

$$D_2 - D_1 \simeq L + \frac{(x+s)^2}{2L} - L - \frac{(x-s)^2}{2L} = \frac{(x+s)^2-(x-s)^2}{2L}$$

$$D_2 - D_1 = \frac{(x+s+x-s)(x+s-x+s)}{2L} = \frac{2x\cdot 2s}{2L} = \frac{2xs}{L}$$

Η Διαφορά φάσης $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(D_2 - D_1)$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\left(\frac{2xs}{L}\right)$$

Για να μεγιστοποιείται το πλάτος πιθανότητας θα πρέπει

$\Delta\varphi = 2n\pi$

για την διαφορά φάσης μεταξύ των δύο πρώτων μεγίστων

$(n=1)$, $\Delta\varphi = 2\pi$ οπότε

$$\cancel{2\pi} = \frac{\cancel{2\pi}}{\lambda}\left(\frac{2xs}{L}\right) \Rightarrow \lambda = \frac{2xs}{L} \Rightarrow x = \frac{\lambda L}{2s}$$

$\lambda = \frac{h}{p}$, επομένως η απόσταση μεταξύ των δύο πρώτων μεγίστων πιθανότητας είναι $\boxed{x = \frac{Lh}{2ps}}$